

С.П. Тимошенко

**Теория колебаний в
инженерном деле**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
С11

С11 **С.П. Тимошенко**
Теория колебаний в инженерном деле / С.П. Тимошенко – М.: Книга по Тре-
бованию, 2021. – 344 с.

ISBN 978-5-458-58017-5

ISBN 978-5-458-58017-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ.

С увеличением размеров современных машин и их скоростей разрешение задач колебаний получает все более и более существенное значение при проектировании в инженерном деле. Хорошо известно, что такие задачи огромного практического значения, — как, например, уравнивание машин, колебания кручения валов и зубчатых передач, колебания лопаток и дисков турбины, скручивание вращающихся валов, колебания рельсового пути и мостов под действием подвижных нагрузок, колебания фундаментов, — могут быть вполне разрешены только на основании теории колебаний. Только при помощи этой теории можно найти наиболее благоприятные пропорции в проекте, которые отодвинут условия работы машины сколь возможно далеко от критических условий, при которых могут возникнуть опасные колебания.

В этой книге изложены основы теории колебаний, причем их применение к решению технических задач пояснено различными примерами, взятыми во многих случаях из действительных наблюдений над колебаниями машин и конструкций в работе. При составлении книги автор использовал лекции по колебаниям, читанные им в 1925 г. инженерам-механикам фирмы Вестингауз, (Westinghouse Electric and Manufacturing Company), а также некоторые главы своей ранее опубликованной книги по теории упругости ¹⁾.

Содержание книги в общем следующее:

Первая глава посвящена рассмотрению гармонических колебаний систем с одной степенью свободы. В ней изложена общая теория свободного и вынужденного колебания и показано применение этой теории к уравниванию машин и к приборам, записывающим колебания. Далее в ней рассмотрен приближенный способ Рейлея для исследования колебаний более сложных систем и его применение к определению критических скоростей вращающихся валов переменного сечения

¹⁾ Теория упругости, том II, 1916, Петроград.

Вторая глава содержит теорию негармонического колебания систем с одной степенью свободы. В ней рассмотрены приближенные способы исследования свободных и вынужденных колебаний. Детально изложен частный случай, когда гибкость системы переменна по времени. Результаты этой теории применены к определению колебаний электровозов с боковыми спарниками.

В третьей главе рассмотрены системы нескольких степеней свободы. Изложена общая теория колебаний таких систем, а также ее приложение к решению таких инженерных задач, как: колебание экипажей, колебание кручения валов, критические скорости валов на нескольких опорах и поглотители колебаний — амортизаторы.

Четвертая глава содержит теорию колебаний упругих тел. Рассмотрены задачи: продольного скручивающего и бокового колебаний призматических стержней, колебания стержней переменного поперечного сечения, колебаний мостов, лопаток турбины и корпуса судна, теории колебания круговых колец, мембраны, пластинок и дисков турбины.

Краткое описание наиболее существенных приборов для записи колебаний, которые применяются при опытном исследовании колебаний, дано в приложении.

С. Тимошенко.

Анн Арбор, Мичиган
22 мая 1928 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.

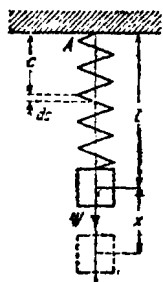
1. Свободные гармонические колебания. — Если упругая система, как-то нагруженная балка, скрученный вал или деформированная рессора, будет выведена из положения равновесия ударом или внезапным приложением добавочной силы, силы упругости системы в новом положении не будут уже уравниваться нагрузкой и возникнут колебания. Вообще упругая система может давать колебания разных типов, например, струна или балка во время колебания может принимать различные формы, зависящие от числа точек перегиба, подразделяющих длину элемента. В простейших случаях форма колебания системы может быть определена одной только величиной. Такие системы называются *системами с одной степенью свободы*.

Рассмотрим простейший случай, изображенный на фиг. 1. Если устройство таково, что возможны только вертикальные перемещения груза W , и если масса пружины будет мала сравнительно с величиной груза W , то система может быть рассматриваема, как имеющая *одну степень свободы*. Деформация может быть определена вполне вертикальным перемещением груза.

При ударе или внезапном приложении и удалении внешней силы возникнут колебания. Такие колебания, которые вызываются только упругой силой пружины, называются *свободными* или *собственными* колебаниями. Аналитическое выражение этих колебаний может быть найдено из дифференциального уравнения движения, которое всегда может быть написано, если известны силы, действующие на движущееся тело.

Пусть k обозначает груз, необходимый для того, чтобы вызвать растяжение пружины на единицу длины; тогда статическая деформация пружины под действием груза W будет

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}.$$



Фиг. 1.

Обозначая вертикальное перемещение груза от его положения равновесия через x и считая это перемещение положительным при направлении вниз, получим выражение для растягивающей силы в пружине, отвечающее любому положению груза:

$$F = W + kx. \quad [0]$$

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение движения, применим принцип д'Аламбера. На основании этого принципа уравнение движения может быть получено тем же способом, как и уравнение статики. Необходимо только, кроме внешних и упругих сил, принять во внимание силы инерции. В настоящем случае сила инерции определяется выражением $-Wx''/g$, в котором x'' — вторая производная перемещения x по времени t — представляет ускорение движущегося груза W , а g — ускорение силы тяжести. Прибавляя силу инерции к грузу W и приравнявая сумму силе F в пружине, имеем:

$$W - \frac{Wx''}{g} = W + kx, \quad [1]$$

откуда

$$x'' + p^2 x = 0, \quad [2]$$

где

$$p^2 = \frac{kg}{W} = \frac{g}{\delta_{st}}. \quad [3]$$

Уравнение [2] будет удовлетворено, если мы положим $x = A \cos pt$, или $x = B \sin pt$, где A и B — произвольные постоянные.

Сложив эти корни, получим общее решение уравнения [2]:

$$x = A \cos pt + B \sin pt. \quad [4]$$

Из этого видно, что вертикальное движение груза W имеет колебательный характер. Период этого колебания

$$\tau = \frac{2\pi}{p}$$

и частота

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi}.$$

Подставляя вместо p его выражение [3], имеем

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \quad [5]$$

т. е. период колебаний груза W , подвешенного на пружине, такой же, как математического маятника, длина которого равна δ_{st} . Ампли-

туда колебаний [4], т. е. наибольшее отклонение груза от положения равновесия остается постоянным, так как A и B постоянны. Колебательное движение, представленное уравнением [4], называется *гармоническим движением*.

Для определения произвольных постоянных A и B должны быть рассмотрены начальные условия. Положим, например, что в начальный момент ($t=0$) груз W сместился на x_0 от положения равновесия и что его начальная скорость x_0' . Подставляя $t=0$ в уравнение [4], получаем

$$x_0 = A. \quad [a]$$

Взяв теперь производную ур-ия [4] по времени и подставляя в эту производную $t=0$, имеем

$$\frac{x_0'}{p} = B. \quad [b]$$

Подставляя значения произвольных постоянных [a] и [b], получим следующее выражение колебательного движения груза W :

$$x = x_0 \cos pt + \frac{x_0'}{p} \sin pt. \quad [6]$$

Из этого видно, что в общем случае колебания состоят из двух частей: колебаний, пропорциональных $\cos pt$ и зависящих от начального смещения системы, и других, пропорциональных $\sin pt$ и зависящих от начальной скорости x_0' . Такое движение, выражаемое ур-ием [6], может быть всегда представлено как простое синусоидальное движение. Пусть

$$x_0 = M \sin \alpha, \quad [c]$$

$$\frac{x_0'}{p} = M \cos \alpha, \quad [d]$$

где M и α постоянные, подлежащие определению.

Подставляя в ур-ие [6], имеем

$$x = M \sin(pt + \alpha). \quad [7]$$

Амплитуда M этого колебания и угол α , фаза колебания, могут быть легко найдены из ур-ий [c] и [d]. Возведя в квадрат и сложив оба ур-ия, получим

$$M^2 = x_0^2 + \frac{(x_0')^2}{p^2}$$

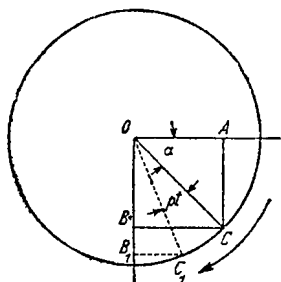
или

$$M = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0')^2}{p^2}} \quad [8]$$

Разделив $[c]$ на $[a]$, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 p}{x_0'} \quad [9]$$

Амплитуда M и угол α могут быть получены также графически, как показано на фиг. 2. Взяв $OA = x_0'/p$ и $OB = x_0$, имеем из прямоугольного треугольника OAC :



Фиг. 2.

$$\overline{OC} = \sqrt{x_0'^2 + \frac{(x_0')^2}{p^2}} = M;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{x_0 p}{x_0'}.$$

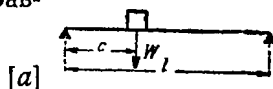
Вообразим теперь, что радиус OC движется с постоянной угловой скоростью p по часовой стрелке; тогда в промежуток времени t точка C перейдет в C_1 , и вертикальная проекция $\overline{OB}_1$ радиуса $\overline{OC}_1$, равная $M \sin(pt + \alpha)$, представит вертикальное перемещение x (см. ур-е [7]) груза W при колебании.

Из этого видно, что собственное колебание системы, изображенной на фиг. 1, может быть всегда представлено как простое гармоническое колебание, *период* которого (см. ур-е [5]) зависит от δ_{st} , т. е. от жесткости пружины и веса груза. Амплитуда и фаза зависят от начального перемещения и начальной скорости груза.

2. Примеры. — Следующие примеры служат для освещения различных пунктов предыдущей теории и показывают, как может быть исчислен в разных случаях период собственных колебаний системы.

а. Колебание груза W на балке (фиг. 3). — Пренебрегая весом балки и применяя простую теорию изгиба, получим статический прогиб балки непосредственно под грузом равным

$$\delta_{st} = \frac{Wc^2(l-c)^2}{3EI}.$$



[a]

Фиг. 3.

Этот прогиб прямо пропорционален грузу, и балка поэтому может быть рассматриваема, как пружина, *жесткость* которой определяется величиной

$$k = \frac{3EI}{c^2(l-c)^2},$$

представляющей груз, необходимый, чтобы вызвать прогиб балки,

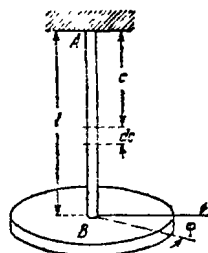
равный единице. Подставляя $\delta_{ст}$ полученное выше (см. ур-ие [а]), в ур-ие [5], легко можем вычислить период собственного колебания груза на балке. Величина периода, полученного таким способом, будет немного меньше, чем действительный период, в силу того, что весом самой балки мы пренебрегли. Более детальное рассмотрение этого случая колебания будет дано в п° 14.

б. Колебания кручения. — Если диск сопряжен со стержнем, как показано на фиг. 4, и к нему в его плоскости приложена и внезапно удалена пара сил, то возникнет свободное колебание кручения стержня вместе с диском. Пусть φ — угол скручивания стержня в любой момент колебания, k — скручивающий момент, необходимый, чтобы вызвать угол скручивания стержня, равный одному радиану.

В случае постоянного кругового поперечного сечения стержня диаметра d имеем

$$k = \frac{G}{l} \frac{\pi d^4}{32}.$$

Скручивающий момент в стержне в любое мгновение колебания будет $k\varphi$. Пренебрегая массой стержня и приравнявая скручивающий момент в стержне моменту сил инерции диска, получим следующее уравнение движения диска:



Фиг. 4.

$$I\varphi'' + k\varphi = 0 \quad [10]$$

в котором: I — момент инерции диска относительно оси AB стержня, перпендикулярной плоскости диска.

В случае кругового диска постоянной толщины

$$I = \frac{\pi D^4 h \gamma}{32g} = \frac{WD^2}{8g},$$

где h — толщина, D — диаметр диска, γ — вес единицы объема, W — вес диска.

Если вместо сплошного кругового диска взять колесо и если предположить его массу сосредоточенной на ободе, то:

$$I = \frac{WD^2}{4g}.$$

В общем случае диска переменной толщины h

$$I = \frac{2\pi}{g} \int_0^{1/2 D} h \gamma r^2 dr.$$

Деля уравнение [10] на I и полагая

$$p^2 = \frac{k}{I},$$

получим ур-е той же формы, что и ур-е [2], общее решение которого будет

$$\varphi = A \cos pt + B \sin pt. \quad [11]$$

Из этого видно, что период колебания кручения

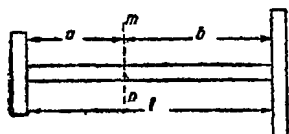
$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}. \quad [12]$$

В случае стержня постоянного кругового сечения

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{32Il}{G\pi d^4}}, \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32Il}}. \quad [13]$$

Это получено для того случая, когда стержень имеет постоянный диаметр d . Если стержень переменного диаметра в разных частях, то его легко привести к стержню постоянного диаметра. Необходимо только помнить, что угол скручивания стержня пропорционален четвертой степени диаметра. Поэтому без изменения угла скручивания часть стержня, длиной a_1 и диаметром d_1 , может быть заменена соответственной частью длиной a_2 и диаметром d_2 , при соблюдении условия

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4. \quad [14]$$



Фиг. 5.

Полученные результаты применимы также к валу с двумя вращающимися массами (фиг. 5). Подобное устройство имеет большое практическое значение в инженерном деле и встречается, например, в случае гребного вала¹⁾. Если массой вала можно пренебречь по сравнению с массой, приложенной на концах, то система, изображенная на фиг. 5, может быть рассматриваема как имеющая две степени свободы: (1) одна, обуславливаемая тем, что вал с дисками может вращаться на подшипниках как твердое тело, и (2) вторая, обуславливаемая тем, что вал может дать колебание кручения, при котором диски вращаются в напра-

¹⁾ Эта задача изучена впервые *H. Frahm*'ом; см. его *Neue Untersuchungen über dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen v. Schiffsmaschinen*, „V. D. I.“, 1902. Он показал опытным путем, что, при определенной скорости колебания вызывают очень большие величины напряжений в гребных валах.

влениях, противоположных друг другу. Предположим, например, что в начальный момент ($t=0$) на концы вала действуют две равные противоположные скручивающие пары и затем внезапно устраняются. Таким образом могут быть получены колебания кручения, и диски будут вращаться в противоположных один по отношению к другому направлениях, так что главный момент упругих сил системы относительно оси вала всегда будет равен нулю, как в начальный момент ($t=0$). Во время таких колебаний некоторое промежуточное сечение mn вала будет оставаться неподвижным. Это сечение называется *узловым сечением*, и его положение может быть найдено из условия, что части вала справа и слева (фиг. 5) имеют тот же период колебания. Применяя ур-ие [13] к каждой из двух частей вала, получаем:

$$\sqrt{I_1 a} = \sqrt{I_2 l}$$

или

$$\frac{a}{b} = \frac{I_2}{I_1}. \quad [a]$$

По фиг. 5 имеем:

$$a + b = l. \quad [b]$$

Тогда, из [a] и [b],

$$a = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2}, \quad b = \frac{I_1 l}{I_1 + I_2}.$$

Теперь из ур-ия [13] получим период и частоту колебаний кручения системы:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{32 I_1 I_2 l}{\pi G d^4 (I_1 + I_2)}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4 (I_1 + I_2)}{32 I_1 I_2 l}}. \quad [15]$$

Влияние массы вала на период колебания будет рассмотрено далее (см. п° 14).

3. Вынужденные колебания.— При рассмотрении колебаний системы, показанной на фиг. 1, были исследованы только *свободные колебания*. Теперь рассмотрим другой вид колебаний. Если принять, что кроме постоянной силы W на груз действует периодически переменная вертикальная *возмущающая сила* Q , то возникнут *вынужденные колебания* системы.

Соответствующее дифференциальное ур-ие движения получится добавлением в левую часть ур-ия [1] силы Q . Таким образом имеем:

$$\frac{W}{g} x'' + kx = Q \quad [16]$$

или, деля на $\frac{W}{g}$ и применив как прежде обозначение

$$p^2 = \frac{kg}{W},$$

получим следующее уравнение:

$$x'' + p^2 x = \frac{Qg}{W}. \quad [17]$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда возмущающая сила Q пропорциональна $\cos mt$. Период этой силы $\tau_1 = \frac{2\pi}{m}$ и частота $f_1 = \frac{m}{2\pi}$. При обозначении $\frac{Qg}{W} = q \cos mt$ ур-ие [17] для этого случая получается

$$x'' + p^2 x = q \cos mt. \quad [18]$$

Если изменения возмущающей силы очень медленны, т.е. m мало по сравнению с p , то можно пренебречь членом, содержащим ускорение в ур-ии [18], и мы получим статическую деформацию:

$$x_{st} = \frac{q \cos mt}{p^2}. \quad [a]$$

Для того чтобы получить динамическое перемещение, следует воспользоваться общим решением ур-ия [18]. Это решение получим, если решение [4] однородного ур-ия [2] сложим с частным решением ур-ия [18]. Приняв $C \cos mt$ за такое частное решение и подставив его в ур-ие [18], имеем

$$C = \frac{q}{p^2 - m^2};$$

а потому общее решение ур-ия [18] будет:

$$x = A \cos pt + B \sin pt + \frac{q}{p^2 - m^2} \cos mt. \quad [19]$$

В этом уравнении первые два члена правой части представляют свободные колебания системы, которые были рассмотрены ранее, тогда как последний член представляет *вынужденные колебания*. Эти последние имеют тот же период, что и возмущающая сила, а их амплитуда C зависит от частоты этой силы. Отношение этой амплитуды к статической деформации, определяемой ур-ием