Ф. Клейн

Неевклидова геометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ф11

Ф. Клейн

Ф11 Неевклидова геометрия / Ф. Клейн – М.: Книга по Требованию, 2024. – 358 с.

ISBN 978-5-458-25351-2

Книга известного немецкого математика Ф. Клейна (1849-1925). Подробно изложены основы проективной геометрии и теория проективных преобразований, необходимые для понимания дальнейших разделов книги. Далее показано, каким образом в проективную геометрию могут быть внесены понятия евклидовой геометрии; описываются соотношения, связывающие эллиптическую и гиперболическую геометрии с евклидовой геометрией; изучаются свойства неевклидовых геометрий.

ISBN 978-5-458-25351-2

ПРЕДИСЛОВИЕ К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Когда Феликс Клейн задумал опубликовать важнейшие из своих автографированных лекций, он решил начать с неевклидовой геометрии и с помощью молодого геометра д-ра Роземана предварительно подвергнуть старый текст основательной переработке в целом и в деталях. Эта работа оказалась много продолжительней, чем ожидалось сначала. Самому Клейну уже не довелось дожить до ее окончания. Правда, он в ежедневных, более года продолжавшихся совещаниях со своим молодым сотрудником продумал, пересмотрел и привел в порядок весь материал вплоть до мельчайших подробностей; но самую разработку текста он должен был предоставить д-ру Роземану. К моменту смерти Клейна первые главы книги были уже в гранках; все же потребовалась многолетняя и самоотверженная работа со стороны д-ра Роземана для того, чтобы на основе первоначальной программы подготовить к печати рукопись и провести ее через печать. Поэтому в этой книге участие и заслуги, а также и ответственность д-ра Роземана должны оцениваться гораздо выше, чем это обычно делается по отношению к сотрудникам.

Наряду с д-ром Зейфартом, который с тонким пониманием прочитал рукопись и корректуру, надлежит принести особую благодарность проф. Гопфу за окончательную отделку книги; он не только помогал своими критическими замечаниями при просмотре значительной части рукописи и корректур, но даже взял на себя окончательную разработку некоторых важных отделов, близких к области его работы. Далее, проф. Салковский любезно согласился прочитать большую часть последней корректуры. Наконец, нельзя не поблагодарить издательство, терпение и предупредительность которого существенно помогли преодолеть все возникавшие трудности.

Издатель.

Геттинген, октябрь 1927 г.

Из первоначальных автографированных лекций (появившихся в 1892 г. в обработке Шиллинга и в 1893 г. в почти неизмененном виде вторым изданием) опущены многие параграфы. Но зато здесь прибавлено „Введение в основы проективной геометрии“ (гл. I и II). Далее и в остальной части книги пришлось ввести много нового материала в связи с новейшим развитием математики, так что лекции получили совсем новый вид.

Обе первые главы изложены весьма подробно для того, чтобы облегчить понимание дальнейших отделов книги; читатель, уже знакомый с проективной геометрией, может начинать чтение прямо с § 6 второй главы. Глава III дает теорию проективних преобразований, оставляющих инвариантным некоторый образ второй степени, теорию, которая необходима для понимания неевклидовых движений и может быть пропущена начинающим при первом чтении. Читатель, который хочет изучать неевклидову геометрию в объеме, выходящем за пределы этой книги, найдет исчерпывающие литературные указания в книге Зоммервиля „Bibliography of non-euclidean geometry, including the theorie of parallels, the foundation of geometry and space of n dimensions“, London 1911. Далее укажем еще на книгу Клейна „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ [1]), Берлин 1927, в качестве дополнения к историческим замечаниям, встречающимся во многих местах в этих лекциях.

Ради наглядности в книгу введено много чертежей. Черт. 31 и 236 заимствованы из „Теории функций“ Гурвица-Куранта, черт. 62—64 из „Теории автоморфных функций“ Фрике-Клейна.

В. Роземан.

Ганновер, октябрь 1927 г.

---

[1]) Русский перевод этой книги выходит из печати в 1936 г. в издании ОНТИ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТРЕТЬЯ ЧАСТЬ

ОТНОШЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ К ДРУГИМ ОБЛАСТЯМ

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

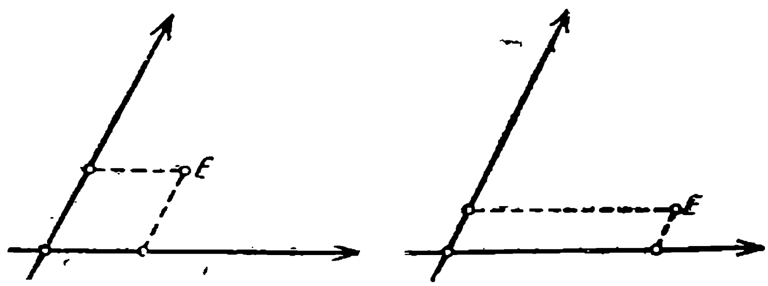
ВВЕДЕНИЕ В ПРОЕКТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

Глава I

ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Аффинные, однородные и проективные координаты

А. Аффинные координаты. При изложении геометрических соотношений мы будем пользоваться аффинными, однородными и проективными координатами. Простейшую координатную систему на прямой линии мы получим, если будем определять точку посредством ее положительного или отрицательного расстояния x от начала координат; при этом мы устанавливаем единицу расстояния посредством точки с координатой 1. На плоскости и в пространстве мы будем пользоваться декартовыми координатами, оси которых могут образовывать между собой произвольные углы, и будем определять точку посредством значений координат соответственно x, y или x, y, z.



Черт. 1.

Мы получим непосредственное обобщение этого определения, если единицы расстояния на осях координат возьмем произвольными (черт. 1, справа); следовательно, они не будут уже конгруэнтными, как на черт. 1, слева. Однозначно установить это новое координатоопределение мы можем тем, что выберем произвольную точку на прямой, на плоскости или в пространстве в качестве *единичной точки* и припишем ей соответственно координаты $x=1$, $x=y=1$ или $x=y=z=1$. Эта точка определяет тогда, например в случае плоскости, с помощью двух параллелей к осям единичные отрезки и одновременно положительные направления на координатных осях. Мы будем называть эти координаты *аффинными параллельными координатами* [1]). Они были введены в геометрию Декартом (Descartes, 1596—1650) и Ферма (Fermat, 1608—1665) [2]) и получили в XVIII столетии всеобщее распространение в особенности благодаря работам Эйлера (Euler, 1707—1783).

B. Однородные координаты. В геометрии выяснилась на практике полезность введения *бесконечно удаленных или несобственных элементов*. Именно, мы приписываем всякой паре параллельных прямых (как на плоскости, так и в пространстве) бесконечно удаленную (несобственную) точку пересечения. В этой фразе не содержится никакого утверждения; мы вводим только новый оборот речи, позволяющий значительно упростить многие предложения, потому что теперь, например, на плоскости нам уже не приходится делать различия между пересекающимися и не пересекающимися между собой прямыми, так как на основании нашего условия *всякая пара прямых на плоскости имеет* (собственную или несобственную) *точку пересечения.*

Несобственные геометрические образы не могут быть заданы с помощью аффинных координат. Поэтому мы введем новое координатоопределение, положив прежде всего для случая прямой линии аффинную координату:

$$x=\frac{x_1}{x_2},$$

так что всякой определенной точке соответствует уже не одна, а две координаты x_1 и x_2. При этом всякой точке соответствует бесчисленное множество систем значений, которые все могут быть представлены в виде $(\rho x_1, \rho x_2)$, где ρ обозначает произвольную не равную нулю постоянную. Мы устанавливаем, что x_1 и x_2 принимают все конечные значения за единственным исключением системы значений $x_1=0$, $x_2=0$; всякой дозволенной системе значений соответствует тогда определенная точка x прямой, которая, в частности для значений $x_1=\varkappa$, $x_2=0$, является несобственной точкой. Таким образом введенные координаты называются *однородными координатами.* В то время как аффинные координаты охватывают только собственные точки, однородные координаты доставляют также и бесконечно удаленную точку. Следовательно, при пользовании однородными координатами область собственных точек расширяется путем присоединения бесконечно удаленной точки. Мы будем называть прямую *аффинной прямой*, если мы ограничиваемся рассмотрением ее собственных точек, в то время как прямую, расширенную присое-

[1]) Слово „аффинный“ было введено впервые Эйлером, а затем вновь Мебиусом. Ср. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Лозанна 1748, т. II, гл. XVIII, разд. 442. Далее, Moebius, Der barycentrische Calcul, Лейпциг 1827, стр. X и 195.

[2]) Ср. E. Müller, Die verschiedenen Koordinatensysteme, Enzyklopädie d. math. Wiss., т. III, AB 7, стр. 609.

динением бесконечно удаленной точки, *будем называть проективной прямой.*

На плоскости положение вещей совершенно аналогичное. Положим именно:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Всякой системе значений $(x_1 : x_2 : x_3)$ за единственным исключением системы $(0:0:0)$ соответствует однозначно некоторая точка плоскости; в частности при $x_3 = 0$ мы получаем несобственные точки. Обратно, всякая точка доставляет бесчисленное множество систем значений, которые все могут быть представлены в виде $(\rho x_1 : \rho x_2 : \rho x_3)$. Совершенно так же, как и в случае прямой линии, мы назовем плоскость *аффинной плоскостью,* если мы ограничиваемся рассмотрением лишь собственных точек, а после ее расширения путем присоединения бесконечно удаленных точек — *проективной плоскостью.*

Аналогичным образом мы получаем однородные координаты пространства, полагая:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Также и здесь мы будем различать *аффинное* и *проективное пространства.*

Наглядным рассмотрением проективных образов мы займемся в следующих параграфах.

При пользовании однородными координатами *уравнения прямых и плоскостей* получают особенно простой вид. Уравнением прямой на плоскости в аффинных координатах является уравнение:

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = 0 \quad (u_1 \text{ или } u_2 \neq 0).$$

При пользовании однородными координатами оно принимает однородный вид:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = \sum_1^3 u_\lambda x_\lambda = 0.$$

В частности уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + u_3 x_3 = 0$ $(u_3 \neq 0)$ удовлетворяется координатами всех бесконечно удаленных точек; следовательно, уравнение $u_3 x_3 = 0$ или, проще, $x_3 = 0$ представляет собою уравнение бесконечно удаленных точек. Так как это — уравнение линейное, то целесообразно *совокупность всех бесконечно удаленных точек плоскости считать прямой линией.* Легко видеть, что тогда не только *всякая пара прямых определяет однозначно точку их пересечения,* но также и *всякая пара точек однозначно определяет соединяющую их прямую.* Так как при пользовании однородными координатами уравнение $x_3 = 0$ также имеет определенный смысл, то нужно лишь требовать, чтобы в уравнении $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ все u_i одновременно не равнялись нулю. Совершенно так же обстоит дело для плоскости в пространстве.

В заключение этих рассуждений мы приведем некоторые элементарные формулы, которые выявляют соотношения между аффинным и однородным способами записи. При этом мы будем писать приводимые формулы слева в аффинных, а справа в однородных координатах. На плоскости уравнением прямой, проходящей через две данные точки y_1, y_2 и z_1, z_2 (аффинные координаты) или соответственно $y_1:y_2:y_3$ и $z_1:z_2:z_3$ (однородные координаты), является следующее уравнение в текущих координатах x_1, x_2 или соответственно $x_1:x_2:x_3$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Потому что, во-первых, эти уравнения, будучи линейными относительно переменных x_1, x_2 или $x_1:x_2:x_3$, изображают прямую; во-вторых, координаты обеих данных точек удовлетворяют уравнению, так как при подстановке этих координат две строчки в определителе совпадают. Аналогичным образом получаем, что в пространстве уравнение плоскости, проходящей через три данные точки y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 и t_1, t_2, t_3 или соответственно $y_1:y_2:y_3:y_4$, $z_1:z_2:z_3:z_4$ и $t_1:t_2:t_3:t_4$, будет:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0.$$

При пользовании однородными координатами прямая на плоскости, проходящая через две данные точки $y_1:y_2:y_3$ и $z_1:z_2:z_3$, может быть изображена также в следующей параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1, \\ \rho x_2 &= \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2, \\ \rho x_3 &= \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \rho x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

λ_1 и λ_2 обозначают здесь два параметра, которые принимают всевозможные действительные значения за единственным исключением системы $0:0$. Всякому отношению $\lambda_1:\lambda_2$ соответствует некоторая определенная точка $x_1:x_2:x_3$; совокупность всех таких точек образует прямую линию. Доказательство этого получается