

В.В. Репьев

Методика тригонометрии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В11 **В.В. Репьев**
Методика тригонометрии / В.В. Репьев – М.: Книга по Требованию, 2018. –
152 с.

ISBN 978-5-458-27458-6

Книга представляет собой пособие начала 20 века по методике преподавания тригонометрии.

ISBN 978-5-458-27458-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2018

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2018

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Глава I.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ.

1. История тригонометрии показывает, что как ее возникновение, так и ее путь развития были обусловлены развитием производства и производственных отношений. История вскрывает и те практические проблемы, решение которых привело к рождению этой научной дисциплины и которые стимулировали ее дальнейшее развитие. В то же время изучение развития тригонометрии оказывает преподавателю помощь в правильном уяснении значения того или другого раздела этой дисциплины, его относительной ценности, а в иных случаях дает и указания на наиболее целесообразные методы изложения предмета в школе.

Учитель с большой выгодой для педагогического процесса может использовать исторические данные; экскурсы в историю тригонометрии укажут ту материальную базу, на которой как надстройка развивалась тригонометрия, подчеркнут техническое значение тригонометрии, дадут объяснения тем терминам, которыми она оперирует, расширят кругозор учащихся, знакомя их со смежными дисциплинами (астрономия, геодезия, сферическая тригонометрия). Эти же экскурсы способствуют поднятию интереса учащихся к изучаемому предмету.

К сожалению, в нашей учебно-методической литературе нет книг, дающих в краткой и популярной форме историю тригонометрии. Задачей этой главы является дать учителю в краткой, компактной форме тот материал по истории тригонометрии, который можно использовать в школе.

2. Колыбелью математики является древний Египет. Зародыши некоторых простейших способов изучения геометрических фигур, которыми пользуется тригонометрия, повидимому, также возникли в древнем Египте. При постройке пирамид или при определении их размеров египтяне, повидимому, пользовались отношением между половиной диагонали основания правильной четырехугольной пирамиды и ее боковым ребром; другими словами, они пользовались тем, что мы называем косинусом угла, образуемого ребром с плоскостью основания пирамиды.

Этот намек на наши тригонометрические отношения содержится в одном из древнейших математических документов, сохранившемся до наших дней, в папирусе Аамеса, написанном приблизительно за 1800 лет до начала нашей эры, причем в этом

папирусе имеется указание, что Аамес пользовался руководством, составленным около 3000 лет до нашей эры. Таким образом, намеки на наши тригонометрические величины как на отношения сторон прямоугольного треугольника очень древнего происхождения. Конечно, ничего, подобного нашей тригонометрической символике, у египтян не было и по состоянию математических знаний не могло и быть. Интересно отметить, что первые попытки использовать тригонометрические отношения базировались на прямоугольном треугольнике.

Имеются также сведения, что за 1800 лет до нашей эры вавилонские ученые предсказывали солнечные и лунные затмения, что возможно лишь при некоторых знаниях тригонометрии. До нас не дошло никаких документов, свидетельствующих о состоянии тригонометрических знаний вавилонян. Однако вавилоняне подготовили почву для развития тригонометрии в двух направлениях: во-первых, они делили окружность на 360 равных частей и таким образом подготовили используемое в наши дни градусное измерение углов; во-вторых, они разработали шестидесятиричную систему счисления, которая позднее перешла к грекам, а впоследствии и к другим европейским народам. Эта система использовалась позднее и тригонометрией; она сохранялась очень долго: ее следы встречаются даже в XVII веке нашей эры.

Начиная с VI века до начала нашей эры, на исторической арене появляются греки. К концу IV века геометрия достигает пышного развития. Около 300 года до начала нашей эры в Александрии жил знаменитый греческий геометр Эвклид. Его „Начала“ являются замечательным трактатом, в котором он собрал геометрические знания своих предшественников, систематизировал их и, повидимому, дополнил. Эвклид кладет начало так называемой александрийской школе геометров, которая дала целый ряд талантливейших математиков древности. Пышный расцвет геометрии греков подготовил необходимые предпосылки для зарождения тригонометрии.

Основоположителем тригонометрии является Гиппарх, один из выдающихся астрономов древнего мира¹. Гиппарх составил таблицу хорд дуг, которая в то время играла такую же роль, какую играет в наше время таблица синусов дуг. К сожалению, таблица хорд Гиппарха утеряна и до нас не дошла; только по свидетельству других ученых мы узнаем, что эти таблицы были написаны в двенадцати книгах. Таким образом, Гиппарх является изобретателем той тригонометрии, которую можно называть тригонометрией хорд. Его вычисления требовали знания тригонометрии как плоской, так и сферической (занимающейся решением треугольников, построенных на сферической поверхности).

После Гиппарха над тригонометрией работает другой великий астроном, Клавдий Птоломей, живший в Александрии

¹ Гиппарх родился или в Никее (в Вифинии, в Малой Азии), или на острове Родосе, повидимому, в первой четверти II века до нашей эры. Период наиболее продуктивной научной деятельности его относится к середине II века.

около середины II века нашей эры. После Птолемея остался ряд трактатов, дошедших до нас. Его известность основана на большом астрономическом трактате под названием „Великое построение“, которое арабы впоследствии называли „Альмагест“. Альмагест развит на трудах предшествующих астрономов, в особенности на трудах Гиппарха. В Альмагесте Птолемея дошла до нас таблица хорд, составленная через каждые полградуса от 0° до 180° . При составлении таблицы хорд Птоломей не только использовал предшествующие таблицы, но и усовершенствовал их, сделав свою таблицу более полной и более точной. Птоломей делит окружность на 360, а диаметр на 120 равных частей, а значит, радиус на 60 частей; каждую часть радиуса он делит также на 60 частей и каждую из этих частей — вновь на 60 частей. Таким образом, в основе деления лежит вавилонская шестидесятиричная система счисления. Метод вычисления хорд найден Птоломеем. Он установил теорему: „прямоугольник из диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равновелик сумме прямоугольников из противоположных сторон“, известную в настоящее время в следующей редакции: „Произведение диагоналей вписанного выпуклого четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон его“. Из этой теоремы Птоломей вывел другие две: о вычислении посредством хорд двух дуг, меньших полуокружности, хорды дуги, равной сумме и разности этих дуг, а также о вычислении по хорде дуги хорды половины этой дуги¹.

Пользуясь этими теоремами, а также длинами сторон вписанного в круг квадрата и правильных вписанных в круг пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника, Птоломей вычисляет хорды дуг от 0° до 180° с промежутками в полградуса.

В Альмагесте дается также ряд примеров, показывающих, как использовать таблицы хорд для решения плоских прямоугольных треугольников. Но астроном не может довольствоваться решением *плоских* треугольников; для астрономии нужны способы решения *сферических* треугольников. Птоломей в Альмагесте развивает зачатки *сферической тригонометрии*. Интересно отметить, что сферическая тригонометрия развита Птоломеем полнее, чем прямолинейная. Это объясняется тем, что тригонометрией занимались ради приложения ее к астрономии. Заметим, что у Птолемея впервые встречаются знаки для обозначения минут ($'$) и секунд ($''$). Знак для обозначения градусов ($^\circ$) появился позднее.

Таким образом, трудами Гиппарха и Птолемея были созданы основы новой дисциплины — тригонометрии. Основными причинами создания тригонометрии были требования развивающейся астрономии. Однако тригонометрия древних по сравнению с тригонометрией наших дней своеобразна; это своеобразие определя-

¹ Изложение указанных трех теорем имеется в книге Фаццари „Краткая история математики“ (1923). Первая и третья из них являются первыми по времени предшественницами той теоремы, которая известна в тригонометрии под названием „теоремы сложения“.

ется, во-первых, тем, что греки рассматривали *хорды*, — их тригонометрия была *тригонометрией хорд*; во-вторых, в ней не было и следов современной нам *тригонометрической символики*; в-третьих, она еще не выработала той *терминологии*, которой пользуется тригонометрия наших дней; в-четвертых, она является вспомогательной *главой астрономии*, а не самостоятельной математической дисциплиной.

3. В то время как греческая культура пришла в упадок и математическая мысль замерла, на историческую сцену в развитии математики выступает другой народ — индусы. Если греки занимались по преимуществу геометрией и достигли в ней замечательных результатов, то индусы работали главным образом над арифметикой и создали употребляемую нами десятичную нумерацию. Однако интерес индусов к счетным операциям позволил им усовершенствовать вычислительную геометрию: развитие тригонометрии получило у них значительные успехи. Начало расцвета математической мысли индусов относится примерно к IV веку нашей эры и достигает максимального развития в работах знаменитого математика и астронома Брамагупты, жившего в VII веке. К сожалению, ни один индусский трактат по тригонометрии не дошел до нас, а потому об их работе можно судить лишь по математическим работам их переводчиков и комментаторов.

Индусы делили окружность на 360 градусов, а градус на 60 минут. Из соотношения $2\pi r = 21\,600$ они определяли (полагая $\pi = 3,1416$) радиус в минутах дуги; таким образом, радиус равен 3438 минутам. Квadrант они делили на 24 равные части (каждая часть, таким образом, содержала $3^\circ 45'$). Такое деление окружности основано на астрономических соображениях. Индусы делили окружность, изображающую кажущуюся орбиту солнца, на 12 частей, а каждую из этих частей подразделяли на 8 частей; таким путем вся окружность делилась на 96 равных частей.

Индусы поняли, что для вычислений удобнее пользоваться не хордами, а полухордами, или синусами. Кроме синуса индусы рассматривали и другие функции дуги: косинус и синус-верзус, представляющий разность между радиусом и косинусом ($\sinus\ versus\alpha = 1 - \cos\alpha$ в современных обозначениях). Таким образом, индусы расширили круг тригонометрических функций.

Как составляли индусы таблицу синусов? Синус квадранта (четверти окружности) равен радиусу, или 3438. Теперь легко вычислить синус дуги в $\frac{1}{3}$ квадранта: он равен половине радиуса,

или 1719. Пользуясь тем, что синус и косинус для дуги в $\frac{1}{2}$ квадранта равны между собой, по теореме Пифагора получили синус дуги в $\frac{1}{2}$ квадранта. Зная синус дуги в $\frac{1}{3}$ квадранта, вычисляли синус дуги в $\frac{2}{3}$ квадранта, пользуясь теоремой Пифаго-

ра. Таким образом, в распоряжении индусов оказались синусы дуг в $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ квадранта.

Далее, пользуясь формулой $\sin 2a = 2 \sin^2 a$ (в современных обозначениях), они последовательно вычисляли, исходя из синуса дуги в $\frac{1}{2}$ квадранта, синус дуги в $\frac{1}{4}$ квадранта, а затем и синус дуги в $\frac{1}{8}$ квадранта, а исходя из синуса дуги в $\frac{1}{3}$ квадранта, получали последовательно синус дуг в $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$ квадранта. С помощью этих синусов, пользуясь косинусами дополнительных дуг и теоремой Пифагора, индусы вычисляли синусы дуг в $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$ и $\frac{23}{24}$ квадранта, а затем синусы половины этих дуг. Таким путем получалась таблица синусов для дуг первого квадранта с промежутком в $\frac{1}{24}$ квадранта. Бхаскара показывает, как составлять таблицу синусов с интервалами в $\frac{1}{90}$ квадранта; он использует формулы сложения.

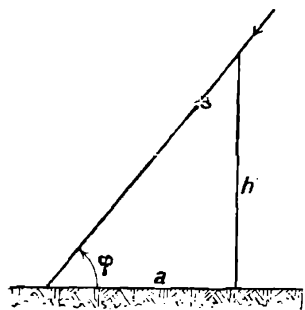
Для надобностей астрономии индусы решали прямоугольные треугольники как плоские, так и сферические. Косоугольные треугольники решались посредством разложения на прямоугольные треугольники.

Подводя итоги работе индусов в области тригонометрии, отметим, что, во-первых, вместо рассмотрения хорд они вводят полухорды, или синусы; во-вторых, они вводят новые функции дуги, косинус и синус-верзус, и, в-третьих, они с помощью этих новых функций указывают другие пути в составлении тригонометрических таблиц. Однако, как и у греков, тригонометрия индусов еще не оформилась в самостоятельную дисциплину: она продолжает оставаться вспомогательной главой астрономии, она еще не может получить свойственную ей символику.

4. В начале VII века видную историческую роль играли арабы, внесшие свою долю в развитие культуры и наук. Недавние кочевники, покорив Персию, Месопотамию, Сирию, Египет, государства северной Африки и Испанию, арабы быстро заимствовали культуру покоренных цивилизованных народов. Столица великого государства, Багдад, стала центром науки.

По хозяйственным причинам арабы особо интересовались астрономией и астрологией; вместе с тем они проявляли большой интерес к приобретению практических знаний. Из математических наук они занимались арифметикой, алгеброй и тригонометрией. Чтобы овладеть математической культурой, они переводят на арабский язык книги греческих астрономов и математиков; делают переводы и с индусского языка. В области тригонометрии они прежде всего овладели теми знаниями, которыми располагали индусы. Индусская таблица синусов была переведена на арабский язык во второй половине VIII века.

Наиболее древним арабским трактатом по тригонометрии является трактат Аль Баттани¹. В этом трактате Аль Баттани, как и индусы, пользуется не хордами, а полухордами, или синусами. Он начинает вводить алгебраические формулы. Аль Баттани впервые вводит котангенс. Для точного определения времени в то время употреблялись солнечные часы с гномоном. Расчёты, связанные с гномоном и его тенью, и вызвали появление котангенса. Если φ обозначает угол высоты солнца, h — высоту гномона, a — длину его горизонтальной тени (черт. 1), то из прямоугольного треугольника получаем:



Черт. 1.

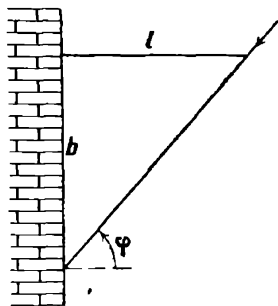
$$a = h \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Аль Баттани даёт φ значения $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots$, принимает $h = 12$ и составляет таблицу для вычисления a . Таким образом, здесь имеет место первый подход к котангенсу и дается первая таблица котангенсов.

В X веке Абуль Вафа делает новые шаги в развитии тригонометрии. Он даёт способ построения таблиц синусов с промежутком в полградуса и с точностью до девятого десятичного знака и вводит тангенс и котангенс. Он также работал над гномоном и его тенью; но он вычислял длину тени, отбрасываемую *горизонтальным* гномоном на *вертикальную* плоскость (черт. 2). Если l — длина гномона, b — длина его тени, φ — высота солнца над горизонтом, то из прямоугольного треугольника имеем:

$$b = l \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Длину l он принял равной 60. Таким образом, были составлены таблицы тангенсов.



Черт. 2.

Абуль Вафа даёт следующее определение тангенсу, который у него фигурирует под названием „*umbga*“ (что означает „*тень*“). *Umbga* дуги есть прямой линейный отрезок, проведенный из конца дуги параллельно синусу, в интервале между этим концом и прямой, идущей из центра круга к другому концу той же дуги. Таким образом *umbga* равна половине касательной двойной дуги,

¹ Аль Баттани родился около 850 года. Он хорошо знал греческую астрономию и по справедливости считается самым знаменитым астрономом IX века. Аль Баттани уделял внимание математике, в частности тригонометрии, необходимой для астрономических занятий.

заключенной между двумя прямыми, проведенными из центра круга к тому и другому концу двойной дуги. Абуль Вафа вводит не только umbra (тангенс), но и umbra recta (котангенс) и diameter umbrae (секанс). Он указывает те соотношения, которые существуют между тригонометрическими функциями одной и той же дуги. Однако, большие достижения Абуль Вафа в развитии тригонометрии не были использованы последующими учеными и не имели влияния на развитие тригонометрии. Позднее вновь пришлось изобретать тангенс. Отметим, что около 1000 года у арабов встречается общая формулировка теоремы синусов как для плоских, так и для сферических треугольников.

В истории тригонометрии арабского периода надо отметить еще Гебера, жившего во второй половине XI века в Испании. Он написал трактат по астрономии, первая книга которого посвящена тригонометрии. У Гебера тригонометрия впервые выступает как самостоятельная дисциплина. Гебер дает доказательства теорем, которые излагает; он вводит новые приемы в доказательстве теорем по сферической тригонометрии.

В Персии значительные успехи в области тригонометрии сделал Насир Эддин (1201—1274).

Как и Гебер, он разрабатывал тригонометрию как самостоятельную дисциплину. Насир Эддин пользовался теоремой синусов в решении косоугольных треугольников; но он не знал теоремы косинусов и для решения треугольника иногда разбивал его на два прямоугольных треугольника.

Подводя итоги развитию тригонометрии у арабов, отметим следующее: во-первых, они ввели новые тригонометрические функции — тангенс и котангенс — и составили для них таблицы; во-вторых, нашли способы составлять таблицы, значительно более точные, чем те, которые были до них; в-третьих, у них тригонометрия начинает приобретать самостоятельный характер; в-четвертых, они первые пользуются формулами, содержащими тригонометрические величины.

5. В дальнейшем развитие тригонометрии переходит в Европу. В первой половине XIV века впервые в Европе в тригонометрических вычислениях появляются тангенс и котангенс под названиями umbra recta и umbra versa ; в это же время составляются таблицы синусов. К концу средних веков разработка проблем тригонометрии значительно вырастает. Георг Пейрбах (1423—1461), профессор Венского университета, вводит тригонометрию арабов и составляет новые обширные таблицы синусов. Его ученик Иоганн Мюллер¹, известный под названием Региомонтана (1436—1476), делает значительные шаги вперед в развитии тригонометрии.

Труды Региомонтана по тригонометрии имеют очень большое

¹ Иоганн Мюллер родился в Кенигсберге, во Франконии. Он учился в Венском университете у Пейрбаха, жил в Италии, Германии, Венгрии. По универсальности знаний, по числу своих работ Мюллер-Региомонтан может считаться не только восстановителем наук в Европе, но и талантливым продолжателем их развития.

значение: он оформил тригонометрию как научную дисциплину и дал ей такое содержание, которое в главных чертах сохранилось до нашего времени. Региомонтан провел большую работу по составлению тригонометрических таблиц. Он первый составил таблицы синусов, пользуясь десятичной системой; таблицы были составлены через минуту; радиус принимался равным 10^7 , что соответствует точности наших семизначных таблиц. Региомонтан составил таблицу тангенсов через градус. Как плоскую, так и сферическую тригонометрию Региомонтан обогатил новыми открытиями. В частности, формула

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

для решения треугольника по двум сторонам и углу между ними была найдена Региомонтаном и носит его имя. Региомонтан систематизирует задачи на решение треугольников. Тригонометрия была им изложена в труде „Пять книг о разного рода треугольниках“, который был закончен около 1464 года. Однако эта работа не была опубликована при его жизни; она вышла в свет лишь в 1533 году и только с этого времени начала оказывать большое влияние на развитие тригонометрии.

Остается отметить еще только немногие факты. Гениальный астроном Николай Коперник (1473—1543) также занимался тригонометрией; он составил таблицу секансов. Величайший французский алгебраист Виета (1540—1603) систематически применял буквенную символику к тригонометрии; он создал тригонометрию, дал тригонометрическое решение уравнения третьей степени. Но Виета еще не обладал современными удобными обозначениями тригонометрических функций. Создатель логарифмов шотландец Непер (1550—1617) дал таблицу логарифмов синусов первого квадранта через каждую минуту. Другой творец логарифмов Бригг (1556—1630) составил логарифмы значений тригонометрических функций при основании 10.

6. Следует упомянуть о происхождении современных названий тригонометрических функций и их обозначений.

Профессор Кэджори в книге „История элементарной математики“ так объясняет происхождение названия „sinus“, которое известно на Западе с XII века.

„Полная хорда AB называлась у браминов джйа, или джива; эти слова означали также тетиву охотничьего лука. Для AC , или половины хорды, они употребляли слова джйардха, или ардхаджйа; для краткости пользовались также названиями полной хорды. Интересно проследить историю этих слов. В арабской транскрипции джива писалась джиба. Вместо этого слова арабы стали употреблять слово джайб, писавшееся почти так же и означавшее „пазуха“. Это слово, в свою очередь, было переведено на латинский язык словом „sinus“.

Термин „cosinus“ введен около 1600 года Гентером как сокращенное название „complementi sinus“, или „co sinus“, что значит „дополнительный синус“, или синус дополнительной дуги. Этот термин вошел в употребление с XVII века. Термин „tangens“ означает „касательная“, а „secans“ — „секущая“. Эти термины введены Финком в XVI веке, а в общее употребление вошли в XVII веке; в том же веке вводятся термины „cotangens“ и „cosecans“.

Тригонометрия — составное греческое слово: „τρίγωνον“ (треугольник) и „μετρέω“ (измерять); как видно, оно обозначает „измерение треугольника“. Первым употребил это название немецкий математик Питиск в сочинении „Тригонометрия, или измерение треугольников“ в 1600 году. Заметим, что эта книга является, по мнению, первым учебником по тригонометрии.

Замечательно плодотворная мысль ввести символы $\sin$, $\cos$, $\tan$ и т. д. как знаки трансцендентных операций над переменными величинами принадлежит Иоанну Бернулли (1667—1748). Уже в 1694 году Бернулли пользуется сокращенным обозначением синуса; но символы Бернулли еще не были похожи на современные символы тригонометрии. Введение символов позволило петербургскому академику Фридриху Христиану Майеру в 1727 году положить основания аналитической тригонометрии, позволяющей включить тригонометрические функции вместе с другими элементарными функциями в общую систему математического анализа. Однако успехи Майера в этом направлении являются только началом преобразования тригонометрии в аналитическую форму. Закончил это дело знаменитый математик Леонард Эйлер (1707—1783)¹. Эйлер окончательно закрепил ту символику, которой пользуются в тригонометрии в наши дни; он же первый составил полную аналитическую теорию тригонометрических функций.

Заканчивая краткий исторический очерк развития тригонометрии, отметим, что эта дисциплина, рожденная из потребностей астрономии и геодезии, долгое время являлась вспомогательной главой астрономии. Систематически развитое изложение тригонометрии было дано довольно поздно — во второй половине XI века, а на язык математических символов в их современном виде тригонометрия переведена только в XVIII веке. Такое позднее оформление тригонометрии как особой геометрической дисциплины привело к тому, что она поздно стала включаться в программу школ (в начале XIX века).

Глава II.

ТРИГОНОМЕТРИЯ КАК НАУЧНАЯ ДИСЦИПЛИНА И КАК ШКОЛЬНЫЙ ПРЕДМЕТ.

7. Каждый учебный предмет определяется развитием и современным состоянием соответствующей научной дисциплины.

¹ Эйлер родился в Базеле и работал в качестве академика в Петербурге и Берлине. Он сделал громадные вклады во многие отрасли математики.

В соответствии с этим встают следующие вопросы о тригонометрии¹: что такое тригонометрия как научная дисциплина? каковы характерные признаки, выделяющие ее из ряда других математических дисциплин? Эти вопросы представляют существенный интерес, так как они определяют положение тригонометрии в курсе средней школы, от них в известной степени зависят построение программы и характер изложения предмета. Эти вопросы не имеют единодушных ответов в методической литературе. Можно констатировать весьма различные взгляды на тригонометрию как научную дисциплину.

В методической литературе встречается взгляд, что тригонометрии как особой научной дисциплины не существует. Представителем этого взгляда является Дж. В. А. Юнг. В книге „Как преподавать математику?“ он пишет: „Тригонометрию обыкновенно рассматривают и преподают как отдельный предмет, но если бы мы попробовали отыскать ей одной присущие характерные черты, то нам не удалось бы отыскать ясно очерченной центральной идеи, которая могла бы придать предмету его индивидуальность. Арифметика имеет дело с понятием числа, алгебра — с обобщенным понятием числа, геометрия — с понятием пространства и относящимися к этой области проблемами...“ „Какова же соответственная определенная характеристика тригонометрии? Будет ли такой характерной идеей изучение тригонометрических отношений, т. е. отношений между сторонами прямоугольного треугольника? Но ведь это — глава геометрии; на них лежит печать геометрии, и ничто не может препятствовать отнесению их к курсу геометрии. Быть может, это будет решение треугольников, как это показывает само наименование предмета? Но ведь решение треугольников есть не что иное, как продолжение и приращение учения о тригонометрических отношениях и, таким образом, оно также относится к области геометрии. Будут ли это преобразование формул и решение уравнений, содержащих тригонометрические отношения? Но ведь это — вопросы характера существенно алгебраического...“².

И далее Юнг утверждает, что даже прямой и естественной связи между частями материала, изучаемого под названием „тригонометрия“, не существует, что тригонометрия распадается на ряд отдельных частей, связь между которыми незначительна, что таких отдельных частей можно насчитать восемь.

Существенно отличного взгляда держатся те, которые определяют тригонометрию как учение об особых функциях, называемых тригонометрическими (тригонометрическими), выделяя таким образом тригонометрию в особую научную дисциплину. Весьма широкое и разнообразное использование тригонометри-

¹ Во избежание недоразумений оговоримся, что в дальнейшем будем говорить о плоской, или прямоугольной, тригонометрии, не затрагивая сферической тригонометрии. Но ради краткости будем употреблять термин „тригонометрия“, отбрасывая слово „плоская“.

² Дж. В. А. Юнг, Как преподавать математику, перевод с английского, 1923 г., стр. 214.