**Зыков А.А.**

# Основы теории графов

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
З-96

**Зыков А.А.**
З-96 Основы теории графов / Зыков А.А. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 382 с.

**ISBN 978-5-458-33386-3**

Систематическое введение в теорию графов построенное в соответствии с внутренней логикой её развития. Основные положения доказываются и иногда иллюстрируются примерами прикладного характера. Многие результаты, не являющиеся необходимыми приводятся в виде упражнений и дополнений.Для студентов вузов по специальностям "Математика" и "Прикладная математика", а также для научных работников и инженеров.

**ISBN 978-5-458-33386-3**

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория графов – важный раздел современной математики как с точки зрения внутренних стимулов ее развития, так и для разнообразных и многочисленных приложений. Практическая роль графов особенно возросла за последнее время в связи с проектированием различных АСУ и вычислительных устройств дискретного действия. В теоретическом же плане помимо давнишних связей с комбинаторной топологией и геометрией наметились существенные сдвиги на стыке теории графов с алгеброй, математической логикой, лингвистикой, теорией игр и общей теорией систем.

Во многих университетах и других учебных заведениях читаются лекции по теории графов либо в виде отдельного курса, либо как часть более общего. Кроме того, графы часто приходится самостоятельно изучать инженерам, физикам, химикам, биологам, экономистам, социологам и др., сталкивающимся с ними в процессе своей деятельности. Однако задачу достаточно полного, систематического и в то же время доступного освещения современной теории графов в отечественной литературе пока нельзя считать удовлетворительно решенной, а совершенно необходимое учебно-справочное пособие отсутствует совсем. Предлагаемая книга имеет целью восполнить этот пробел в элементарной части, составляющей фактический материал теории графов и не опирающейся существенным образом на другие разделы математики (за исключением линейной алгебры и элементов топологии в гл. 3); для более глубокого изучения современной теории графов она может служить лишь необходимым введением.

Что же такое граф? Начнем не с формального определения, а с поясняющего примера.

На рис. 0.1 изображен граф, вершинами которого служат нумерованные кружки, а ребрами – линии (со стрелками или без), соединяющие некоторые из этих кружков. Ребро $a$ *ориентированное* (направленное): оно соединяет вершину ① с вершиной ②, но не соединяет ② с ① (и вообще не соединяет никакую другую пару вершин); к такому типу ребер, называемых *дугами*, относятся также $e, f, g$. Ребро $h$ *неориентированное* (ненаправленное): оно одновременно соединяет как вершину ① с вершиной ④, так и ④ с ①; к ребрам этого типа, называемым еще *звеньями*, относятся также $i$ и $j$. Наконец, каждое из ребер $b, c, d, k$ является *петлёй* – соединяет некоторую вершину с ней же; вводить ориентацию такого ребра мы не будем.

О ребрах $a, b, e, f, g, h$ говорят, что они *инцидентны* вершине ①, а о вершине ① – что она *инцидентна* каждому из этих ребер; в отношении дуг можно еще уточнить: дуги $a$, $e$ и $f$ *исходят* из вершины ①, а дуга $g$

*заходит* в нее. Вершины ③ и ⑤ – *изолированные*: ни одно ребро не соединяет такую вершину с другой или другую с ней; вершину ③ можно еще назвать *голой*, желая подчеркнуть, что при ней нет даже петель (в отличие от вершины ⑤, инцидентной петле $k$).

Рассмотренный граф является *конечным*: множество {①,②,③,④, ⑤} его вершин и множество { $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ } его ребер оба конечны. Бесконечные графы в книге будут встречаться лишь эпизодически; сейчас приведем три примера.

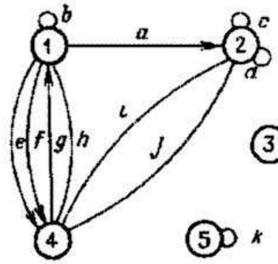


Рис. 0.1

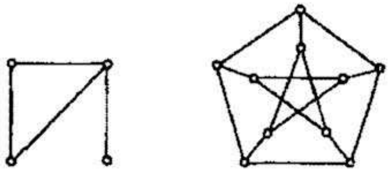

Рис. 0.2

1. Вершинами графа служат натуральные числа, причем вершины $p$ и $q$ соединены звеном в том и только том случае, если оба числа $p$ и $q$ простые и $|p - q| = 2$. Множество вершин этого графа счетно, а является ли множество ребер счетным или только конечным – неизвестно до сих пор (проблема близнецов в теории чисел).

2. Вершинами являются числа 1, 2, ..., $n$, а каждое действительное число $x$, удовлетворяющее условию $i < x < i + 1$, служит дугой из вершины $i$ в вершину $i + 1$. Граф содержит конечное множество вершин и континуум ребер (дуг).

3. Вершинами служат все действительные числа, и при фиксированном $\delta > 0$ вершины $x$ и $y$ соединены ребром (звеном или петлей) тогда и только тогда, когда $|x - y| < \delta$. Каждому значению $\delta$ отвечает свой граф, у которого множества вершин и ребер оба континуальны.

Особо важную роль играют так называемые *обыкновенные* графы. Граф этого класса характеризуется следующими четырьмя свойствами:

1) он конечен,

2) он является неориентированным, т. е. не содержит дуг,

3) он не содержит петель,

4) он не содержит "параллельных" ("кратных") ребер, таких, как например, $i$ и $j$ на рис. 0.1, иначе говоря, никакие две его вершины не могут соединяться более чем одним ребром (звеном). Примеры обыкновенных графов приведены на рис. 0.2; заметим, что у правого из них, известного как *граф Петерсена*, те точки пересечения линий (ребер), которые не представлены кружками, не являются вершинами графа и возникли лишь из-за "неудачного" изображения его в виде плоского чертежа. Заметим также, что здесь фактически приведены не два, а три примера: весь чертеж тоже можно считать изображением одного графа (несвязного, состоящего из двух компонент).

Остановимся на некоторых особенностях книги

В 60-х годах был задуман объемистый двухтомный труд "Теория конечных графов", к концу 1969 г первый том увидел свет, а второй пребывал в стадии незаконченной рукописи Дальнейший ход событий привел к выводу о нецелесообразности издания второго тома и переиздания первого в прежнем объеме ввиду их перегруженности второстепенным материалом и отягощенности излишним стремлением к детализации даже в заведомо очевидных случаях К числу недостатков изданной книги следует отнести и отсутствие упражнений.

Новая книга включает в переработанном виде важнейший материал обоих томов и ряд дальнейших результатов. Многие доказательства удалось значительно упростить Чтобы краткость и доступность сочетались с полнотой, мы отобрали для основного текста необходимый минимум, поместив остальное в упражнения и дополнения, да и в основном тексте простые и естественные этапы доказательств или построения примеров нередко предоставляются читателю Поэтому помимо справочных функций книга может служить учебным пособием по элементарной теории графов — разумеется, при наличии у читателя достаточно серьезных намерений Она может составить основу ряда кратких, но насыщенных спецкурсов, а также давать богатый материал для учебно-исследовательской работы студентов По замыслу она должна быть пригодна и для самостоятельного изучения

Таким образом, упражнениям в книге отводится особая роль часть из них используется в дальнейшем, а многие содержат результаты, не вошедшие в основной текст. Степень сложности задач никак не отмечается (в наиболее трудных случаях даны указания), и читателю рекомендуется пробовать силы на всех упражнениях в конце каждого параграфа, тем более что непредвзятое отношение к результату другого автора нередко приводит к более простому (по сравнению с оригиналом) воспроизведению этого результата В то же время неполный успех в упражнениях не служит препятствием для перехода к следующему параграфу, и лишь при наличии в дальнейшем ссылки на то или иное упражнение к нему необходимо вернуться

Вперемежку с упражнениями, как правило, даются дополнения к основному тексту, их формулировка уже не содержит непосредственных "заданий", ибо таковые оказались бы гораздо сложнее "упражнений", и целесообразность попыток повторить эти результаты без обращения к оригиналу весьма спорна Однако дополнительные сведения могут стимулировать дальнейшие исследования

Мы почти не даем описаний алгоритмов поскольку в этих вопросах можем ссылаться на отечественные [1–4] и переводные [5 12] книги

1 П С Солтан, Д К Замбицкий, К Ф Присакару, Экстремальные задачи на графах и алгоритмы их решения — Кишинев Штиинца, 1973

2 Г.М.Адельсон Вельский, Е А Диниц, А В Карзанов, Потоковые алгоритмы — М Наука, 1975.

3 Г С Плесневич, М С Сапаров, Алгоритмы в теории графов — Ашхабад Ылым, 1981

4 Д К Замбицкий, Д Д Лозовану, Алгоритмы решения оптимизационных задач на сетях — Кишинев: Штиинца 1983

5 Л Р Форд, Д Р Фалкерсон, Потоки в сетях М Мир, 1966

6 Р Дж Басакер, Т Л Саати, Конечные графы и сети — М.: Мир, 1974

7 Т Ху, Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М Мир, 1974

8 Н Кристофидес, Теория графов Алгоритмический подход. – М. Мир, 1978

9 А Ахо, Дж Хопкрофт, Дж Ульман, Построение и анализ вычислительных алгоритмов – М · Мир, 1979

10 Э Рейнгольд, Ю Нивергельт, Н.Део, Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика – М Мир, 1980.

11 Э Майника, Алгоритмы оптимизации на сетях и графах - М Мир, 1981

12 М Свами, К Тхуласираман, Графы, сети и алгоритмы – М Мир, 1984

Что же касается модной сейчас теории полиномиальной разрешимости и сводимости переборных задач, то, отдавая должное ее достижениям (в том числе выделению и изучению классов NP-полных и NP-трудных задач*)), мы в то же время никак не можем считать, что наличие полиномиальной верхней оценки числа шагов уже делает алгоритм практически эффективным, а принципиальная возможность полиномиального сведе́ния позволяет фактически заменить решение одной переборной задачи решением другой или хотя бы проясняет теоретическую взаимосвязь обеих задач; поэтому в книге приводятся лишь отдельные конструкции, дающие непосредственное сведе́ние и открывающие дальнейшие возможности теоретических исследований (наиболее яркий пример – конструкция Визинга в § 1 5).

Еще одна особенность книги Мы принципиально не согласны с распространенной точкой зрения, будто всякое оперирование с тем или иным математическим понятием возможно лишь после полного формального его определения (или строгого аксиоматического введения), такой взгляд вынуждает многих авторов нагнетать в начале книги массу определений, угнетая тем самым читателя Фактически же чисто описательного ознакомления с новым понятием и объяснения его на примере (а иногда и одного лишь образного наименования) в очень многих случаях достаточно для того, чтобы четко идентифицировать это понятие в сознании и безошибочно решать относящиеся к нему несложные задачи. Пользуясь этим, мы иногда оперируем с новым понятием, откладывая его формальное определение до того момента, когда оно станет действительно необходимым Так, при рассмотрении примера графов рис 0 2 употреблены термины "несвязный граф" и "компонента", которые будут определены лишь впоследствии, однако читатель, не зараженный микробом формализма, сможет уже сейчас правильно ответить на вопрос является ли граф рис 0 3 связным и если нет, то из каких компонент он состоит? В то же время мы решительно отвергаем другую крайность, характерную для "чересчур практически" настроенных деятелей будто строгих определений графа, связности и других основных понятий можно вообще не давать

Отдельно списка литературы ко всей книге нет, ссылки (в подавляющем большинстве одноразовые) даются непосредственно в тексте на первоисточник и на реферативный журнал "Математика"; [75, 1В529] (иногда под-

---

*) См например М Гэри Д Джонсон Вычислительные машины и труднорешаемые задачи – М.: Мир 1982

робнее РЖМ–75 1В529) означает реферат 1В529 в § 1 журнала за 1975 г (Для работ депонированных или напечатанных в малодоступных изданиях ссылка дается только на РЖМ ). Русская транскрипция иностранных фамилий фигурирует лишь в "классический" случаях теорема Ментера, граф

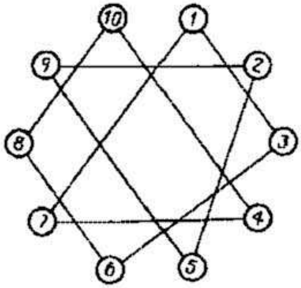


Рис 0 3

Турана, дихромат Татта и т.п. Наиболее часто упоминаемые книги по теории графов расшифровываются следующим образом

"Книга Кёнига" – D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen Leipzig, Akad. Verlag M B H , 1936, New York, Chelsea, 1950

"Первая книга Бержа" – К Берж, Теория графов и ее применения. – М ИЛ, 1962 (перевод с фр. C Berge, Théorie des graphes et ses applications Paris, Dunod, 1958)

"Книга Оре" – О Оре, Теория графов – М Наука, 1968, 1980 (перевод с англ O Ore Theory of graphs Amer Math Soc Colloq Publ , Volume XXXVIII, 1962)

"Книга Зыкова" – А А Зыков, Теория конечных графов I – Новосибирск Наука, 1969

"Книга Харари" – Ф Харари, Теория графов. – М Мир, 1973 (перевод с англ F Harary, Graph Theory Addison–Wesley Publ Co , 1969)

"Книга Закса" – H Sachs Einführung in die Theorie der endlichen Graphen Leipzig, BSB B G Teubner Verlagesgesellschaft, 1970 (Teil I), 1972 (Teil II) [73, 8В331К, 332К]

"Вторая книга Бержа" – C Berge, Graphes et hypergraphes Paris, Dunod, 1970, Graphs and Hypergraphs North Holland Publ Co , 1973 [75, 2В484]

Названия часто цитируемых журналов и сборников следующим образом сокращены

УМН – Успехи математических наук,

ДАН – Доклады Академии наук;

D M – Discrete Mathematics (не путать с Discr. Appl. Math ),

J C Th. – Journal of Combinatorial Theory (В35 означает Series B, Volume 35);

J Gr Th – Journal of Graph Theory (место хранения ГПНТБ),

Т гр – сб "Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники Теория графов" – Ереван изд-во АН АрмССР, 1979,

ГГиДОЗ – сб "Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи" (Мат исследования, вып 66) – Кишинев Штиинца, 1982

Нумерация параграфов книги двойная: § 2.3 означает третий параграф второй главы. Все теоремы (включая леммы) имеют тройной номер: "Теорема 3.8.3" означает третью теорему § 3.8, а следующая за ней лемма имеет номер 3.8.4. По тому же принципу (который не соблюден лишь во введении, добавлении, заключении и указателе-справочнике) нумеруются и рисунки. Однако следствия в общую нумерацию не включены, и ссылки на них выглядят так: "следствие 2 теоремы 4.5.10".

Переходя к списку употребляемых понятий и обозначений общего характера, заметим, что все они трактуются здесь чисто содержательно, безотносительно к выбору систем аксиом.

| | |
|---|---|
| $x \in A$ | – "элемент $x$ принадлежит множеству $A$", |
| $x \notin A$ | "элемент $x$ не принадлежит множеству $A$", |
| $A \subseteq B$ | – "$A$ есть подмножество множества $B$", |
| $A \subset B$ | "$A \subseteq B$ и $A \neq B$" (строгое подмножество), |
| $2^A$ | множество всех подмножеств (булеан) множества $A$ |
| $\phi$ | – пустое множество, |
| $\lvert A \rvert$ | – количество элементов (мощность) множества $A$, |
| $A \cup B$ | – объединение множеств $A$ и $B$; |
| $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ | – объединение *) множеств $A_i$, где $i$ пробегает индексное множество $I$, |
| $A \cap B$ | – пересечение множеств $A$ и $B$, |
| $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ | пересечение *) множеств $A_i$, где $i$ пробегает индексное множество $I$, |
| $A \setminus B$ | – разность множеств $A$ и $B$ (не обязательно $B \subseteq A$), |
| $\bar{\mathrm{A}}$, $\neg \mathrm{A}$ | "не А", логическое отрицание высказывания А, |
| $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ | – "А и В", конъюнкция высказываний А и В, |
| $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ | – "А или В", дизъюнкция высказываний А и В (неразделительная, т.е. допускающая одновременную истинность), |
| $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ | "если А, то В", логическая импликация, |
| $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ | "А равнозначно В", логическая эквивалентность, |
| $\forall x \in A\ \mathrm{A}(x)$ | "для любого элемента $x$ из множества $A$ истинно высказывание $\mathrm{A}(x)$ об этом элементе" |
| $\exists x \in A\ \mathrm{A}(x)$ | – "в множестве $A$ имеется хотя бы один такой элемент $x$, о котором истинно высказывание $\mathrm{A}(x)$". |
| $\forall X \subseteq A\ \mathrm{A}(X)$ | – "для каждого подмножества $X$ множества $A$ истинно высказывание $\mathrm{A}(X)$ об этом подмножестве"; |

---

*) При $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ используются также обозначения $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$

$\exists X \subseteq A\, \mathrm{A}(X)$ — "по крайней мере для одного подмножества $X \subseteq A$ истинно высказывание $\mathrm{A}(X)$";

$Q(x)$ — "элемент $x$ обладает свойством $Q$", одноместный предикат, унарное отношение,

$R(x, y)$ — "элемент $x$ находится в отношении $R$ к элементу $y$", двуместный предикат, бинарное отношение,

$P(x, u, y)$ — "упорядоченная тройка элементов $x, u, y$ находится в отношении $P$", трехместный предикат тернарное отношение,

$\{x / \mathrm{A}(x)\}$ — множество всех тех элементов $x$, для которых истинно высказывание $\mathrm{A}(x)$,

$\doteq$ — "равно по определению" (например, $x^2 \doteq x\, x$),

$\{x \in A / \mathrm{A}(x)\} \doteq \{x / x \in A \wedge \mathrm{A}(x)\}$,

$\Longleftrightarrow$ — "равнозначно по определению",

$\overrightarrow{xy}$ — упорядоченная пара элементов $x, y$,

$\widetilde{xy}$ — неупорядоченная пара элементов $x, y$,

$A \times B \doteq \{\overrightarrow{xy} / x \in A \wedge y \in B\}$ — декартово произведение множества $A$ на множество $B$,

$\vec{A}^2 = A^2 \doteq A \times A$ — (множество упорядоченных пар элементов $A$),

$\vec{A}^{[2]} \doteq \{\overrightarrow{xy} / x, y \in A \wedge x \neq y\}$ — (множество упорядоченных пар различных элементов $A$),

$\tilde{A}^2 \doteq \{\widetilde{xy} / x, y \in A\}$ — (множество неупорядоченных пар элементов $A$),

$\tilde{A}^{[2]} \doteq \{\widetilde{xy} / x, y \in A \wedge x \neq y\}$ — (множество неупорядоченных пар различных элементов $A$),

$r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — $n$-мерный вектор, упорядоченная система $n$ чисел,

равенство $r = r'$, где $r' = (r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n'})$, означает, что $n = n'$ и $r_i = r'_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, вектор размерность которого $n$ не предполагается заранее известной, называют еще *кортежем*,

$\|a_{ij}\|_m^n$ — матрица с $n$ строками и $m$ столбцами,

$[x]$ — наибольшее целое число не превосходящее $x$

$\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее $x$

Отдельные отступления от этих обозначений (как и от других принятых выше соглашений) всегда оговариваются. Остальные обозначения вводятся в ходе изложения с использованием в случае надобности знаков $\doteq$ и $\Longleftrightarrow$. Определяемые термины напечатаны курсивом.

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ

## § 1.1. Обыкновенные графы

Для обыкновенного графа и связанных с ним понятий нам сразу же понадобятся точные определения, что же касается графов более общего вида, которые будут иногда встречаться в примерах, то здесь для понимания сути дела пока вполне достаточно описания, данного во введении. Заметим предварительно, что граф мы рассматриваем как чисто комбинаторный объект, а не как, скажем, электрическую схему или даже геометрическую фигуру — последняя используется лишь для его наглядного изображения. Процесс математической абстракции безжалостно отбрасывает такие свойства "конкретных графов", как природа вершин, материал, из которого изготовлены ребра, длины ребер, расположение вершин и ребер на чертеже и т.д. Разумеется, сами "конкретные графы" (транспортная сеть, электрическая цепь, структурная формула химического соединения и т.п.) тоже допускают строго математическое изучение, но в нашем смысле они являются уже не графами, а функциями, определенными на элементах того или иного графа, чтобы успешно работать с такими функциями, надо прежде всего знать сами графы.

В случае обыкновенного графа нет надобности причислять к его элементам ребра, ибо их роль здесь сводится лишь к указанию, какие пары различных вершин соединены, а какие нет; поэтому для задания такого графа на данном множестве вершин $X$ достаточно указать разбиение множества пар $\widetilde{X}^{[2]}$ на два класса "ребер" и "не ребер".

*Обыкновенным графом* $L = (X, U)$ называется упорядоченная пара множеств конечного непустого множества $X$, элементы которого называются *вершинами* графа $L$, и произвольного подмножества $U \subseteq \widetilde{X}^{[2]}$, элементы которого называются *ребрами* этого графа *). Вершины $x, y \in X$ *смежны*, если $\widetilde{xy} \in U$, и *несмежны*, если $\widetilde{xy} \notin U$. Ребро $\widetilde{xy} \in U$ *соединяет* вершины $x$ и $y$ (или, что то же самое, $y$ и $x$), а также *инцидентно* каждой из этих вершин (и наоборот, обе вершины инцидентны этому ребру); ребро можно обозначать и одной буквой ($u$, $v$, $w$ и т.п.), если не требуется указывать, какие именно вершины оно соединяет.

Из определения обыкновенного графа автоматически следуют те четыре свойства, которыми он был охарактеризован во введении

1) конечность множества вершин $X$ влечет конечность множества $\widetilde{X}^{[2]}$, а значит, и любого его подмножества $U$, точнее, если $n(L) = |X|$ — число

*) Вместо $L$ весьма употребительно обозначение графа буквой $G$.

вершин, а $m(L) \doteq |U|$ — число ребер графа $L = (X, U)$, то всегда

$$0 \leqslant m(L) \leqslant \binom{n(L)}{2},$$

2) неориентированность графа $L$ обусловлена тем, что в качестве ребер фигурируют только неупорядоченные пары вершин,

3) отсутствие у $L$ петель следует из того, что множество $\widetilde{X}^{[2]}$ по своему определению состоит только из пар различных вершин, поэтому пара вида $\widetilde{xx}$ не может принадлежать никакому его подмножеству $U$,

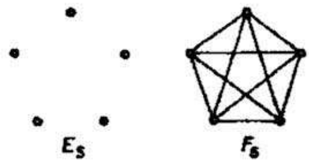


Рис 1 1 1

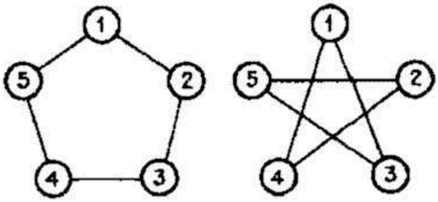

Рис 1 1 2

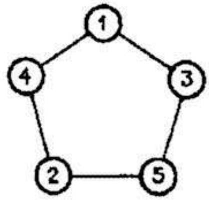

Рис 1 1 3

4) отсутствие кратных ребер у $L$ вытекает из самого смысла теоретико-множественных понятий в определении обыкновенного графа неупорядоченные пары $\widetilde{xv}$ и $\widetilde{zt}$ считаются одним и тем же элементом множества $\widetilde{X}^{[2]}$ в том и только том случае, если $x = z$ и $y = t$ или если $x = t$ и $y = z$; но тогда обе пары представляют собой один и тот же элемент множества $U$, т.е одно и то же ребро графа $L$, соединяющее его вершины $x$ и $y$

Особо отметим два крайних случая обыкновенных графов с $n$ вершинами *безреберный* граф $E_n$ с $U = \phi$ и *полный* граф $F_n$ с $U = \widetilde{X}^{[2]}$ (рис 1 1 1 при $n = 5$) *) Граф $\bar{L} = (X, \bar{U})$, *дополнительный* к графу $L = (X, U)$, имеет то же самое множество вершин (что уже отражено в обозначении последнего), а множество его ребер $\bar{U} \doteq \widetilde{X}^{[2]} \setminus U$ состоит из всех тех неупорядоченных пар различных вершин, которые не являются ребрами исходного графа $L$ Ясно, что $\bar{\bar{L}} = L$ Примеры взаимно дополнительных графов приведены на рис 1 1 1 и 1 1 2; заметим, что последний граф можно начертить на плоскости так, чтобы отрезки, изображающие ребра, не пересекались (рис 1 1 3)

*) Мы обозначаем эти графы через $E_n$ и $F_n$ независимо от природы элементов, служащих их вершинами

Пример графа на рис. 1.1.3 мы используем, чтобы еще раз пояснить определение обыкновенного графа: в данном случае $X = \{①, ②, ③, ④, ⑤\}$, $U = \{\widetilde{13}, \widetilde{35}, \widetilde{25}, \widetilde{24}, \widetilde{14}\}$ (все множество $\widetilde{X}^{[2]}$ состоит из десяти неупорядоченных пар). Вплоть до § 2.7 везде под словом "граф" будем, если не оговорено противное, понимать обыкновенный граф и его вершины для простоты записывать в тексте (а впоследствии, как правило, и на рисунках) без обведения кружком.

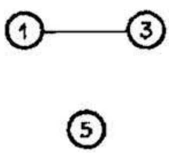

Рис. 1.1.4

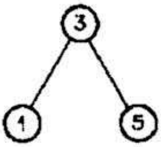

Рис. 1.1.5

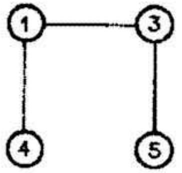

Рис. 1.1.6

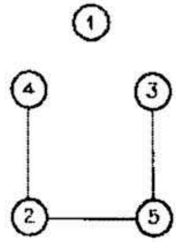

Рис. 1.1.7

Граф $L' = (X', U')$ называется *частью* графа $L = (X, U)$, если $X' \subseteq X$ и $U' \subseteq U$. Не всякая пара подмножеств $X' \neq \phi$ и $U'$ вершин и ребер графа $L$ определяет какой-то граф – для этого необходимо (и достаточно), чтобы у каждой пары $\widetilde{xy}$, принадлежащей $U'$, оба элемента $x$ и $y$ входили в $X'$: ведь ребрами графа могут служить лишь пары его вершин! Так, для графа рис. 1.1.3 пара подмножеств $X' = \{1, 3, 5\}$ и $U' = \{\widetilde{13}, \widetilde{14}\}$ не определяет никакой части; напротив, пара $X'' = \{1, 3, 5\}$, $U'' = \{\widetilde{13}\}$ задает часть $L'' = (X'', U'')$, изображенную на рис. 1.1.4.

Особо важную роль играют следующие два типа частей графа.

Часть $L' = (X', U')$ называется *подграфом* графа $L = (X, U)$, если $U' = \{\widetilde{xy} \in U / x, y \in X'\}$. Иными словами, при образовании подграфа $L'$ из графа $L$ удаляются все вершины множества $X \setminus X'$ и только те ребра, которые инцидентны хотя бы одной удаляемой вершине. Таким образом, подграф данного графа $L$ однозначно определяется заданием непустого подмножества вершин $X'$ или, что равносильно, заданием строгого подмножества $Y = X \setminus X' \subset X$ тех вершин, которые надо удалить; в последнем случае будем кратко писать $L' = L \setminus Y$, а если $Y = \{y\}$ (одновершинное множество), то даже $L' = L \setminus y$. В частности, при $X' = X$ имеем $L' = L \setminus \phi = L$. Например, для графа $L$ рис. 1.1.3 подмножество $X' = \{1, 3, 5\}$ определяет подграф $L' = (X', U') = L \setminus \{2, 4\}$ с $U' = \{\widetilde{13}, \widetilde{35}\}$, показанный на рис. 1.1.5, а подмножество $\{1, 3, 4, 5\}$ – граф $L \setminus 2$ рис. 1.1.6.

Часть $L' = (X', U')$ называется *суграфом* графа $L = (X, U)$, если $X' = X$, т.е. суграф получается из исходного графа удалением только ребер без удаления вершин. Так, из графа рис. 1.1.3 образуется суграф, показанный на рис. 1.1.7, если положить $U' = \{\widetilde{24}, \widetilde{25}, \widetilde{35}\}$. Как и при образовании