

Вебер Г., Вельштейн И.

**Энциклопедия элементарной математики.
Том 1**

Элементарная алгебра и анализ

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 030
ББК 92
В26

В26 **Вебер Г.**
Энциклопедия элементарной математики. Том 1: Элементарная алгебра и анализ / Вебер Г., Вельштейн И. – М.: Книга по Требованию, 2021. – 638 с.

ISBN 978-5-458-25755-8

Настоящее издание создано профессорами университетов в Страсбурге и Гиссене для преподающих и изучающих элементарную математику. Цель Энциклопедии - дать научное и современное изложение основ элементарной математики. Первый том является вторым исправленным и дополненным изданием, содержащим мастерское изложение основ арифметики, алгебры и анализа. Второй том представлен в двух книгах и включает в себя Энциклопедию элементарной геометрии. Книги дополнены обширными комментариями и указателями.

ISBN 978-5-458-25755-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Предисловіе къ русскому изданію.

Сочиненія по элементарной математикѣ рѣзко дѣлятся на два типа. Одни представляютъ собой учебники въ собственномъ смыслѣ этого слова, по которымъ можно систематически изучать предметъ безъ предварительной подготовки; другія представляютъ собою трактаты, содержащіе научное изложеніе дисциплины и рассчитанные на подготовленнаго читателя. Въ то время, какъ новые учебники появляются очень часто, цѣнные сочиненія второго рода появляются разъ въ четверть вѣка и даже рѣже. Появленіе новаго трактата такого рода всегда указываетъ на то, что въ изложеніи и въ разработкѣ дисциплины установились новыя теченія, новыя взгляды; они какъ бы подводятъ итогъ работамъ цѣлаго научнаго поколѣнія. Такое значеніе въ концѣ шестидесятыхъ и въ семидесятыхъ годахъ имѣли: „Элементы математики“ Бальцера ¹⁾ и „Алгебра“ Жозефа Бертрана ²⁾. Но въ послѣднюю четверть вѣка основы элементарной математики подверглись тщательному пересмотру. Глубокій анализъ, которому посвятили много труда наиболѣе выдающіеся ученые, пролилъ совершенно новый свѣтъ на элементы ариѳметики и геометріи. Научное изложеніе этихъ дисциплинъ значительно уклонилось отъ той системы, которую мы находимъ въ элементарныхъ учебникахъ. Когда г. Билибинъ предпринялъ изданіе „Алгебры“ Бертрана въ русскомъ переводѣ, онъ вынужденъ былъ уже существенно переработать и дополнить текстъ оригинала.

Дать научное и современное изложеніе основъ элементарной математики составляетъ задачу „Энциклопедіи элементарной математики“ профессоровъ Вебера и Вельштейна. Первый томъ этого сочиненія „Энциклопедія элементарной алгебры“ принадлежитъ профессору Страсбургскаго университета Г. Веберу, автору обширнаго трактата по высшей алгебрѣ. ³⁾ Книга содержитъ, на нашъ взглядъ, мастерское изложеніе элементовъ ариѳметики, алгебры и анализа. Обоснованіе началъ ариѳметики все еще не можетъ считаться законченнымъ; поэтому нѣкоторые пункты въ I, II и IV главѣ могутъ и здѣсь не вполне удовлетворить вдумчиваго читателя; но

¹⁾ R. Baltzer. „Elemente der Mathematik“. Leipzig. 1865.

²⁾ J. Bertrand. „Traité d'Algèbre“. Paris. 1862.

³⁾ H. Weber. „Lehrbuch der Algebra.“ Braunschweig. I Bd. 1893, II Bd. 1895.

онъ найдетъ въ этомъ сочиненіи оригинальную систему изложенія основъ арифметики, отражающую всѣ изслѣдованія послѣдняго времени по этому вопросу. Очень обстоятельно и, главное, строго научно изложены и остальные отдѣлы; особенный же интересъ представляетъ XIX глава, содержащая, можно сказать, первую попытку дать элементарное изложеніе сложныхъ доказательствъ невозможности рѣшенія общаго уравненія 5-ой степени въ радикалахъ, неприводимости формулы Кардана и т. п. Общая теорія рядовъ и разложеніе наиболѣе важныхъ функцій изложены столь же строго, какъ и доступно. Очень удачно переработаны также авторомъ доказательства трансцендентности чиселъ e и π .

Авторъ сопровождаетъ многія предложенія историческими указаніями, свѣдѣніями объ ихъ авторахъ. Впрочемъ, свѣдѣнія эти по причинамъ, указаннымъ въ предисловіи автора, довольно скудны. Но въ декабрѣ 1905 г. появилось второе изданіе I-го тома, въ которомъ историческія свѣдѣнія и литературныя указанія значительно расширены. Тѣ добавленія, которыя мы не успѣли внести въ текстъ настоящаго перевода, будутъ приложены къ концу книги.

Наконецъ, чтобы сдѣлать книгу доступной возможно болѣе широкому кругу читателей, мы сочли полезнымъ присоединить разъясняющія примѣчанія въ тѣхъ мѣстахъ, которыя изложены авторомъ слишкомъ сжато. Всѣ подстрочныя примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены цифрами, принадлежатъ намъ; тѣ же примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены звѣздочками, принадлежатъ автору. Мы полагаемъ, что съ этими дополненіями книга будетъ доступна даже хорошо подготовленному ученику старшаго класса. Первые главы, по своей отвлеченности, труднѣе другихъ; мы полагаемъ, однако, что это не остановитъ читателя, который съ интересомъ къ дѣлу приступитъ къ чтенію этого сочиненія. Можно даже при первомъ чтеніи опустить первую главу и возвратиться къ ней по прочтеніи всей книги.

В. Каганъ.

Предисловіе автора ¹⁾.

Сочиненіе, первый томъ котораго мы въ настоящее время выпускаемъ въ свѣтъ, не должно представлять собой учебника въ собственномъ смыслѣ слова. Читателями, которыхъ мы имѣемъ въ виду, являются, во первыхъ, учителя, которые, мы надѣемся, найдутъ въ немъ полезныя указанія для выбора учебнаго матеріала, особенно для старшихъ классовъ; во вторыхъ, лица, изучающія уже математику спеціально и серьезно, которыя желаютъ пріобрѣсти для этого твердую почву путемъ освѣженія и дополненія пріобрѣтенныхъ раньше элементарныхъ знаній.

Нерѣдко уже разбирался вопросъ, что слѣдуетъ понимать подъ элементарной математикой и какъ установить границы этой области. Единственный научный принципъ, который могъ бы служить для рѣшенія этого вопроса, состоитъ въ томъ, что изъ области элементарной математики исключаютъ понятія о безконечности и о предѣлѣ; элементарная математика противопоставляется поэтому анализѣ безконечнаго. Съ этой точки зрѣнія къ элементарной математикѣ надо отнести все, что получается при посредствѣ извѣстныхъ простыхъ логическихъ пріемовъ; послѣдніе же даютъ при дальнѣйшемъ развитіи всю теорію чиселъ, включая труднѣйшія ея части, вообще все, что, по мнѣнію Кронекера (Kronecker), имѣетъ въ математикѣ право на существованіе; при этомъ, однако, возникаютъ затрудненія въ самомъ примѣненіи этихъ простыхъ логическихъ пріемовъ, для устраненія чего и созданъ высшій анализъ. Уже такія понятія, какъ ирраціональное число, квадратный корень, логарифмъ, не относились бы, если стать на эту точку зрѣнія, къ элементарной математикѣ.

Въ геометріи къ элементамъ относятъ то, что выводится изъ понятій о прямой и о кругѣ и (въ пространствѣ) изъ понятій о плоскости и о шарѣ. Но уже соединеніе геометріи въ плоскости и въ пространствѣ приводитъ къ понятію о конусѣ, а отсюда къ его сѣченіямъ плоскостью, къ такъ называемымъ коническимъ сѣченіямъ. Если же мы соединимъ геометрію съ ариѳметикой, то мы неизбежно выйдемъ за предѣлы области, опредѣляемой для элементарной геометріи вышеприведеннымъ принципомъ; такъ, для опредѣленія понятій: площадь, длина дуги и т. п. необходимо пользоваться переходомъ къ предѣлу.

¹⁾ Вскорѣ послѣ появленія этого сочиненія авторъ отпечаталъ предисловіе въ журналѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ съ нѣкоторыми дополненіями, которыя мы считаемъ существенными. Съ этими дополненіями мы и воспроизводимъ переводъ.

VIII

Итакъ, мы видимъ, что такое опредѣленіе элементарной математики, хотя и представляетъ научный интересъ, т. е. можетъ служить для разъясненія возникновенія математическихъ понятій,—тѣмъ не менѣе, не имѣетъ никакой цѣны съ педагогической точки зрѣнія, если только не ограничиваться лишь самыми простѣйшими главами элементовъ.

Поэтому мы подъ элементарной математикой понимаемъ все то, что можно цѣлесообразно примѣнять при преподаваніи математики въ школѣ, но въ томъ періодѣ его, который предшествуетъ выбору особой специальности. Съ такой точки зрѣнія границы этой области зависятъ, главнымъ образомъ, отъ выбора педагога. Но и математическая наука имѣетъ право голоса при обсужденіи даннаго вопроса.

Мнѣнія по вопросу о выборѣ матеріала для школьнаго преподаванія всегда будутъ и должны быть различны. Эти различія зависятъ отъ индивидуальности и научныхъ склонностей преподавателя, и, прежде всего, отъ цѣлей, къ которымъ преподаваніе стремится.

Планъ преподаванія будетъ тотъ или иной въ зависимости отъ того, что мы будемъ считать главною задачею научнаго образованія: всестороннее ли, гармоническое развитіе ума, пробужденіе дремлющихъ духовныхъ силъ и упражненіе ихъ,—или сообщеніе юношѣ извѣстной суммы полезныхъ свѣдѣній и умѣній, которыя какъ можно раньше слѣдали бы его готовымъ къ трудной жизненной борьбѣ.

Послѣдняя задача заставила бы присоединить къ элементарному преподаванію по возможности больше матеріала для того, чтобы при переходѣ къ изученію специальности не было нужды останавливаться больше на подготовительной работѣ.

Очевидно, что это возможно только въ ущербъ глубинѣ и основательности; а при этомъ возникаетъ опасность, что обученіе математикѣ потеряетъ свое существенное значеніе.

Значеніе же это очень различно для различныхъ индивидуальностей. Математическая работа содержитъ въ себѣ особый элементъ творчества. И это относится не только къ творческой дѣятельности въ собственномъ смыслѣ этого слова, но сказывается и въ мелочахъ, проявляется при рѣшеніи задачъ или въ болѣе глубокомъ пониманіи и точномъ воспроизведеніи математическихъ идей. Эта дѣятельность ума въ состояніи совершенно поглотить человѣка и служить для лицъ, одаренныхъ соотвѣтствующими способностями, источникомъ величайшихъ наслажденій. Такое явленіе наблюдается какъ въ области абстрактныхъ представленій, въ наукѣ о числахъ, такъ и въ области пространственныхъ представленій геометріи.

Поэтому я не сомнѣваюсь въ томъ, что для особенно успѣшнаго преподаванія математики необходимо, чтобы ученики обладали извѣстнымъ специфическимъ дарованіемъ. Отсюда отнюдь не слѣдуетъ, понятно, что бы средне одаренному ученику нельзя было преподавать въ извѣстномъ

объемъ математическихъ знаній и свѣдѣній, которыя будутъ ему нужны при изученіи всякой спеціальной отрасли знаній; это даже необходимо для логическаго воспитанія мысли.

Но такое положеніе вещей создаетъ раздвоеніе въ математическомъ преподаваніи, а это влечетъ за собой крупныя затрудненія. И преподаватель, стремящійся одновременно выполнить обѣ эти задачи—цѣлесообразнаго преподаванія выдающимся ученикамъ и среднимъ—, долженъ обладать не только основательными познаніями, но и глубокимъ математическимъ образованіемъ и пониманіемъ тонкостей и красотъ математики.

До сихъ поръ еще, послѣ почти пятидесяти лѣтъ, я вспоминаю съ благодарностью моего учителя въ Гейдельбергскомъ лицѣ, Арнета (Arneth) и его уроки, оказавшіе на меня глубокое вліяніе. Для большинства учениковъ его преподаваніе представляло мало интереса; но тѣмъ увлекательнѣе оно было для немногихъ исключительныхъ учениковъ, которымъ было доступно его тонкое математическое чутье и пониманіе физики. опередившее господствованіе въ то время взгляды.

Въ тѣ времена въ южно-германскихъ гимназіяхъ математикѣ въ программѣ преподаванія отводилось второстепенное мѣсто; и со стороны большинства учителей и учениковъ она не пользовалась уваженіемъ. Поэтому преподаватель могъ вліять лишь на небольшой кружокъ склонныхъ къ математикѣ юношей. Теперь обстоятельства измѣнились къ лучшему и въ настоящее время врядъ-ли можетъ случиться, чтобы какой-нибудь ученикъ окончилъ гимназію безъ всякихъ математическихъ познаній.

Это есть несомнѣнный шагъ впередъ; но онъ не долженъ покупаться цѣною пониженія внутренняго содержанія преподаванія; нужно, чтобы при новой системѣ и болѣе способный ученикъ нашелъ необходимый для себя матеріалъ. Послѣднее же достигается не тѣмъ, что лучшихъ учениковъ выводятъ возможно дальше изъ области элементарной математики въ область высшей. Для дальнѣйшаго математическаго развитія это могло бы скорѣе служить помѣхою, чѣмъ помощію. Значительно болѣе плодотворнымъ является углубленіе содержанія элементарнаго преподаванія, въ которомъ, не выходя изъ прежнихъ границъ, можно найти неисчерпаемыя богатства матеріала; такое углубленіе дѣйствуетъ на ученика, развивая его и оживляя предметъ. При этомъ учителю должна быть дана полная свобода выбирать изъ всего многообразнаго матеріала то, что соотвѣтствуетъ его собственнымъ склонностямъ. Ибо плодотворное воздѣйствіе на ученика можетъ имѣть мѣсто только тамъ, гдѣ преподаватель относится еще съ живымъ интересомъ къ предмету.

Между прочимъ, и строгое логическое обоснованіе математики можетъ быть отнесено къ области элементовъ. Относящіеся сюда вопросы въ новѣйшее время подверглись глубокому изслѣдованію, и мы сдѣлали значительный шагъ впередъ къ ихъ разрѣшенію. Основаніямъ ариѳметики посвя-

щены статьи Дедекинда (Dedekind): „*Was sind und was sollen die Zahlen*“ ²⁾ (Braunschweig, 1888, 1892) и „*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“ (1872, 1892). Авторъ оперируетъ въ нихъ при посредствѣ простѣйшихъ приемовъ, которыми располагаетъ всякій здравый разумъ и которые не предполагаютъ никакихъ специальныхъ философскихъ или математическихъ свѣдѣній. Въ томъ же направленіи ведутся новѣйшія изслѣдованія по основаніямъ геометріи; правда, они не достигли еще той законченности, какою отличаются соотвѣтствующія изслѣдованія по ариметикѣ. Но, чтобы понимать эти вопросы, необходимо располагать извѣстною зрѣлостью сужденій, а потому съ нихъ нельзя начинать преподаванія.

Итакъ, изложеніе этихъ принципіальныхъ вопросовъ, въ видѣ своего рода философской пропедевтики, можно рекомендовать въ послѣднемъ классѣ гимназій, хорошо подготовленномъ. Но при этомъ необходимо соблюдать осторожность, такъ какъ полупониманіе въ этой области равносильно непониманію, если не хуже его.

Для большинства учениковъ полезнѣе и интереснѣе, если преподаваніе будетъ расширено въ сторону *приложений*. Новыя программы испытаній на званіе преподавателя средней школы въ Германіи даютъ къ этому толчокъ ³⁾, и тѣмъ самымъ реальному образованію отводится больше мѣста. Приложенія могутъ оживить преподаваніе математики, увеличить къ ней интересъ, а точность и чистота при черченіи придаютъ этой отрасли преподаванія немалое воспитательное значеніе.

Далѣе, извѣстныя главы теоріи чиселъ и высшей алгебры могутъ съ успѣхомъ примѣняться при элементарномъ преподаваніи. Во первыхъ, онѣ пользуются лишь элементарными математическими приемами; а во вторыхъ, преимущество ихъ въ многочисленности примѣровъ, которыми можетъ воспользоваться учитель; рѣшеніе этихъ примѣровъ, допускающее всегда простую повѣрку, даетъ учащемуся большое удовлетвореніе. Примѣненіе этихъ главъ къ построенію правильныхъ многоугольниковъ вызываетъ и геометрический интересъ.

Загѣмъ существуетъ рядъ знаменитыхъ задачъ, извѣстныхъ уже съ древнихъ временъ, какъ, напримѣръ, проблемы объ удвоеніи куба, о трисекціи угла при посредствѣ циркуля и линейки, рѣшеніе въ радикалахъ уравненія пятой степени, квадратура круга,—о невозможности рѣшенія которыхъ школьни-

²⁾ Переводъ этого небольшого сочиненія, сдѣланный С. О. Шатуновскимъ, былъ помѣщенъ въ „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“, въ №№ 191 и 192. Брошюра была также выпущена отдѣльнымъ изданіемъ. [Это изданіе разошлось и въ настоящее время готовится новое. „Mathesis“.

³⁾ По этимъ программамъ при государственномъ экзаменѣ на званіе преподавателя математики за одинъ изъ вѣроятныхъ предметовъ можно взять прикладную математику. А при допущеніи къ экзамену засчитываются два семестра, проведенные студентомъ, вмѣсто университета, въ специальномъ техническомъ заведеніи.

ки постоянно слышать. Въ настоящее время наука не только располагает доказательствами невозможности, но доказательствамъ этимъ она придала столь простую форму, что ими можно безъ труда воспользоваться при элементарномъ преподаваніи.

Въ теченіе самой работы матеріалъ, предназначенный для настоящаго сочиненія, былъ увеличенъ и самый планъ былъ расширенъ. Оказалось поэтому цѣлесообразнымъ разбить сочиненіе не на два тома, какъ это предполагалось сначала, а на три. Первый томъ долженъ охватить область ариѳметики и алгебры, второй—геометрію, а третій будетъ посвященъ приложеніямъ. Мы надѣемся, что второй и третій томы появятся въ непродолжительномъ времени. Благодаря этому оказалось возможнымъ удѣлить значительно больше мѣста приложеніямъ, которыя мы имѣли въ виду и при выборѣ примѣровъ въ различныхъ частяхъ текста.

Впрочемъ, согласно плану настоящаго сочиненія, мы не разрабатывали большого числа примѣровъ. Мы не считали цѣлесообразнымъ останавливаться на примѣрахъ, имѣющихъ въ виду только упражненія, такъ какъ въ литературѣ нѣтъ недостатка въ прекрасныхъ сборникахъ такого рода примѣровъ. Примѣры мы помѣщали лишь въ тѣхъ случаяхъ, если это казалось необходимымъ для пониманія текста, или если примѣръ самъ по себѣ могъ представлять научный интересъ. Точно также мы не удѣляли много мѣста историческимъ и литературнымъ справкамъ. Мы имѣемъ въ настоящее время обширное сочиненіе по исторіи математики М. Кантора; въ этомъ сочиненіи мы находимъ подробныя и точныя свѣдѣнія за огромный періодъ отъ зарожденія первыхъ начатковъ математики до середины XVIII столѣтія; благодаря же тщательно составленному регистру, это сочиненіе даетъ возможность легко ориентироваться и въ отдѣльныхъ вопросахъ. Сверхъ того въ непродолжительномъ времени въ „Энциклопедіи Математическихъ наукъ“ ⁴⁾ имѣетъ появиться статья „Элементарная Математика“ М. Симона (M. Simon); мы имѣли возможность видѣть эту статью въ рукописи; она содержитъ подробныя историческія и литературныя указанія по всѣмъ вопросамъ, которые могутъ быть отнесены къ элементарной математикѣ. Намъ казалось поэтому достаточнымъ ограничиваться при каждомъ собственномъ имени, появляющемся при наименованіи того или другаго предложенія, короткой замѣткой о времени и обстоятельствахъ жизни этого автора.

⁴⁾ „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen,“ Leipzig. Teubner. „Энциклопедія математическихъ наукъ со включеніемъ ихъ приложеній“. Чрезвычайно обширное и цѣнное сочиненіе, выходящее въ настоящее время одновременно на нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ. Отдѣльныя статьи разрабатываются выдающимися учеными всего міра. Въ настоящее время вполне законченъ только I томъ „Ариѳметика и Алгебра“, содержащій 1196 страницъ; вышли также многіе выпуски другихъ томовъ.

Наконецъ, мы должны указать, что настоящее сочиненіе обязано своимъ появленіемъ въ свѣтъ иниціативѣ издателя А. Акермана-Тейбнера (A. Ackermann-Teubner); онъ указалъ намъ на „Элементы Математики“ Бальцера (Baltzer), сочиненіе, которое выдержало нѣсколько изданій и въ настоящее время уже не существуетъ въ продажѣ; на такого рода сочиненіе, очевидно, имѣется спросъ. Поэтому обработать такого рода сочиненіе согласно господствующимъ въ настоящее время въ наукѣ воззрѣніямъ, представляетъ собой несомнѣнно благодарную задачу; я тѣмъ охотнѣе взялъ ее на себя, что съ 1888 г. я читалъ въ Марбургѣ, Гёттингенѣ и Страсбургѣ университетскій курсъ подъ заглавіемъ: „Энциклопедія Элементарной Математики“.

Страсбургъ, въ іюль 1903 г.

Г. Веберъ.

Предисловіе ко второму изданію.

Первый томъ нашей „Энциклопедіи элементарной математики“ встрѣтилъ благопріятный пріемъ какъ со стороны математическаго міра, такъ и со стороны критики. Но наряду съ чрезмѣрными похвалами слышались отчасти въ критикѣ, отчасти въ личныхъ разговорахъ различныя пожеланія. Я тщательно обдумалъ всѣ высказанныя мнѣ пожеланія и по скольку я находилъ ихъ въ чемъ либо правильными, я постарался удовлетворить ихъ во второмъ изданіи.

Часто высказывалось пожеланіе болѣе подробной разработки исторической части. Для того, чтобы избѣжать слишкомъ большого труда, но въ то же время не ограничиться сухимъ перечисленіемъ заглавій книгъ и хронологическихъ данныхъ, я остановился на слѣдующемъ: не стремясь все таки къ полнотѣ изложенія, подробнѣе разработать части математики, имѣющія общій интересъ и дать небольшіе эскизы изъ исторіи математики. Въ этомъ и во многихъ другихъ вопросахъ я пользовался совѣтомъ и дѣятельною помощью г. Штекеля (Stäckel) въ Ганноверѣ. Считаю своимъ долгомъ выразить ему здѣсь мою благодарность.

Изъ болѣе существенныхъ измѣненій я долженъ упомянуть еще о XXVII главѣ, которая посвящена первоначальнымъ элементамъ дифференціального и интегрального исчисленій. Въ послѣднее время въ дѣлѣ математическаго преподаванія создалось движеніе, направленное къ тому, чтобы очень рано выяснять понятія о переменной величинѣ и о функціи и такимъ образомъ подготавливать учащагося къ примѣненію его познаній къ естественнымъ и техническимъ наукамъ. Болѣе подробныя свѣдѣнія объ этихъ планахъ и стремленіяхъ можно найти въ изданномъ Ф. Клейномъ и Е. Рике трудѣ „Матеріалы по вопросу о преподаваніи математики и физики въ высшей школѣ“¹⁾. Этотъ путь, вполне естественно, приводитъ къ основнымъ понятіямъ дифференціального исчисленія. Теперь возникаетъ только вопросъ,—слѣдуетъ ли просто употреблять установившіеся въ этихъ дисциплинахъ и общепринятые термины и обозначенія, или ихъ слѣдуетъ

¹⁾ F. Klein und E. Riecke. „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen“, Leipzig, Teubner, 1904.

избѣгать, неявно замѣняя ихъ другими. Я, однако, не могъ найти достаточнаго основанія къ тому, чтобы, давая понятія, скрывать ихъ названія. Ибо врядь ли слѣдуетъ опасаться того, что ученикъ, нуждающійся въ математическихъ познаніяхъ при своихъ дальнѣйшихъ занятіяхъ, удовольствуется тѣми начатками, которые могли быть ему сообщены въ школѣ, и потому станетъ вести свои дальнѣйшія занятія съ меньшимъ интересомъ или съ менѣе серьезнымъ отношеніемъ къ дѣлу. Я тѣмъ охотнѣе рѣшился присоединить къ этому труду XXVII главу, что въ предыдущихъ главахъ изложено уже о безконечныхъ рядахъ все, что необходимо для пониманія этихъ основныхъ понятій, и еще потому, что въ геометріи все-таки нельзя обойти понятій о касательной, о кривизнѣ, о величинѣ поверхности, объ объемѣ и т. д.

Страсбургъ. Ноябрь 1905 г.