Б. Гелбаум

Контрпримеры в анализе

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б11

Б. Гелбаум
Б11 Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум – М.: Книга по Требованию, 2021. – 251 с.

ISBN 978-5-458-28471-4

ISBN 978-5-458-28471-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателя книга „Контрпримеры в анализе“ написана американскими математиками Б. Р. Гелбаумом и Дж. М. Олмстедом. В ней приведены многочисленные примеры из математического анализа и теории функций действительного переменного, а также — в небольшом количестве — примеры из топологии и функционального анализа. Многие из них хорошо известны и могут быть найдены в тех или иных источниках. Однако главным достоинством книги является именно то, что в ней собрано вместе большое количество полезных и интересных примеров.

Авторы называют примеры, помещенные в книге, контрпримерами, поясняя в предисловии различие между этими понятиями. Однако эти пояснения довольно неопределенны, и если их придерживаться, то многие результаты по желанию можно отнести как к примерам, так и к контрпримерам. По нашему мнению, основная цель большинства разбираемых примеров (по терминологии авторов — контрпримеров) состоит в том, чтобы обратить внимание студентов (и вообще читателей), изучающих математический анализ и теорию функций, на ряд „опасных“ вопросов и моментов, при встрече с которыми, не имея достаточного опыта, легко можно дать неправильные ответы или же неправильно представлять себе истинную суть дела. Этим, в частности, объясняется и заглавие книги — „Контрпримеры в анализе“.

В книге наряду с совсем простыми примерами имеется довольно много и сложных. Изложение зачастую ведется так, что подробных доказательств авторы не дают, а указывают лишь основные моменты в построении соответствующих примеров, оставляя читателю подробные выкладки и доказательства. Следует также сказать, что авторы весьма часто используют те или иные определения без напоминания и указания их даже в том случае, когда они приведены в книге, но совсем в другой главе и значительно раньше. Поэтому от читателя книги требуется определенное знакомство с основами математического анализа и теории функций. Для понимания многих разделов книги достаточно знания втузовского курса математики, но некоторые другие разделы требуют математической подготовки в объеме первых трех курсов математических факультетов университетов. В силу сказанного предлагаемая книга не является учебником, по которому следует начинать изучение анализа.

Заметим еще, что в книге не всегда отмечаются авторы примеров, и это частично оправдывается тем, что иногда их вообще трудно установить. Тем не менее нам представляется, что авторов некоторых широко известных примеров следовало бы указать (например, назвать именами их авторов функции Дирихле и Римана, о которых часто говорится в книге). В связи с этим в некоторых местах мы сделали соответствующие примечания. Кроме того, часть наших примечаний относится также к замеченным неточностям, если их исправление не было внесено нами в текст. О содержании книги можно судить по оглавлению, в которое вынесены полные формулировки приводимых примеров.

Мы думаем, что предлагаемая книга будет полезна широкому кругу лиц, изучающих математический анализ и теорию функций, особенно студентам-математикам университетов и педагогических вузов. Она будет, вероятно, небезынтересна и специалистам-математикам, в той или иной степени интересующимся анализом.

П. Л. Ульянов

ПРЕДИСЛОВИЕ

„Истинно ли утверждение S?" — это, пожалуй, наиболее типичный для математики вопрос, когда утверждение имеет вид: „Каждый элемент класса A принадлежит также классу B: $A \subset B$". Доказать, что подобное утверждение *истинно*, — значит доказать включение $A \subset B$. Доказать, что оно *ложно*, — значит найти элемент класса A, *не* принадлежащий классу B, иными словами, привести *контрпример*. Например, если утверждение S таково: „Каждая непрерывная функция дифференцируема в некоторой точке", то множества A и B состоят соответственно из всех непрерывных функций и всех функций, дифференцируемых в некоторых точках. Известный же пример Вейерштрасса непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции f (см. пример 8 гл. 3) является контрпримером для включения $A \subset B$, поскольку f является элементом A, не принадлежащим B. Рискуя впасть в чрезмерное упрощение, можно сказать, что математика (за исключением определений, утверждений и выкладок) состоит из двух частей — доказательств и контрпримеров, а математические открытия состоят в нахождении доказательств и построении контрпримеров. Бóльшая часть математических книг посвящена доказательству верных утверждений. В настоящей книге мы обращаемся к контрпримерам для ложных утверждений.

Вообще говоря, примеры в математике бывают двух типов — иллюстративные примеры и контрпримеры. Первые показывают, почему то или иное утверждение имеет смысл, а вторые — почему то или иное утверждение лишено смысла. Можно утверждать, что *любой* пример является в то же время контрпримером для *некоторого* утверждения, а именно для утверждения, что такой пример невозможен. Мы не желаем придавать термину *контрпример* столь универсальный смысл, но допускаем, что его значение достаточно широко, чтобы включить в себя все примеры, роль которых не ограничивается иллюстрацией верных теорем. Так, например, полином как пример непрерывной функции *не* есть контрпример, но полином как пример неограниченной или непериодической функции *является* контрпримером. Подобным же образом класс всех монотонных функций на ограниченном замкнутом интервале как класс интегрируемых функций *не* есть контрпример, однако этот же самый класс как пример функционального, но не векторного пространства *является* контрпримером.

Круг лиц, для которых предназначается эта книга, довольно широк и разнообразен. Бо́льшая часть материала доступна студентам, которые еще не закончили изучение начального курса анализа, а также может быть полезной преподавателям для иллюстрации ошибок, возможных при изучении анализа. Студенты старших курсов найдут в ней тонкости, которые обычно не рассматриваются в учебниках. Студенты-дипломники, готовящиеся к выпускным экзаменам, могут пополнить свой запас важных примеров, ограничивающих область справедливости изученных ранее теорем. Мы надеемся, что и специалисты-математики найдут некоторые места книги достойными внимания.

Собранные в этой книге контрпримеры почти целиком ограничиваются областью анализа, известной под названием теории функций действительного переменного. Однако среди них есть несколько примеров из области метрических и топологических пространств. В некоторых примерах используются также комплексные числа. Мы отнюдь не претендуем на полноту. Несомненно, многие читатели не встретят своих любимых примеров в этой книге, которая, нужно признаться, составлена по *нашему* собственному вкусу. Некоторые пропуски сделаны нами умышленно и объясняются либо недостатком места, либо *нашими* вкусами, другие вызывают и у нас искренние сожаления.

Эту книгу нельзя считать учебником, хотя она может служить полезным дополнением к некоторым учебным курсам. Если какое-либо место книги покажется читателю слишком трудным, мы советуем пропустить его и поискать что-либо более интересное дальше. Нами была предпринята попытка расположить материал по степени трудности при помощи расположения глав, выделения подборок внутри глав и порядка примеров. Предполагается, что читатель знаком с затронутыми в книге вопросами, ввиду чего материал излагается с минимумом пояснений. Каждая глава начинается с введения, где приводятся обозначения, терминология и определения, а также даются формулировки важнейших теорем. В конце книги помещена обширная библиография, на которую делаются частые ссылки в тексте. Эти ссылки предназначаются как для того, чтобы помочь читателю в отыскании дальнейшей информации, так и для того, чтобы воздать дань уважения авторам упомянутых сочинений. Если указания на авторство того или иного контрпримера отсутствуют, мы искренне сожалеем об этом. Все эти пропуски носят непреднамеренный характер.

В заключение мы выражаем надежду, что читатели этой книги получат столько же удовольствия и пользы, как и ее авторы. Наш собственный опыт дает нам основание утверждать, что математическая задача, решенная при помощи контрпримера, столь же увлекательна, как острая захватывающая пьеса. По нашему мнению, многие из самых глубоких и изящных математических открытий относятся к этому жанру.

Б. Р. Г.
Дж. М. Х. О.

Эрвин, Калифорния
Карбондейл, Иллинойс

ГЛАВА 1

СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Введение

Мы начинаем с введения некоторых основных определений и обозначений анализа, которые являются существенными для данной главы. Эти определения и обозначения даются в сокращенной форме с минимумом пояснений. Для более подробного ознакомления с ними следует обратиться к книгам [16], [17], [19] и [31] (см. библиографию).

Если A — произвольное множество элементов, то утверждение „*элемент a принадлежит множеству A*" символически записывается так: $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a *не* принадлежит множеству A. Если A и B — множества, то утверждение „*A является подмножеством множества B*" (символически $A \subset B$) означает, что каждый элемент x множества A принадлежит и множеству B; последнее равносильно импликации $x \in A \Rightarrow x \in B$ [1]). Выражение *тогда и только тогда* мы часто будем заменять символом $\Leftrightarrow$. Для удобства элементы множеств часто будут называться *точками*. Запись $\{a, b, c, \ldots\}$ обозначает множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$. Символ $\{\ldots | \ldots\}$ используется для обозначения множества, общий элемент которого записывается между первой фигурной скобкой и вертикальной чертой, а определяющие это множество свойства записываются между вертикальной чертой и второй фигурной скобкой. Объединение и пересечение двух множеств A и B определяются следующим образом:

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A,\ x \in B\},$$

---

[1]) Знак $\Rightarrow$ следует понимать как „влечет". — *Прим. перев.*

при этом запятая в последней формуле заменяет союз „*и*". Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}.$$

Если рассматриваются множества, которые все являются подмножествами некоторого основного, универсального множества S, то разность $S \setminus A$ называется дополнением множества A и обозначается символом A'. Вообще же разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B относительно A.

Для обозначения пустого множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента, используется символ $\varnothing$. Если A и B — два непустых множества, то их декартовым произведением $A \times B$ называется множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, а $b \in B$, так что

$$A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Если $(a, b) \in A \times B$, то a называется первой координатой элемента (a, b), а b — его второй координатой; первая и вторая координаты также называются проекциями. Любое подмножество ρ произведения $A \times B$ называется отношением из A в B. Такое отношение f называется функцией из A в B, если никакие два различных элемента из f не имеют одинаковых первых координат. Условимся обозначать выражения „*существует*" или „*существуют*" квантором существования $\exists$, а слова „*такие, что*" — символом $\ni$. Тогда область (или множество) определения $D = D_f$ и область (или множество) значений $R = R_f$ функции f определяются так:

$$D = D_f \equiv \{x \mid \exists y \ni (x, y) \in f\},$$
$$R = R_f \equiv \{y \mid \exists x \ni (x, y) \in f\}.$$

Будем говорить, что функция f (или отображение) определена на A, если ее множество определения совпадает с A; в общем же случае будем говорить, что f определена в A. Будем называть f функцией со значениями на B, если ее множество значений совпадает с B; в общем же случае будем говорить о функции f со значениями в B.

Говорят, что функция f из A в B осуществляет взаимно однозначное соответствие между A и B, если она является функцией, определенной на A со значениями на B и притом такой, что никакие два различных элемента из f не имеют одинаковых вторых координат. **Значениями** функции f называются элементы множества R_f. Если функция f осуществляет взаимно однозначное отображение множества A на множество B, то функция

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\},$$

которая получается, если поменять местами область определения и область значений функции f, называется обратной к f.

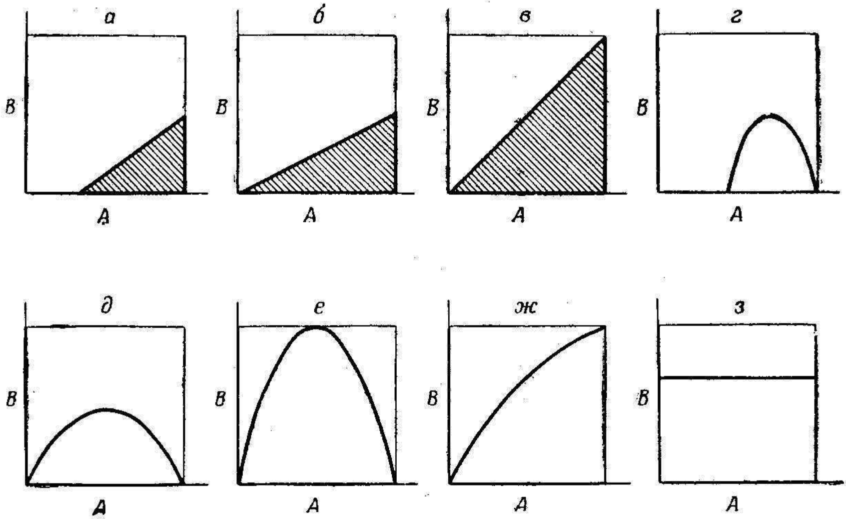

Рис. 1.

а — отношение из A со значениями в B; *б* — отношение на A со значениями в B; *в* — отношение на A со значениями на B; *г* — функция из A со значениями в B; *д* — функция на A со значениями в B; *е* — функция на A со значениями на B; *ж* — взаимно однозначное соответствие; *з* — постоянная функция.

Постоянной функцией называется функция, множество значений которой состоит из одной точки.

Различные типы отношений и функций указаны на рис. 1. Во всех случаях в качестве множеств A и B взят замкнутый единичный интервал $[0, 1]$, состоящий из всех действительных чисел x, таких, что $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть f — функция, определенная на A и принимающая значения в B. Мы будем записывать ее двумя следующими способами:

$$f\colon A \to B,$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Если x — произвольный элемент множества A, то существует в точности один элемент y множества B, такой, что $(x, y) \in f$. Этот элемент y множества B мы будем обозначать символом $f(x)$ и записывать

$$y = f(x).$$

Другие способы обозначения функции:

$$f\colon y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B$$

$$f\colon x \in A, \quad f(x) \in B;$$

$$y = f(x)\colon x \in A, \quad y \in B.$$

Если же из контекста ясно, что обозначение $f(x)$ представляет *функцию*, а не просто одно из ее значений, то мы будем пользоваться такой записью:

$$f(x)\colon x \in A.$$

Если f — функция с областью определения D, а S является подмножеством D, то сужением функции f на S называется функция g, область определения которой есть S и такая, что

$$x \in S \Rightarrow g(x) = f(x).$$

Множество значений сужения f на S мы будем обозначать символом $f(S)$. Таким образом,

$$f(S) = \{y \mid \exists x \in S \ni f(x) = y\}.$$

Если g является сужением f, то f мы будем называть продолжением g.

Пусть f и g — такие функции, что множество значений g является подмножеством области определения f. Тогда композицией $f \circ g$ функций f и g называется функция, значение которой во всякой точке x области определения функции g есть $f(g(x))$; короче, композицией *функции* $f(u)$ и *функции* $u = g(x)$ называется *функция* $y = f(g(x))$ [1]. (Следует

[1] В советской математической литературе вместо термина „композиция" часто используется термин „суперпозиция".— *Прим. ред.*