В.А. Крогиус

Прямолинейная тригонометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 001
ББК 72
В11

В.А. Крогиус
В11 Прямолинейная тригонометрия / В.А. Крогиус – М.: Книга по Требованию, 2021. – 124 с.

ISBN 978-5-458-56299-7

Предлагаемый курс тригонометрии разделяется на две части, при чем обе части самостоятельны и могут быть изучены отдельно.Первая часть, как и во многих учебниках тригонометрии, посвящена изучению тригонометрических функций острого угла и решению треугольников. Но, в отличие от других учебников, в ней для углов второй четверти введено только понятие о синусе и притом не обычным путем. Выводы первой части, может быть, кажутся нам более сложными, чем те аналитические выводы, к которым мы привыкли; но эти выводы имеют и преимущество: они носят более геометрический характер. Сведения, даваемые первой частью, удовлетворяют всем требованиям, которые обыкновенно предъявляются курсом физики средней школы и совершенно достаточны для техника-практика.Во второй части тригонометрические функции рассматриваются в общем виде, при чем они определены как отношения радиуса и его проекций на две взаимно-перпендикулярные оси. Такие определения, с одной стороны, являются естественным обобщением определений, данных в первой части. С другой стороны, они избавляют от необходимости вводить особые (довольно искусственные) тригонометрические линии. Знаки функций, определенных таким образом, совершенно естественно вытекают из соглашения относительно положительных и отрицательных направлений координатных осей и не требуют никаких дополнительных условий. Эти определения дают более естественное и более обоснованное приложение полученных результатов к вопросам аналитической геометрии и механики. Для строгого и обоснованного вывода теорем тригонометрии, при этом изложении, пришлось дополнительно ввести некоторые основные положения теории векторов. Соответственно этому выводы формул приведения, сложения и вычитания дуг изложены иначе, чем в большинстве учебников. Все доказательства справедливы для произвольных дуг и не требуют поэтому никаких обобщений.

ISBN 978-5-458-56299-7

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

Предлагаемый курс тригонометрии разделяется на две части, при чем обе части самостоятельны и могут быть изучены отдельно.

Первая часть, как и во многих учебниках тригонометрии, посвящена изучению тригонометрических функций острого угла и решению треугольников. Но, в отличие от других учебников, в ней для углов второй четверти введено только понятие о синусе и притом не обычным путем. Выводы первой части, может быть, кажутся нам более сложными, чем те аналитические выводы, к которым мы привыкли; но эти выводы имеют и преимущество: они носят более геометрический характер. Сведения, даваемые первой частью, удовлетворяют всем требованиям, которые обыкновенно предъявляются курсом физики средней школы и совершенно достаточны для техника-практика.

Во второй части тригонометрические функции рассматриваются в общем виде, при чем они определены как отношения радиуса и его проекций на две взаимно-перпендикулярные оси. Такие определения, с одной стороны, являются естественным обобщением определений, данных в первой части. С другой стороны, они избавляют от необходимости вводить особые (довольно искусственные) тригонометрические линии. Знаки функций, определенных таким образом, совершенно естественно вытекают из соглашения относительно положительных и отрицательных направлений координатных осей и не требуют никаких дополнительных условий. Эти определения дают более естественное и более обоснованное приложение полученных результатов к вопросам аналитической геометрии и механики. Для строгого и обоснованного вывода теорем тригонометрии, при этом изложении, пришлось дополнительно ввести некоторые основные положения теории векторов. Соответственно этому выводы формул приведения, сложения и вычитания дуг изложены иначе, чем в большинстве учебников. Все доказательства справедливы для произвольных дуг и не требуют поэтому никаких обобщений.

Если бы преподаватель желал воспользоваться теми определениями и выводами, которые приняты мною, но не одобрял проведенного здесь распределения курса, то он мог бы, пользуясь этим учебником, придерживаться такого порядка: сначала пройти о решении прямоугольного треугольника по первой части, затем по второй части о тригонометрических функциях и, наконец, теоремы о косоугольных треугольниках. При таком порядке прохождения курса было бы естественнее взять те выводы, относящиеся к косоугольным треугольникам, которые даны (мелким шрифтом) во второй части: они более согласуются с данными здесь определениями, чем обычные выводы этих теорем.

Если бы преподаватель сомневался в удобопонятности для учащегося вывода формулы $\cos(a+b)$ при помощи проектирования, то он мог бы воспользоваться обычным способом вывода, приведенным (мелким шрифтом) в § 67. Однако, этот вывод, как мне кажется, несколько нарушил бы стройность и дух того изложения, которое проведено в других доказательствах и выводах. Для сильных учеников (или класса) сравнение этих двух методов было бы, может быть, полезным для оценки плодотворности теоремы о проекции вектора.

В этом курсе нет объяснения того, как пользоваться логарифмо-тригонометрическими таблицами, во-первых, потому, что во всех таблицах, принятых в наших школах, есть объяснения приемов пользования ими, и поэтому едва ли есть необходимость помещать эти объяснения еще и в учебник (тем более, что даже объяснения, помещенные в таблицах, не читаются большинством учащихся); во-вторых, таблицы, изданные различными авторами, устроены не вполне одинаково, и поэтому приводить объяснения — значило бы связывать преподавателя выбором таблиц. Некоторые образцы вычислений (по натуральным, по четырехзначным и пятизначным логарифмическим таблицам) даны в этом учебнике.

Особым случаям решения треугольников и четырехугольников отведено очень мало места, а введение вспомогательного угла совсем опущено. Первому я придаю очень малое образовательное и практическое значение, а второе, по крайней мере в качестве метода приведения к логарифмическому виду, считаю совершенно бесполезным.

В заключение позволю себе заметить, что при составлении настоящего курса я больше всего пользовался учебником Lock and Child «A new trigonometry» и лекциями Левитуса, читанными им в 1911 — 1912 году и изданными на правах рукописи. Кроме того, воспользовался также замечаниями и советами друзей и знакомых, которыми они делились со мною, в особенности Е. В. Бабанского, Г. М. Фихтенгольца и С. И. Шохор-Троцкого. Приношу им свою искреннюю благодарность.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Со времени появления первого издания этого учебника Комиссариатом народного просвещения были выпущены 1) Примерные программы в 1918 году и 2) Программы, разработанные комиссиями по составлению програм при Отделе единой трудовой школы в 1921 году. Первые петербургские программы по тригонометрии составлены вполне по плану этого учебника, вышедшего ранее этих программ. В последней программе (составленной Г. М. Фихтенгольцем) рекомендуется то расположение материала, которое в предисловии к первому изданию предложено мною для преподавателя, не сочувствующего распределению курса, проведенному в этом учебнике. В объяснительной записке последней программы сделан ряд указаний, веско обоснованных, которые выполнены уже и в первом издании этого учебника. Только указание на желательность ознакомления учащихся с триангуляцией, с определением расстояний и размеров небесных тел, с измерениями на местности не осуществлено мною. Но обусловлено это совсем не моим несочувствием этому взгляду, а тем, что характер этих приложений, их объем и точность зависят в значительной степени от того, насколько обстоятельно изучается астрономия, какие приборы имеются в распоряжении школы, какие измерения проделаны учащимися на первой ступени.

Во втором издании сделаны по сравнению с первым некоторые изменения: 1) добавлены формулы Мольвейде; 2) немного изменены выводы формул приведения и теоремы сложения; 3) приведено решение еще некоторых простых уравнений; 4) выведена зависимость между круговыми функциями отрицательного и положительного аргумента; 5) прибавлено замечание о малых углах.

В заключение считаю приятным долгом, кроме лиц, указанных в первом издании, поблагодарить П. А. Компанийца и Д. С. Селиванова за те соображения, которыми они поделились со мною

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

В этом издании сделаны по сравнению со вторым некоторые изменения.

Чтобы больше подчеркнуть тот смысл, который может иметь в глазах ученика введение тригонометрических функций, при определении каждой функции даны маленькие задачи, решаемые при помощи значений этой функции; таким образом определение каждой функции ассоциируется с некоторой задачей. Затем, приведены некоторые практические вопросы, решаемые при помощи прямоугольных (§ 21 и § 23) и косоугольных (§ 33) треугольников. В § 22 введена основная теорема о площадях проекций плоских фигур на плоскость. В § 34 дано понятие о триангуляции. В практических приложениях я старался дать примеры, которые были бы интересны сами по себе или имели практическое и теоретическое значение.

В § 46 указана связь значений тригонометрических функций с длиной линий на круге. Это имеет не только историческое значение, но очень удобно в некоторых задачах, например, при изучении гармонического колебательного движения.

Но самое существенное дополнение, внесенное в это издание, — исторический очерк тригонометрии, в котором обращено наибольшее внимание на историю возникновения тригонометрических функций, вопрос, наиболее понятный учащемуся, и только мельком указано на их применение в математическом анализе.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ.

Это издание отличается от предыдущего очень незначительно.

Глава о проекциях дополнена теоремой о проекции замыкающей (§ 42), что дало возможность несколько короче и проще изложить теорему сложения (§ 66); введением § 42 трудность этой теоремы разделена: теорема более подготовлена.

Геометрическое изображение тригонометрических функций посредством линий в круге приведено более подробно (§ 46) и рассмотрено для всех четвертей. При желании преподавателя этот параграф может быть опущен.

В § 70 приведено в общей форме исследование формул для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Таблица значений тригонометрических функций дана теперь с тремя десятичными знаками (вместо двух).

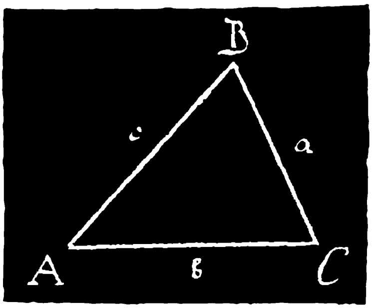
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О ФУНКЦИЯХ ОСТРОГО УГЛА И РЕШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Всякий плоский замкнутый многоугольник может быть разбит прямыми на треугольники; а всякий треугольник разбивается высотою на два треугольника и может быть рассматриваем как сумма или разность двух прямоугольных треугольников. Поэтому бóльшая часть вопросов, относящихся к многоугольникам, может быть сведена к вопросам, относящимся к треугольникам или даже к прямоугольным треугольникам.

Переходя к изучению треугольников, условимся углы и стороны треугольников называть его элементами. Углы треугольника (см. черт. 1) будем обозначать (заглавными) буквами A, B, C, а противолежащие им стороны соответственно (строчными) буквами a, b, c; таким образом, стороны будут всегда обозначены теми же (малыми) буквами, какими (но большими) обозначены противолежащие им углы. В прямоугольном треугольнике буквою C условимся обозначать прямой угол, а буквою c — гипотенузу.

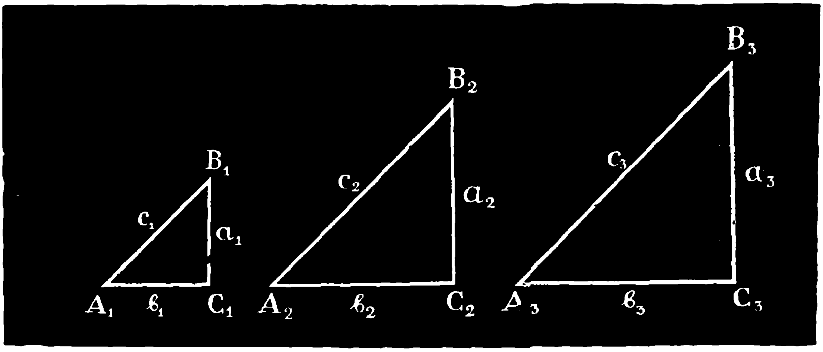


Черт. 1.

§ 2. Решить треугольник значит — по данным его элементам вычислить остальные. Так как треугольник вполне определяется тремя элементами (как это видно из признаков равенства треугольников), то вообще достаточно трех элементов (в числе которых должен быть по меньшей мере один отрезок) для определения остальных. Прямоугольный же треугольник определяется вполне, если (кроме прямого угла) заданы два элемента (но, конечно, не два угла).

О СИНУСЕ ОСТРОГО УГЛА.

§ 3. Если два прямоугольных треугольника имеют по равному (острому) углу A, то они подобны (так как имеют по два равных угла); следовательно, их стороны пропорциональны, а другие острые



Черт. 2.

углы равны между собой. Рассмотрим (черт. 2) ряд прямоугольных треугольников

$$A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2, \ldots\ A_nB_nC_n$$

имеющих по равному острому углу

$$\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots = \angle A_n.$$

Так как треугольники подобны, то

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \ldots \ldots = \frac{a_n}{c_n} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Отношение $\frac{a}{c}$ остается в этих треугольниках постоянным (без изменения).

Если мы, оставив гипотенузу c без изменения, увеличим или уменьшим острый угол A, то катет a возрастет или убудет, и поэтому отношение $\frac{a}{c}$ (противолежащего углу A катета к гипотенузе) при изменении угла A также меняется. Каждому значению угла A соответствует определенное значение отношения $\frac{a}{c}$. Другими словами, отношение $\frac{a}{c}$ есть функция [1]) угла A. Эту функцию — отношение $\frac{a}{c}$ — называют *синусом угла А*.

---

[1]) Предполагается, что учащийся знаком с термином «функция», однако напомним ее определение.

Если переменная y связана с переменной x так, что каждому значению x соответствуют определенные значения y, то x называют *независимой перемен-*

Итак, *синус острого угла есть отношение противолежащего углу катета к гипотенузе.*

Для обозначения синуса угла A пишут $\sin A$. Согласно определению,

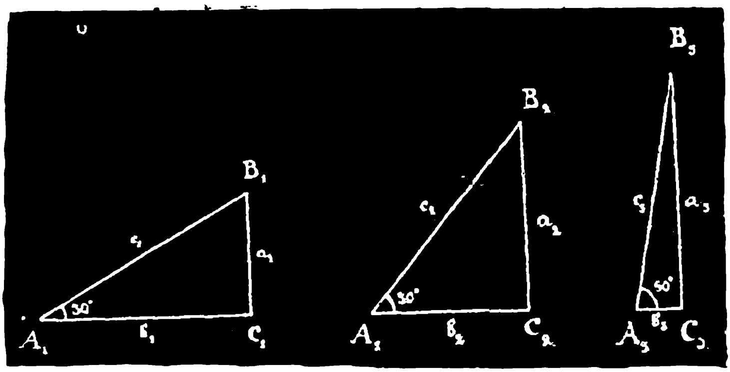
$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Применяя это определение к углу B, получаем

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

(так как против угла B лежит катет b).

§ 4. Приближенные численные значения синусов острых углов можно проще всего найти, построив на миллиметровой бумаге прямоугольные треугольники с гипотенузой длиною в 100 миллиметров; измеряя затем лежащие против угла A катеты в миллиметрах и разделяя полученные числа на 100 *мм* (на c), найдем приближенные значения синусов углов A. Эти измерения на миллиметровой бумаге



Черт. 3.

(черт. 3: $c_1 = c_2 = c_3 = 100$ *мм*; $\angle A_1 = 30°$; $\angle A_2 = 50°$; $\angle A_3 = 80°$) дают следующие результаты:

$$B_1C_1 = a_1 = 50 \text{ мм}, \quad B_2C_2 = a_2 = 77 \text{ мм}, \quad B_3C_3 = a_3 = 98 \text{ мм}.$$

ной или аргументом, а переменную y — ее *функцией*. Например, если указана зависимость

$$y = 3x^2 - 1,$$

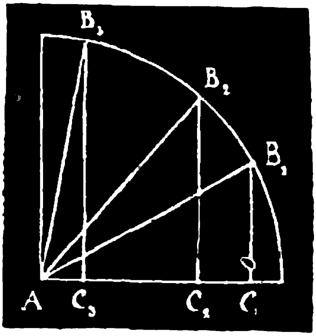
то, давая x произвольные значения, получим ряд соответствующих значений y: y есть функция x. Еще пример. Объем шара есть функция его радиуса: задавая произвольные значения радиуса, получаем соответствующие значения объема шара.

Поэтому,

$$\sin 30^\circ = 0{,}50;\quad \sin 50^\circ = 0{,}77;\quad \sin 80^\circ = 0{,}98$$

с точностью до 0,01.

Если желательно сохранить место, то можно расположить треугольники так, чтобы катет, прилегающий к углу A, оставался одним и тем же, а гипотенуза вращалась вокруг вершины A (черт. 4). Пользуясь миллиметровой бумагой, мы можем обойтись и без прямых B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 . . . и даже без прямых AB_1, AB_2, AB_3 . . . Необходимо иметь только положение точек B_1, B_2, B_3 . . . и отсчитывать по вертикальному направлению в миллиметрах их расстояния от (горизонтальной) прямой AC.



Черт. 4.

Высшая математика дает возможность вычислить синусы углов с какой угодно точностью. В нижеприведенной таблице даны приближенные значения синуса с двумя знаками после запятой. (См. табл. на стр. 11.)

§ 5. Как видно из приведенной таблицы, значения синуса заключаются между нулем и единицей, т. е. *синус острого угла* всегда *выражается правильной дробью*. Это можно было предвидеть, так как, согласно определению, синус острого угла есть отношение длины катета к длине гипотенузы, т. е. отношение меньшего числа к большему. С другой стороны, на основании определения можно заключить, что *синус*, как отношение одного отрезка к другому, *есть отвлеченное число*.

Пользуясь приведенной таблицей, можно по данному значению угла найти значение синуса, — и обратно. Например,

$$\sin 56^\circ = 0{,}83.$$

Обратно, при помощи этой таблицы можно по данному значению синуса найти соответствующий ему угол. Положим, синус некоторого угла равен 0,29. Угол, соответствующий этому значению синуса, равен 17°.

§ 6. При помощи значений синуса можно решать некоторые практические вопросы. Приведем несколько примеров этого.

Положим, угол, составленный направлением дороги с горизонтом, равен $A = 15^\circ$ (черт. 4). Найти, насколько выше данного места находится точка, удаленная от него на 70 *м*.

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \sin A;\quad B_1C_1 = AB_1 \sin A.$$

Подставляя данные значения, получаем:

$$BC = 70 \cdot \sin 15^\circ = 70 \cdot 0{,}26 = 18{,}2\ \textit{м}.\ ^{1)}$$

---

1) Следует заметить, что уклон в 15° — довольно значительный уклон. Например, на шоссейных дорогах не допускается уклон более 4°, да и то только для гористых местностей.

Таблица значений синусов острых углов.

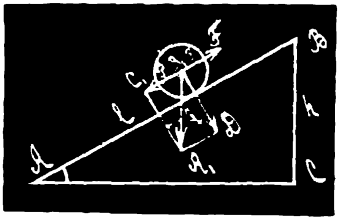
Угол.	Синус.	Угол.	Синус.	Угол.	Синус.	Угол.	Синус.
1	0,02	24	0,41	47	0,73	70	0.94
2	0,03	25	0,42	48	0,74	71	0,95
3	0,05	26	0,44	49	0,75	72	0,95
4	0,07	27	0,45	50	0.77	73	0,96
5	0,09	28	0,47	51	0,78	74	0,96
6	0,10	29	0,48	52	0,79	75	0,97
7	0,12	30	0,50	53	0,80	76	0,97
8	0,14	31	0,52	54	0,81	77	0,97
9	0,16	32	0,53	55	0,82	78	0,98
10	0,17	33	0,54	56	0,83	79	0,98
11	0,19	34	0,56	57	0,84	80	0,98
12	0,21	35	0,57	58	0,85	81	0,99
13	0,22	36	0,59	59	0,86	82	0,99
14	0,24	37	0,60	60	0,87	83	0,99
15	0,26	38	0,62	61	0.87	84	0,99
16	0,28	39	0,63	62	0,88	85	1.00
17	0,29	40	0,64	63	0,89	86	1,00
18	0,31	41	0,66	64	0,90	87	1,00
19	0,33	42	0,67	65	0,91	88	1.00
20	0,34	43	0,68	66	0,91	89	1;00
21	0,36	44	0,69	67	0,91		
22	0,37	45	0.71	68	0,93		
23	0,39	46	0,72	69	0,93		

Какую силу P надо приложить вдоль наклонной плоскости к грузу в Q *кг*, чтобы он был в равновесии на плоскости, наклон которой равен A?

Силу $Q = B_1A_1$ (черт. 5) можно разложить на две силы B_1D и B_1C_1, из которых первая перпендикулярна к плоскости и производит только давление на плоскость; силу $P = B_1C_1$ надо уравновесить силой B_1F, равной ей и противоположно направленной, чтобы удержать тело от скатывания по наклонной плоскости. (Трение не принимается во внимание.) Угол $B_1A_1C_1 = A$;

$$\frac{P}{Q} = \sin A_1 = \sin A;$$

следовательно, $P = Q \sin A$.



Черт. 5.

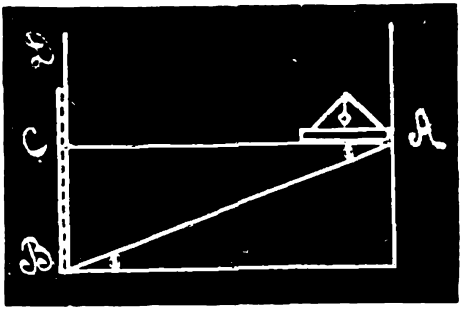
Тот же результат можно получить на основании такого рассуждения: работа силы для подъема груза с уровня AC до высоты точки B не должна зависеть от пути. Если поднимать груз Q вдоль $BC = h$, то работа равна Qh; если же катить груз вдоль $AB = l$, то работа равна Pl; значит, $Qh = Pl$; но

$$\frac{h}{l} = \sin A; \quad h = l \sin A;$$

поэтому $Ql \sin A = Pl$, т. е. $P = Q \sin A$.

Если $Q = 12$ *кг*, $A = 12°$, то $P = 12 \cdot \sin 12° = 12 \cdot 0{,}21 = 2{,}52$ *кг*.

Если угол наклона равен только 6°, то усилие, потребное, чтобы двигать груз вдоль плоскости, должно равняться 0,1 его веса; для того чтобы понять, сколь велико это усилие, стоит только принять во внимание, что трение на порядочной дороге составляет только $\frac{1}{25}$ веса, а на хорошем шоссе только $\frac{1}{50}$ (цифры округлены).



Черт. 6.

Чтобы определить наклон дороги, можно поступать таким образом. В точке B (черт. 6) ставим вертикально рейку с делениями BD (около 2 *м*) и, отмерив расстояние AB (около 4 *м*), устанавливаем с помощью ватерпаса г о р и з о н т а л ь н у ю планку AC; отмеряем расстояние EC; тогда $\frac{BC}{AB} = \sin A$.

Например, $AB = 4$ *м*; $BC = 0{,}73$ *м*; $\sin A = \frac{0{,}73}{4} = 0{,}18$. По таблице находим $A = 11°$ (приблизительно).

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ ПОМОЩИ ЗНАЧЕНИЙ СИНУСА.

§ 7. Значения синуса позволяют решать прямоугольные треугольники. Покажем это на следующих трех примерах.

Положим, в прямоугольном треугольнике заданы гипотенуза и острый угол:

$$c = 5{,}4 \text{ см}; \quad A = 25°.$$

Найти остальные элементы. Из таблицы имеем:

$$\sin A = \sin 25° = 0{,}42,$$

а на основании определения синуса

$$\sin A = \sin 25° = \frac{a}{5{,}4},$$

откуда

$$\frac{a}{5{,}4} = 0{,}42 \text{ или } a = 5{,}4 \text{ см} \times 0{,}42 = 2{,}3 \text{ см}$$

(если сохранить в произведении два знака). Зная стороны a и c, по теореме Пифагора получим:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5{,}4^2 - 2{,}3^2} = \sqrt{23{,}87} = 4{,}9 \text{ см}.$$