

Д. Бобылев

Гидростатика и теория упругости

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Д11

Д11 **Д. Бобылев**
Гидростатика и теория упругости / Д. Бобылев – М.: Книга по Требованию,
2013. – 185 с.

ISBN 978-5-458-57971-1

ISBN 978-5-458-57971-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

проекцій силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i со стороны всѣхъ атомовъ части Ex ; наконецъ, третій членъ (X_i) выражаетъ сумму проекцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на атомъ m_i извнѣ рассматриваемаго тѣла.

Представимъ себѣ далѣе, что съ дифференціальными уравненіями движенія атомовъ части Jn мы поступимъ такъ, какъ показано въ §§ 85-мъ и 93-мъ механики матеріальныхъ точекъ; тогда получимъ шесть дифференціальныхъ уравненій для части Jn : три дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи ея и три дифференціальныя уравненія моментовъ количествъ движенія всей этой части. Въ первыхъ трехъ уравненіяхъ взаимно сократятся проекціи каждой пары равныхъ и противоположныхъ взаимодействій между атомами части Jn , а въ остальныхъ трехъ — равные и противоположные моменты каждой такой пары, такъ что во всѣхъ шести уравненіяхъ не будетъ заключаться никакихъ внутреннихъ силъ части Jn матеріальнаго тѣла.

Эти шесть дифференціальныхъ уравненій будутъ таковы:

$$\sum_{Jn} m_i x_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i - x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} X_i \dots \dots \dots (1, a)$$

$$\sum_{Jn} m_i y_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i - y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Y_i \dots \dots \dots (1, b)$$

$$\sum_{Jn} m_i z_i'' = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(z_i - z_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} Z_i \dots \dots \dots (1, c)$$

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i y_k - y_i x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (y_i Z_i - z_i Y_i), \dots \dots (1, d)$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(x_i z_k - z_i x_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (z_i X_i - x_i Z_i), \dots \dots (1, e)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{Jn} m_i \sum_{Ex} \mu_k f_{ik}(r_{ik}) \frac{(y_i x_k - x_i y_k)}{r_{ik}} + \sum_{Jn} (x_i Y_i - y_i X_i), \dots \dots (1, f)$$

гдѣ L_x , L_y , и L_z суть моменты количествъ движенія части Jn вокругъ осей X -овъ, Y -овъ и Z -овъ.

Такія шесть дифференціальныхъ уравненій должны имѣть мѣсто, какъ для всего матеріальнаго тѣла, такъ и для всякой части его, большой или малой.

§ 3. Радіусъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ.

Произведеніе $m_i \mu_k f_{ik}(r_{ik})$, заключающееся въ предыдущихъ формулахъ, выражаетъ положительно-взятую величину отталкивающей силы или отрицательно-взятую величину притягательной силы, дѣйствующей между атомами m_i и μ_k .

Видъ функціи $f_{ik}(r_{ik})$ въ точности неизвѣстенъ; но для объясненія большей части извѣстныхъ намъ явленій физическаго міра, а въ особенности тѣхъ, которыя рассматриваются въ физикѣ частичныхъ силъ, намъ приходится сдѣлать слѣдующее предположеніе относительно характера этой функціи.

Предположение F относительно радиуса сферы действия частичных силъ.

Предполагается, что функция $f(r)$ состоит из суммы двухъ частей.

Первая часть есть Ньютонова сила тяготѣнія, обратно-пропорциональная квадрату разстоянія.

Вторая часть есть такая функция, которая имѣетъ замѣтную величину только при ничтожно-малыхъ разстояніяхъ между атомами, при разстояніяхъ же равныхъ или большихъ некоторой весьма малой величины ρ , функция эта равна нулю.

Означивъ эту вторую функцию черезъ $\phi(r)$, можемъ выразить приведенное предположеніе въ видѣ слѣдующей формулы:

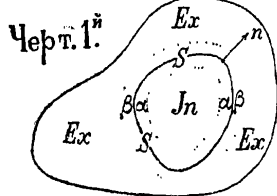
$$m\mu f(r) = -\epsilon \frac{m\mu}{r^2} + m\mu\phi(r).$$

Сила $m\mu\phi(r)$ извѣстна подъ именемъ *частичной силы*, а разстояніе ρ называется *радіусомъ сферы дѣйствія частичныхъ силъ*.

При такомъ предположеніи первые члены вторыхъ частей уравненій (1) раздѣлятся на двѣ части каждый; одна часть будетъ относиться къ частичнымъ силамъ, другая — къ силамъ тяготѣнія, дѣйствующимъ со стороны атомовъ μ на атомы m .

Обратимъ вниманіе на члены, зависящіе отъ частичныхъ силъ.

На основаніи вышеприведеннаго предположенія, эти члены будутъ заключать взаимодѣйствія только между такими парами атомовъ μ и m , разстоянія между которыми не болѣе ρ (радіуса сферы дѣйствія); всѣ такіе атомы μ части тѣла Ex находятся въ слоеъ толщины ρ , прилежащемъ къ поверхности S , отдѣляющей эту часть отъ части Jn ; всѣ же такіе атомы m части тѣла Jn находятся въ другомъ слоеъ такой же толщины, прилежащемъ къ той же поверхности S со стороны Jn ; на чертежѣ 1-мъ изображены оба эти



слоя, первый обозначенъ буквою β , второй — буквою α .

Такимъ образомъ оказывается, что частичныя силы, дѣйствующія со стороны части тѣла Ex на часть Jn , приложены къ атомамъ слоя α и исходятъ изъ атомовъ слоя β .

§ 4. Напряженіе (Stress).

Выдѣлимъ мысленно изъ поверхности S какой либо элементъ ΔS весьма малыхъ размѣровъ.

Представимъ себѣ всю совокупность тѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ атомамъ части слоя α , прилежащей къ элементу ΔS , направленія которыхъ пересѣкаютъ поверхность этого элемента.

Въ англійскомъ научномъ языкѣ существуетъ особый терминъ для наименованія этой совокупности силъ, а именно терминъ „Stress“, который мы переведемъ на русскій языкъ словомъ „напряженіе“; но намъ необходимо условиться относительно правильнаго употребленія этого термина.

Вышесказанную совокупность силъ мы будемъ называть *напряженіемъ, дѣйствующимъ сквозь площадку ΔS на часть тѣла Jn со стороны части Ex* ; слѣд-

ствіе равенства и противоположности взаимнодѣйствій между атомами, *напряженіе, дѣйствующее сквозь ту же площадку на часть тѣла Ех со стороны части тѣла Jn*, будетъ совокупностью силъ, равныхъ и противоположныхъ силамъ предыдущей совокупности.

Пусть *A* есть какаѣ либо точка поверхности *S*, находящаяся внутри площадки ΔS или на ея периметрѣ. Возстановимъ нормаль *n* изъ точки *A* къ поверхности *S* внаружу части *Jn*.

Составимъ сумму проэкцій на ось *X*-овъ всѣхъ силъ первой совокупности и раздѣлимъ эту сумму на величину площади элемента ΔS ; точно также поступимъ и съ суммами проэкцій этихъ силъ на двѣ другія оси; получимъ три отношенія:

$$\frac{\sum X}{\Delta S}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta S}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta S} \dots \dots \dots (2)$$

Величины этихъ отношеній могутъ измѣняться съ измѣненіемъ мѣста элемента на поверхности и съ измѣненіемъ размѣровъ его; при непрерывномъ уменьшеніи размѣровъ элемента, отношенія эти будутъ приближаться къ нѣкоторымъ предѣльнымъ значеніямъ, величины которыхъ могутъ зависѣть отъ того, къ какой точкѣ поверхности приближается постепенно суживающаяся периферія элемента.

Предположимъ, что, при уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS , мы суживаемъ его периферію такимъ образомъ, чтобы точка *A* всегда находилась внутри или на периферіи; пусть X_n , Y_n и Z_n суть предѣльные значенія, къ которымъ отношенія (2) приближаются при такомъ уменьшеніи размѣровъ элемента ΔS , т. е.:

$$\left. \begin{aligned} \text{предѣль } \left[\frac{\sum X}{\Delta S} \right]_{\Delta S=0} &= X_n, \\ \text{предѣль } \left[\frac{\sum Y}{\Delta S} \right]_{\Delta S=0} &= Y_n, \\ \text{предѣль } \left[\frac{\sum Z}{\Delta S} \right]_{\Delta S=0} &= Z_n. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Величину:

$$F_n = + \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2} \dots \dots \dots (4)$$

мы будемъ называть *величиною напряженія, дѣйствующаго на часть Jn въ точку A поверхности S*, а направленіе, проведенное изъ точки *A* и составляющее съ осями координатъ такіе углы, косинусы которыхъ равны отношеніямъ:

$$\frac{X_n}{F_n}, \quad \frac{Y_n}{F_n}, \quad \frac{Z_n}{F_n},$$

назовемъ *направленіемъ этого напряженія*.

Направленіе напряженія мы будемъ обозначать тѣмъ же знакомъ F_n , какимъ обозначаемъ величину его; поэтому можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\left. \begin{aligned} F_n \cos (F_n, X) &= X_n, \\ F_n \cos (F_n, Y) &= Y_n, \\ F_n \cos (F_n, Z) &= Z_n, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

выражающія, что X_n , Y_n , Z_n суть проекція напряженія F_n на оси координатъ, или составляющія его по этимъ осямъ.

§ 5. Выраженія проекцій на оси координатъ главнаго вектора и главнаго момента напряженій, дѣйствующихъ на часть тѣла.

Если точка приложенія какой либо силы будетъ перенесена на какую либо длину вдоль по ея направленію, то черезъ это не измѣнится ни моментъ ея вокругъ какой нибудь оси, ни моментъ ея вокругъ какого либо центра.

Поэтому, при составленіи уравненій (1) мы вправѣ предположить, что точка приложенія каждой частичной силы, дѣйствующей изъ атома μ части $E\alpha$ на атомъ m части J_n , перенесена изъ m , вдоль по направленію $m\mu$, въ точку пересѣченія длины $m\mu$ съ поверхностью S ; черезъ это величины проекцій главнаго вектора и главнаго момента частичныхъ силъ не измѣнятся, но измѣнится видъ выраженій этихъ величинъ, такъ какъ мѣстомъ приложенія частичныхъ силъ будетъ теперь считаться не слой α , а поверхность S .

Для того, чтобы составить новыя выраженія соответственныхъ членовъ уравненій (1), надо прежде всего представить себѣ, что вся поверхность S раздроблена на безчисленное множество элементовъ безконечно-малыхъ размѣровъ, затѣмъ надо составить выраженія проекцій на оси координатъ вектора и момента напряженій, приложенныхъ къ каждому элементу; эти выраженія будутъ заключать величины X_n , Y_n , Z_n . Составивъ надлежащія выраженія, останется только взять интегралы по всей поверхности.

Величины X_n , Y_n , Z_n , т. е. проекціи на оси координатъ напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ поверхности S , суть функціи координатъ точекъ поверхности, но функціи не сплошныя; онѣ могли бы быть сплошными, если бы вещество было сплошнымъ въ дѣйствительности, а не состояло бы изъ атомовъ, раздѣленныхъ промежутками, и если бы частичныя силы дѣйствовали между всѣми точками слоя β и всѣми точками слоя α , а не между изолированными точками-атомами этихъ слоевъ.

Однако во всѣхъ расчетахъ математической физики эти функціи предполагаются сплошными; на это предположеніе считаемъ нужнымъ обратить вниманіе.

Предположеніе G относительно сплошности функцій, выражающихъ проекціи напряженія на оси координатъ.

Проекціи X_n , Y_n , Z_n напряженій, дѣйствующихъ въ точкахъ поверхности S , предполагаются сплошными функціями координатъ.

При такомъ предположеніи, напряженія F_n въ двухъ безконечно-близкихъ точкахъ поверхности разнятся безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію; если бы они были вполне одинаковы во всѣхъ точкахъ элемента dS , то проекціи на оси координатъ вектора всѣхъ частичныхъ силъ, приложенныхъ къ этому элементу, были бы равны:

$$X_n dS, Y_n dS, Z_n dS,$$

а проекціи момента всѣхъ этихъ силъ были бы равны:

$$(y_n Z_n - z_n Y_n) dS, (z_n X_n - x_n Z_n) dS, (x_n Y_n - y_n X_n) dS,$$

гдѣ x_n , y_n , z_n суть координаты центра инерціи площади элемента dS .

Вообще же, на основаніи предыдущаго предположенія G , проеції на оси координатъ главнаго вектора напряженій, приложенныхъ къ точкамъ всей поверхности S , выразятся слѣдующими интегралами, взятыми по всей поверхности:

$$\iint X_n dS, \iint Y_n dS, \iint Z_n dS, \dots \dots \dots (6)$$

а проеції главнаго момента тѣхъ же напряженій выразятся интегралами:

$$\left. \begin{aligned} &\iint (y_s Z_n - z_s Y_n) dS, \quad \iint (z_s X_n - x_s Z_n) dS, \\ &\iint (x_s Y_n - y_s X_n) dS, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

гдѣ x_s, y_s, z_s суть координаты какой либо точки элемента, а X_n, Y_n, Z_n — проеції напряженія, дѣйствующаго въ этой точкѣ на часть тѣла J_n .

§ 6. Измѣренія напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ данной поверхности. Давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

Всякія силы, приложенныя сплошнымъ образомъ къ какой либо поверхности, разсчитываются такъ сказать на единицу поверхности, а именно, для каждой точки поверхности вычисляется не величина силы, но величина нѣкотораго отношенія силы къ площади.

Разсчетъ производится такимъ же образомъ, какъ показано въ § 4-мъ относительно опредѣленія величины и направленія напряженія F_n , дѣйствующаго въ какой либо точкѣ поверхности съ той стороны, куда возстановлено положительное направленіе нормали n , на часть тѣла J_n .

Изъ формулъ (2), (3) и (4) видно, что величина напряженія F_n имѣетъ измѣренія отношенія силы къ площади, такъ что:

$$\text{единица напряженія } F_n = \frac{\text{единицъ силы}}{(\text{единиц. длины})^2} \dots \dots \dots (8)$$

Чтобы составить себѣ понятіе о значеніи этой единицы, представимъ себѣ такой случай, что часть поверхности S имѣетъ видъ плоскости, что напряженія, дѣйствующія во всѣхъ точкахъ этой части поверхности, равны и параллельны между собою и что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ площади этой части поверхности, равенъ единицѣ силы; тогда величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой части поверхности, будетъ равна единицѣ напряженій.

Если же главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ каждой единицѣ выше-сказанной части поверхности, равенъ k единицамъ силы, а всѣ прочія обстоятельства будутъ тѣ же, то величина напряженія, дѣйствующаго въ каждой точкѣ этой поверхности, будетъ равна k единицамъ напряженій.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность S не плоская и напряженія въ точкахъ ея хотя и неодинаковы, но слѣдуютъ условію сплошности, знаніе величины и направ-

ленія напряженія F_n , дѣйствующаго въ какой либо точкѣ A этой поверхности, даетъ намъ возможность утверждать, что главный векторъ напряженій, приложенныхъ къ безконечно-малому элементу dS , заключающему въ себѣ точку A , имѣетъ величину, отличающуюся отъ $F_n dS$ безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ.

Всякое напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ поверхности, можетъ быть разложено на двѣ составляющія: одну по направленію нормали n , другую — въ касательной плоскости къ поверхности; первая составляющая называется *натяженіемъ*, если она направлена по положительной части нормали, и *давленіемъ* въ противоположномъ случаѣ; составляющая напряженія въ касательной плоскости называется *тангенціальнымъ напряженіемъ*.

Когда извѣстны X_n , Y_n , Z_n , то составляющая напряженія по нормали n выразится такъ:

$$F_n \cos (F_n, n) = X_n \cos (n, X) + Y_n \cos (n, Y) + Z_n \cos (n, Z); \dots (9)$$

это есть натяженіе, если направленіе F_n составляетъ острый уголъ съ положительнымъ направленіемъ нормали n ; если же уголъ (F_n, n) тупой, то формула (9) выражаетъ отрицательно-взятую величину давленія.

Надо имѣть въ виду, что къ наружной поверхности тѣла могутъ быть приложены *отпущенія* давленія, натяженія и тангенціальныя напряженія.

§ 7. Силы, приложенныя къ элементамъ объема сплошнаго дѣла.

Силы, приложенныя ко всѣмъ атомамъ тѣла и дѣйствующія извнѣ его, а также силы тяготѣнія, дѣйствующія между атомами его, мы будемъ называть *силами, приложенными къ элементамъ объема тѣла* или проще *объемными силами*.

Эти силы, приложенныя къ атомамъ сплошнаго тѣла, вводятся въ расчетъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ какую либо точку A тѣла и мысленно выдѣлимъ малый объемъ ΔO его, заключающій точку A внутри себя или на своей поверхности. Составимъ величины проекцій на оси координатъ главнаго вектора силъ, приложенныхъ ко всѣмъ атомамъ этого объема и раздѣлимъ эти величины на массу Δm объема ΔO ; получатся отношенія:

$$\frac{\sum X}{\Delta m}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta m}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta m},$$

величины которыхъ могутъ зависѣть отъ величины и вида выдѣленнаго объема ΔO тѣла. Представимъ себѣ, что мы выдѣляемъ все меньшіе и меньшіе объемы ΔO , заключающіе въ себѣ точку A ; по мѣрѣ приближенія величины объема къ нулю, величины вышесказанныхъ отношеній приближаются къ нѣкоторымъ предѣламъ, которые мы означимъ такъ: X_A , Y_A , Z_A ; слѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} X_A &= \text{предѣлу } \left[\frac{\sum X}{\Delta m} \right]_{\Delta O=0} \\ Y_A &= \text{предѣлу } \left[\frac{\sum Y}{\Delta m} \right]_{\Delta O=0} \\ Z_A &= \text{предѣлу } \left[\frac{\sum Z}{\Delta m} \right]_{\Delta O=0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Величину:

$$\mathfrak{F}_A = + \sqrt{\mathfrak{X}_A^2 + \mathfrak{Y}_A^2 + \mathfrak{Z}_A^2} \dots\dots\dots (11)$$

мы будем называть *величиною объемной силы въ точку А*. Направленіе $\mathfrak{F}_A$, определяемое косинусами:

$$\cos(\mathfrak{F}_A, X) = \frac{\mathfrak{X}_A}{\mathfrak{F}_A}, \cos(\mathfrak{F}_A, Y) = \frac{\mathfrak{Y}_A}{\mathfrak{F}_A}, \cos(\mathfrak{F}_A, Z) = \frac{\mathfrak{Z}_A}{\mathfrak{F}_A}, \dots\dots (12)$$

мы условимся называть *направленіемъ* этой силы; тогда предѣлы (10) получать значенія проецій этой силы на оси координатъ, или составляющихъ ея по этимъ осямъ.

$\mathfrak{X}_A, \mathfrak{Y}_A, \mathfrak{Z}_A$ суть функціи координатъ точки *А* и притомъ функціи не сплошныя, такъ какъ къ промежуткамъ между атомами силъ не приложено; но мы будемъ предполагать, что эти функціи неразрывны внутри всего объема занимаемаго тѣломъ, которое мы будемъ при этомъ считать сплошнымъ; такое предположеніе аналогично предположенію *G*, сдѣланному относительно силъ поверхностныхъ.

Предположеніе *H* относительно сплошности объемныхъ силъ. Проекціи $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ объемной силы, дѣйствующей въ точкахъ сплошнаго тѣла, предполагаются сплошными функціями координатъ этихъ точекъ.

При такомъ предположеніи объемныя силы $\mathfrak{F}$ въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла разнятся между собою безконечно-мало, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Величина $\mathfrak{F}$ имѣетъ измѣренія ускоренія, такъ какъ она равняется отношенію силы къ массѣ.

$$\text{Единица величинъ } \mathfrak{F} = \frac{\text{единиц. силы}}{\text{единиц. массы}} \dots\dots\dots (13)$$

Слѣдовательно, можно сказать, что величины и направленія $\mathfrak{F}$ представляютъ собою величины и направленія тѣхъ ускореній, которыя приняли бы точки свободнаго тѣла при дѣйствіи объемныхъ силъ, если бы не существовало ни частичныхъ силъ, ни вѣшнихъ напряженій.

Если бы величины и направленія $\mathfrak{F}$ были одинаковы во всѣхъ точкахъ тѣла, то объемныя силы были бы приложены къ нему однородно и тогда величины проецій силы; приложенной ко всему тѣлу, равнялись бы произведеніямъ $\mathfrak{X}M, \mathfrak{Y}M, \mathfrak{Z}M$, гдѣ *M* есть масса тѣла.

Къ числу такихъ однородныхъ силъ принадлежитъ сила тяжести; если ось *У*-овъ параллельна силы тяжести, то $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Z}$ во всякой точкѣ тѣла равна нулю, а

$$\mathfrak{Y} = \frac{g \Delta m}{\Delta m} = g$$

тоже во всякой точкѣ тѣла.

Такіе случаи однороднаго распредѣленія объемныхъ силъ встрѣчаются сравнительно рѣдко, большею частью величины и направленія $\mathfrak{F}$ неодинаковы даже въ малыхъ частяхъ тѣла.

Однако, по предполагаемой нами сплошности объемныхъ силъ, въ безконечно-близкихъ точкахъ тѣла величины и направленія $\mathfrak{F}$ разнятся между собою безконечно-

мало; следовательно, чѣмъ менѣе размѣры какого либо весьма малаго элемента тѣла, тѣмъ менѣе разнятся между собою ускоренія $\mathfrak{X}$ различныхъ точекъ его и тѣмъ распределение приложенной къ нему объемной силы однороднѣе.

По этимъ причинамъ проэкціи на оси координатъ объемпой силы, приложенной къ бесконечно-малому объемному элементу dO , выразятся такъ:

$$\mathfrak{X}\sigma dO + \alpha_1, \mathfrak{Y}\sigma dO + \alpha_2, \mathfrak{Z}\sigma dO + \alpha_3,$$

а проэкціи на оси координатъ момента этой силы — такъ:

$$(y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y})\sigma dO + \alpha_4, (z\mathfrak{X} - x\mathfrak{Z})\sigma dO + \alpha_5, \\ (x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X})\sigma dO + \alpha_6,$$

гдѣ x, y, z суть координаты какой либо точки внутри или на поверхности элемента dO , σ — плотность матеріи въ той же точкѣ, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ — проэкціи на оси координатъ объемной силы въ той же точкѣ; дополнительные члены $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ становятся бесконечно-малыми величинами четвертаго или высшаго порядка малости, когда элементы объема становятся бесконечно-малыми величинами третьяго порядка малости.

§ 8. Новый видъ уравненій (1) параграфа 2-го.

На основаніи всего вышесказаннаго въ §§ 3—7, суммы замѣняются интегралами, распространенными, одни — по объему части $\mathcal{J}_n$, другіе — по поверхности этой части.

Интегралы, распространенные по объему, можно раздѣлить на сумму двухъ частей: одна часть будетъ заключать подъ интегралами члены третьяго порядка малости, такіе какъ $\mathfrak{X}\sigma dO$, другая будетъ заключать дополнительные члены $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ четвертаго и высшаго порядка малости. При уменьшеніи размѣровъ элементовъ объема dO до бесконечной малости, суммы или интегралы, заключающіе $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$, будутъ бесконечно-малы сравнительно съ интегралами отъ членовъ $\mathfrak{X}\sigma dO$ и, въ предѣлѣ, если послѣдніе интегралы будутъ приближаться къ конечнымъ величинамъ, то интегралы отъ дополнительныхъ членовъ будутъ приближаться къ нулю.

По этимъ причинамъ уравненія (1) параграфа 2-го получаютъ слѣдующій видъ:

$$\iiint \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \mathfrak{X} \right) \sigma dO = \iint X_n dS, \dots \dots \dots (1, a, bis) \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \iint (y\mathfrak{Z} - z\mathfrak{Y}) \sigma dO = \iint (y, Z_n - z, Y_n) dS, \dots (1, d, bis) \\ x = \iint \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \sigma dO;$$

интегрированія распространены по объему и по поверхности части $\mathcal{J}_n$.

Здѣсь выписаны только два уравненія, первое и четвертое, легко по нимъ написать и четыре остальныхъ.

Такия уравненія должны имѣть мѣсто, какъ для всего тѣла, такъ и для каждой части его, большой или малой.

Эти уравненія примѣняются, или къ частямъ тѣла, имѣющимъ конечные размѣры, и тогда они берутся въ томъ видѣ, какъ они здѣсь написаны, или же къ ничтожно-малымъ элементамъ тѣла, къ такимъ элементамъ, размѣры которыхъ неограниченно приближаются къ нулю; но, въ примѣненіи къ такимъ элементамъ, изъ равенствъ (1) выводятся другія, такъ сказать, предѣльныя уравненія, поступаая слѣдующимъ образомъ:

Сначала составляютъ эти равенства для элемента объема, предполагая его размѣры не безконечно-малыми, но ничтожно-малыми, и, перенеся всѣ члены въ первыя части равенствъ, располагаютъ члены каждого уравненія по порядку ихъ малости, начиная съ членовъ низшаго порядка. Положимъ, что это суть члены втораго порядка малости. Затѣмъ дѣлать объ части каждого уравненія на величины, которыя, при уменьшеніи размѣровъ элемента и приближеніи ихъ къ нулю, становятся безконечно-малыми величинами втораго же порядка; послѣ этого низшіе члены въ составленныхъ уравненіяхъ станутъ нулевого порядка малости, т. е. конечными, тѣ члены, которые были 3-го порядка малости, станутъ теперь 1-го порядка малости, бывшіе 4-го — станутъ 2-го, и т. д. При приближеніи размѣровъ элемента къ нулю, низшіе члены будутъ приближаться къ конечнымъ предѣламъ, прочіе — къ нулю. Полученныя такимъ образомъ равенства и будутъ тѣ, объ которыхъ мы говоримъ теперь и которыя мы могли бы назвать предѣльными уравненіями для безконечно-малыхъ элементовъ деформируемаго тѣла.

§ 9. Примѣненіе уравненій (1) къ элементарному тетраэдру.

Подъ элементарнымъ тетраэдромъ подразумѣваемъ элементъ объема, ограниченный четырьмя гранями; три грани параллельны плоскостямъ координатъ, четвертая наклонена къ нимъ.

Пусть Δx , Δy , Δz суть длины взаимно-перпендикулярныхъ реберъ одного изъ подобныхъ тетраэдровъ, x , y , z — координаты точки M пересѣченія этихъ реберъ, λ , μ , ν — косинусы угловъ, составляемыхъ въѣшнейю нормалью n основанія ABC (черт. 2) тетраэдра съ осями координатъ.

Пусть K есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ M на грань ABC ; длину $\overline{MK}$ можно выразить тройкимъ образомъ:

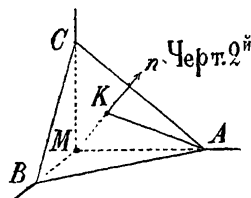
$$h = \overline{MK} = \lambda \Delta x = \mu \Delta y = \nu \Delta z,$$

такъ какъ она равняется проэкціи каждого изъ реберъ MA , MB и MC на направленіе n перпендикуляра MK .

Величина каждой изъ граней MBC , CMA и AMB равняется величинѣ проэкціи площади ABC на соответственную плоскость координатъ; означивъ величину площади ABC черезъ ω , выразимъ эти соотношенія такъ:

$$\frac{\Delta y \Delta z}{2} = \omega \lambda, \quad \frac{\Delta z \Delta x}{2} = \omega \mu, \quad \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \omega \nu.$$

Величина объема тетраэдра можетъ быть выражена одною шестю частью произведенія длинъ Δx , Δy , Δz , или одною третью произведенія $h\omega$.



Означимъ черезъ F_n напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ M на площадку, параллельную плоскости ABC и имѣющую вѣшнюю нормалью направленіе n ; X_n , Y_n , Z_n будутъ означать проэкціи этого напряженія на оси координатъ.

Напряженіе $F_n(K)$, дѣйствующее въ точкѣ K на единицу площади ABC , будетъ разниться отъ F_n , и по величинѣ, и по направленію, поэтому и проэкціи его $X_n(K)$, $Y_n(K)$, $Z_n(K)$ на оси координатъ будутъ разниться отъ соответственныхъ величинъ X_n , Y_n , Z_n для точки M . Но, по предположенію G параграфа 5-го, эти проэкціи суть сплошныя функціи координатъ, поэтому $X_n(K)$ можно выразить въ видѣ ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ разностей координатъ точекъ K и M , т. е. такъ:

$$X_n(K) = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial x}(x_k - x) + \frac{\partial X_n}{\partial y}(y_k - y) + \frac{\partial X_n}{\partial z}(z_k - z) + \dots,$$

гдѣ далѣе идутъ члены съ высшими степенями разностей координатъ; производнымъ отъ X_n по x , y , z должно дать тѣ значенія, какія онѣ имѣютъ для точки M .

Очевидно, что $(x_k - x)$ равно проэкціи длины MK на ось X -овъ, т. е.: $x_k - x = h\lambda$, и такимъ же образомъ: $y_k - y = h\mu$, $z_k - z = h\nu$.

Повтому $X_n(K)$ можно выразить такъ:

$$X_n(K) = X_n + h\beta_1 + \dots,$$

гдѣ β_1 есть величина конечная; члены, означенные точками, будутъ имѣть множителями вторыя и высшія степени отъ h .

Далѣе, означимъ черезъ X_x , Y_x , Z_x проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M на площадку, перпендикулярную къ оси X -овъ и имѣющую положительную нормаль параллельную положительной оси X -овъ; это суть проэкціи напряженія, дѣйствующаго со стороны той части тѣла, которая находится по правую сторону плоскости UZ или BMC , на часть тѣла, находящуюся влѣво отъ нея.

Такъ какъ молекулярныя силы подчиняются началу равенства и противоположности взаимно-дѣйствій, то напряженіе, дѣйствующее въ точкѣ M слѣва на право на плоскость UZ , имѣетъ проэкціями на оси координатъ величины:

$$-X_x, -Y_x, -Z_x.$$

Означимъ черезъ X_y , Y_y , Z_y проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M на площадку, перпендикулярную къ оси Y -овъ и имѣющую положительную нормалью направленіе параллельное положительной части этой оси; т. е., это суть проэкціи напряженія, дѣйствующаго со стороны той части тѣла, которая находится сзади плоскости ZX , на часть, находящуюся передъ этою плоскостью; наконецъ, означимъ черезъ X_z , Y_z , Z_z проэкціи напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ M на площадку перпендикулярную къ оси Z -овъ и имѣющую положительную нормалью положительную часть этой оси.

Составимъ теперь уравненіе (1, а) для одного этого элемента, предполагая его ничтожно-малымъ.