Н.Г. де Брёйн

Асимптотические методы в анализе

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н.Г. де Брёйн

Н11 Асимптотические методы в анализе / Н.Г. де Брёйн – М.: Книга по Требованию, 2021. – 248 с.

ISBN 978-5-458-27309-1

Книга содержит элементарное изложение ряда методов, используемых в анализе для получения асимптотических формул. Изложение весьма своеобразное   каждая глава состоит из небольшого введения, объясняющего сущность данного метода, и некоторого количества удачно подобранных примеров (иногда довольно сложных), иллюстрирующих применение этого метода. В конце глав приводятся упражнения для самостоятельного решения.

ISBN 978-5-458-27309-1

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла на основе курса лекций, прочитанного в 1954/55 учебном году в Математическом Центре (Амстердам) и повторенного в Эйндховене в 1956/57 году. Цель книги — научить читателя асимптотическим методам на детальном разборе ряда примеров; мы надеемся, что она будет полезна для начинающих, которые имеют серьезное желание овладеть техникой асимптотических оценок.

Хотя асимптотические методы никоим образом не являются новой областью, посвящать им книги и специальные курсы стали лишь сравнительно недавно. Причина этого, возможно, состоит в том, что сейчас обязательные университетские курсы анализа сокращены в пользу более современных направлений математики. Поэтому сейчас владение аналитической техникой далеко не так широко распространено, как раньше. С другой стороны, и в теоретической и в прикладной математике имеется так много задач асимптотической природы, что мы не можем позволить себе пренебречь этим предметом. Поэтому весьма желательно дать специальную возможность совершенствоваться в технике асимптотических оценок тем, чьи знания исчерпываются общим курсом анализа.

Читатель не найдет в этой книге чего-либо похожего на общую теорию. Большинство асимптотических методов крайне гибки, и обычно бывает невозможно сформулировать единственную теорему, включающую все возможные применения данного метода. Любая попытка обобщения в действительности привела бы к ограничению возможностей.

Обычно в математике приходится выбирать между двумя возможностями: говорить все больше и больше о все более конкретном, либо говорить все меньше и меньше о все более общем. Однако в таком практически важном разделе анализа, как рассматриваемый здесь, наиболее правильно будет сказать настолько много, насколько это возможно в данной ситуации. И так как невозможно включить все в одну книгу, приходится рассматривать в основном примеры, делая обобщения лишь тогда, когда это безусловно необходимо.

Выбор материала для книги такого объема, как эта, конечно, совсем произволен. Читатель найдет здесь развернутое исследование метода перевала (гл. 4, 5, 6), большая доля внимания уделена итерациям (гл. 8). С другой стороны, в отношении тауберовых теорем (в гл. 7) и асимптотики решений дифференциальных уравнений (гл. 9) эта книга дает лишь малую часть того, на что мог бы надеяться читатель. И, что еще хуже, здесь нет ничего из аналитической теории чисел, так как это потребовало бы слишком много места. С другой стороны, по аналитической теории чисел имеется так много замечательных книг, что в еще одном учебнике, пожалуй, нет необходимости. Но, несомненно, любому, кто хотел бы специализироваться в асимптотике, следовало бы изучить аналитическую теорию чисел с ее богатым выбором прекраснейших асимптотических задач.

Многие вопросы в этой книге изложены не наикратчайшим образом, так как в ней делается попытка показать хотя бы до некоторой степени, какие соображения приводят к определенному методу. Конечно, в этом отношении нельзя идти слишком далеко, ибо математик, разумеется, не может публиковать все содержимое своей корзины для бумаг.

В некоторых случаях даны два или даже несколько подходов к решению одной и той же задачи, чтобы читатель мог сравнить различные методы. Так, например, приведено несколько доказательств формулы Стирлинга; задача из раздела 4.7 решается второй раз в гл. 6; задача об итерациях синуса дважды решается в гл. 8.

В целом автор старался рассматривать оригинальные задачи и результаты, включая в книгу лишь те из хорошо известных фактов, которые совершенно необходимы. Конечно, в подобной области трудно решить, является ли что-нибудь сказанное действительно новым, особенно, когда идеи хорошо известны. По-видимому, прежде не были опубликованы результаты следующих разделов: 3.9, 4.7, вся гл. 6, гл. 8, начиная с раздела 8.4 и дальше, и, возможно, даже разделы 2.4, 9.2 и 9.3.

Эта книга написана не исключительно для математиков, но также для физиков и для инженеров, достаточно знающих анализ, включая элементы теории аналитических функций. В целом она не является легким чтением ни для какой категории читателей: изложение асимптотических методов трудно тем, что требует постоянного внимания и аккуратности. Для тех, кто найдет изложение книги слишком трудным, может быть, приятно знать, что главы этой книги можно изучать практически независимо друг от друга. Единственным исключением являются гл. 5 и 6, опирающиеся на гл. 4. Кроме того, введение, конечно, является фундаментом для всей книги.

Большинство глав начинается с простых вещей, а кончается довольно сложными примерами. В конце каждой главы дано несколько упражнений. Даже когда они очень трудны, для их решения не требуется методов, отличных от изложенных в тексте.

В этой книге почти не приводится никаких ссылок, потому что материал так стар, что дать ссылки точно было бы очень трудно. За краткой библиографией по асимптотическим методам мы отсылаем к книге Erdélyi A., Asymptotic Expansions, Dover Publ., 1956, которая содержит также намного более полное изложение методов асимптотики дифференциальных уравнений, чем гл. 9 этой книги.

Хочу предостеречь читателей: эта книга не может служить энциклопедией асимптотических оценок. В ней нельзя найти даже асимптотических формул для функций Бесселя. Внимание сосредоточено в основном на методах. Задачи сами по себе не так уж важны; их выбор основан скорее на поучительности, чем на важности.

Октябрь 1957. *Н. Г. де Брёйн*

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Что такое асимптотика?

Ответить на этот вопрос почти столь же трудно, как и ответить на вопрос „Что такое математика?“ Тем не менее мы попытаемся дать кое-какие объяснения слову „асимптотика“.

Часто случается, что нам нужно вычислить определенную каким-либо образом величину, а это вычисление приводит к чрезвычайно большому числу действий, так что их выполнение становится практически невозможным. В таких случаях настоящей находкой может оказаться какой-либо иной метод получения дополнительной информации об этой величине, позволяющий найти ее значение хотя бы приближенно. Обычно такой метод (как заметил Лаплас) „тем более точен, чем более необходим“; мы получаем тем более точное приближение к искомой величине, чем больше действий необходимо для ее прямого вычисления. В подобном положении мы говорим об асимптотической оценке или об асимптотической формуле.

Это определение, конечно, весьма расплывчато. Однако если мы попытаемся высказаться более точно, то в наше определение или не войдет многое из того, что стоило бы называть асимптотическими оценками, или войдет почти весь математический анализ. Трудно сформулировать определение таким образом, чтобы формула Стирлинга (1.1.1) относилась к асимптотическим оценкам, а такая формула, как $\int\limits_0^\infty (1+x^2)^{-1}\,dx = \pi/2$, не относилась. Очевидная причина, по которой последнюю формулу не называют асимптотической, состоит в том, что она относится к той части анализа, которая уже имеет свое название: интегральное исчисление. Вообще наиболее надежным и отнюдь не самым неясным является следующее определение: асимптотические оценки — это раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и рассмотренные в этой книге.

Типичной асимптотической формулой (и к тому же одной из наиболее давно известных) является уже упоминавшаяся выше формула Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}}=1. \tag{1.1.1}$$

Действительно, при любом n вычисление $n!$ не сопряжено ни с какими теоретическими трудностями, но чем больше n, тем больше число операций, необходимых для этого вычисления. Формула Стирлинга дает удобное приближение $e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$, и чем больше n, тем меньше относительная погрешность.

Различные доказательства формулы (1.1.1) и ее обобщений мы еще получим в этой книге (см. разд. 3.7, 3.10, 4.5, 6.9).

Приведем еще одну знаменитую асимптотическую формулу, намного более глубокую, чем предыдущая, и выходящую за рамки этой книги. Для любого положительного x обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x. Так называемый закон распределения простых чисел гласит, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{(x/\ln x)}=1 \tag{1.1.2}$$

(см., например, Ингам А. Е., Распределение простых чисел, М., 1936).

Приведенные выше формулы являются предельными соотношениями и в том виде, в каком они написаны, не пригодны для вычислительных целей. Действительно, из формулы (1.1.1) мы не можем сделать никакого заключения о величине $n!$ ни для одного частного значения n. Это утверждение относится к бесконечному числу значений n и, как это ни странно, ничего не говорит ни об одном частном значении n.

Чтобы полнее исследовать это явление, перепишем формулу (1.1.1) в виде

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=1,\quad \text{или}\quad f(n)\to 1\qquad (n\to\infty). \tag{1.1.3}$$

Эта формула говорит нам только о существовании функции $N(\varepsilon)$ со следующим свойством:

(1.1.4) при любом $\varepsilon > 0$ из $n > N(\varepsilon)$ следует $|f(n) - 1| < \varepsilon$.

Доказывая соотношение $f(n) \to 1$, обычно получают в явном или в скрытом виде какие-то сведения вида (1.1.4) с некоторой конструкцией соответствующей функции $N(\varepsilon)$. Ясно, что знание функции $N(\varepsilon)$ на самом деле дает некоторую численную информацию о $f(n)$. Однако, используя обозначение $f(n) \to 1$, мы отбрасываем эту информацию, так как знание конкретного вида функции $N(\varepsilon)$ заменяется при этом лишь утверждением, что такая функция существует.

В известной степени одной из причин успехов анализа является введение обозначения, отбрасывающего именно такую информацию и оставляющего то, что еще полезно. Даже на совершенно простой теореме, скажем на теореме $\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$, легко убедиться, что доказать существование функции $N(\varepsilon)$ значительно легче, чем построить новую $N(\varepsilon)$ по двум прежним.

1.2. Символ *O*

Несколько более слабый способ отбрасывания информации дает обозначение O, введенное Бахманом и Ландау[1]). Это обозначение отбрасывает уже не функцию, а только число. Это значит, что оно заменяет знание числа с некоторыми свойствами утверждением, что такое число существует. При обозначении O теряется значительно меньше информации, чем при обозначении lim, и оно все еще довольно удобно в обращении.

Допустим, что мы имеем следующую точную информацию о последовательности $\{f(n)\}$:

(1.2.1) $$|f(n) - 1| \leqslant \frac{3}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда, очевидно, мы имеем и соответствующую функцию $N(\varepsilon)$ со свойством (1.1.4), именно $N(\varepsilon) = 3\varepsilon^{-1}$. Поэтому

(1.2.2) $$f(n) \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

---

[1]) См. Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 2, Leipzig, 1927, S. 3—5.

Часто случается так, что информации (1.2.1) вполне достаточно для нашей задачи, а утверждение (1.2.2) непригодно для использования. Случается и так, что (1.2.1) остается полезным после замены 3 на 100 000 и вообще на любую другую постоянную. В таком случае нас устроило бы следующее утверждение:

$$(1.2.3)\quad \begin{cases} \text{Существует такое число } A \text{ (не зависящее от } n\text{),} \\ \text{что } |f(n)-1| \leqslant \dfrac{A}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{cases}$$

Логические связи между нашими формулами таковы:

$$(1.2.1) \Rightarrow (1.2.3) \Rightarrow (1.2.2).$$

Утверждение (1.2.3) символически записывается в виде

$$(1.2.4)\qquad f(n)-1=O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

В литературе встречается несколько вариантов определения символа O, но расхождения между ними совершенно несущественны. Обычно символом O заменяют слова „величина, которая по абсолютному значению не превосходит постоянной, умноженной на ...“. Мы будем использовать символ O в смысле, отвечающем словам „величина, которая по абсолютному значению не превосходит постоянной, умноженной на абсолютное значение ...“. Иными словами, если S — какое-либо множество, а f и φ — действительные или комплексные функции, определенные на S, то формула

$$(1.2.5)\qquad f(s)=O(\varphi(s)) \qquad (s \in S)$$

означает, что существует такое положительное число A, не зависящее от s, что

$$(1.2.6)\qquad |f(s)| \leqslant A\,|\varphi(s)| \qquad (s \in S).$$

Если, в частности, $\varphi(s) \neq 0$ при всех $s \in S$, то (1.2.5) означает просто, что отношение $f(s)/\varphi(s)$ ограничено на S.

Приведем несколько очевидных примеров:

$$x^2=O(x) \qquad (|x|<2),$$
$$\sin x=O(1) \qquad (-\infty<x<\infty),$$
$$\sin x=O(x) \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Чаще всего соотношения вида (1.2.6) интересуют нас не на всем множестве S, а только на той его части, где эти соотношения дают нетривиальную информацию. Например, в формуле $\sin x = O(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ стоит рассматривать лишь малые значения $|x|$. Однако неинтересные значения переменной, хотя они и несущественны для нас, вызывают иногда особые трудности.

Рассмотрим пример:

$$e^x - 1 = O(x) \qquad (-1 < x < 1).$$

Ясно, что здесь интересны лишь малые значения x. На всей прямой соотношение $e^x - 1 = O(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ не выполняется. Если указать, что интервал конечен, то размеры его уже не имеют значения.

С другой стороны, случается и так, что именно выбор интервала доставляет много забот. Тогда, чтобы избавиться от этих мелких неприятностей, пользуются некоторым видоизменением обозначения O, при котором теряется еще некоторая часть информации. Мы объясним это обозначение для случая, когда нас интересуют большие положительные значения x $(x \to \infty)$, но нетрудно ввести аналогичные обозначения и для $x \to -\infty$, $|x| \to \infty$, $x \to c$, $x \uparrow c$ (т. е. для x, стремящегося к c слева). Именно, мы будем писать

$$f(x) = O(\varphi(x)) \qquad (x \to \infty), \tag{1.2.7}$$

если существует такое число a, что

$$f(x) = O(\varphi(x)) \qquad (a < x < \infty).$$

Другими словами, формула (1.2.7) означает существование таких чисел a и A, что

$$|f(x)| \leqslant A|\varphi(x)| \quad \text{при} \quad a < x < \infty. \tag{1.2.8}$$

Примеры:

$$x^2 = O(x) \quad (x \to 0); \qquad x = O(x^2) \quad (x \to \infty);$$

$$e^{-x} = O(1) \quad (x \to \infty); \qquad (\ln x)^6 = O(x^{1/2}) \quad (x \to \infty);$$

$$\frac{1}{\ln x} = O(1) \quad (x \to \infty); \qquad \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = O(x) \quad (x \to \infty).$$

Во многих случаях формулы вида (1.2.7) можно сразу заменить формулами вида (1.2.5). Действительно, если справедливо соотношение (1.2.7), функции f и φ непрерывны на интервале $0 \leqslant x < \infty$ и сверх того $\varphi(x) \neq 0$ на этом интервале, то $f(x) = O(\varphi(x))$ $(0 \leqslant x < \infty)$. Это следует из того, что отношение f/φ непрерывно, а значит, и ограничено на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$.

Читателю следует заметить, что мы так и не определили, что означает само выражение $O(\varphi(x))$, а определили лишь смысл некоторой полной формулы, включающей это выражение. Ясно, что взятое изолированно выражение $O(\varphi(x))$ и не может быть определено, во всяком случае так, чтобы формула (1.2.5) была эквивалентна выполнению условия (1.2.6). В самом деле, $f(s) = O(\varphi(s))$, очевидно, влечет за собой $2f(s) = O(\varphi(s))$. Если бы $O(\varphi(s))$ само по себе что-либо означало, то мы получили бы $f(s) = O(\varphi(s)) = 2f(s)$, откуда $f(s) = 2f(s)$.

Неприятно, конечно, что приходится так неправильно употреблять знак равенства. Аналогичное положение может возникнуть, когда кто-нибудь, печатая на пишущей машинке, вместо слов „меньше, чем" начинает писать $= M$, например, так: $3 = M(5)$. На вопрос: „Что это значит — $M(5)$?" — он должен ответить: „Нечто, что меньше, чем 5". Таким образом, он быстро привыкает читать M как „нечто, что меньше, чем", приближаясь к тем самым словам, которые употребили мы, вводя соотношение (1.2.5). После этого он пишет: $M(3) = M(5)$ (меньшее, чем 3, является меньшим, чем 5), но, конечно, писать $M(5) = M(3)$ уже нельзя. Ничего страшного он не видит и в таких формулах: $4 = 2 + M(3)$, $M(3) + M(2) = M(8)$.

Символ O используется точно таким же образом, как описанный символ M. Разберем несколько примеров:

$$O(x) + O(x^2) = O(x) \qquad (x \to 0).$$

Это означает: для любой пары функций f и g, таких, что

$$f(x) = O(x) \quad (x \to 0), \qquad g(x) = O(x^2) \quad (x \to 0),$$

мы имеем

$$f(x) + g(x) = O(x) \qquad (x \to 0).$$