

Владимир Трошин

**200 заданий в рисунках. Черчение
одним росчерком. Перестановки,
операции, маневры**



ЛитРес: Самиздат
Москва

УДК 51
ББК 74я7
Т76

Трошин В. В.

200 заданий в рисунках. Черчение одним росчерком.
Перестановки, операции, маневры / В. В. Трошин —
Москва: ЛитРес: Самиздат, 2020. — 123 с.

ISBN 978-5-532-06805-6

Сборник заданий могут использовать учителя математики как раздаточный материал во внеклассной работе или на элективных курсах по математике. Для этого нужно скачать его в формате PDF, распечатать страницы с заданиями и разрезать их на карточки. Кроме того, он может заинтересовать любителей головоломок и логических задач. Комфортнее использовать издание в формате PDF. Решение заданий поможет скоротать время в дальней дороге или с пользой провести время на отдыхе. Задания по занимательной математике являются альтернативой кроссвордам и сканвордам, широко представленным в периодической печати.

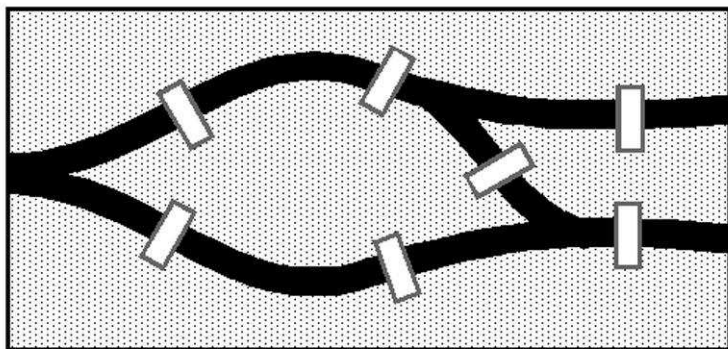
ISBN 978-5-532-06805-6

© Трошин В. В., текст, 2020
© Omiko Trading LTD., оформление, 2020

Одним росчерком

Задачи данного раздела можно определить как *непрерывное рисование* или построение фигур, вычерчиваемых одним росчерком, без отрыва карандаша от бумаги. Исторически подобные задачи восходят к задаче о кенигсбергских мостах, поставленной в 1736 году великим математиком Леонардом Эйлером. Он посвятил ей целое математическое исследование, в котором подчеркнул, что кроме той ветви геометрии, которая рассматривает величины и способы их измерения, есть и другая область, занимающаяся порядком расположения частей фигуры друг относительно друга, отвлекаясь от их размеров. В дальнейшем эта область геометрии получила название – топология.

Во времена Эйлера, протекающая в Кенигсберге река, делилась на два рукава омывающие острова, которые соединялись семью мостами между собой и с берегами реки в соответствии со схематическим рисунком.

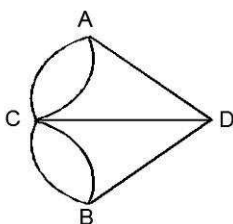


Можно ли совершая прогулку по городу, пройти все семь мостов, не проходя ни по одному из них дважды?

Этот пример показывает, как абстрактность математики позволяет создать математическую модель конкретной задачи.

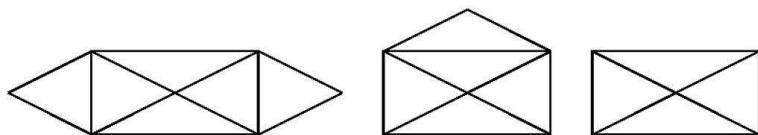
Протяженность берегов, островов и мостов не играют в задаче никакой роли, важным является только их взаимное расположение.

Превратив берега и острова в точки, а мосты в линии, соединяющие их, получим следующую равносильную задачу: *начертить непрерывным движением фигуру, изображенную на втором рисунке, не проводя ни одну линию дважды*. Здесь точки A и B изображают берега, точки C и D – острова, а линии, соединяющие эти точки – мосты.



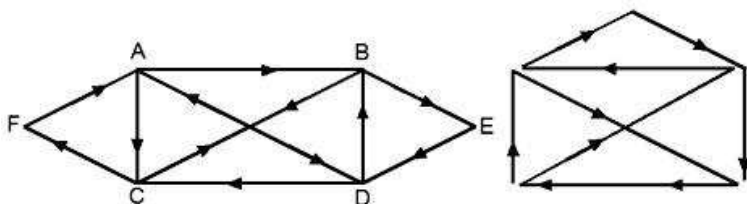
В результате исследования, оказалось, что попытки вычертить различные плоские фигуры непрерывной линией без повторения отдельных участков приводят к неодинаковым результатам. Некоторые фигуры удастся вычертить независимо от того, с какой точки начинаем вести линию, другие вычерчиваются только в тех случаях, когда линия начата только с определенной точки и, наконец, существуют фигуры, которые вовсе не поддаются вычерчиванию одной непрерывной линией.

Рассмотрим изображения трех различных «конвертов»: с двумя открытыми боковыми клапанами; с верхним раскрытым клапаном; заклеенный конверт.



Эти три, незначительно отличающиеся друг от друга, изображения иллюстрируют перечисленные три различных варианта возможных исходов решения задачи.

Первую фигуру можно начать вычерчивать с любой вершины, второй «конверт» – только с одного из нижних углов, заканчивая в противоположном нижнем углу. Неподдающейся оказывается третья фигура, хотя на первый взгляд она проще, так как содержит меньшее количество линий.



Теория этого вопроса разработана давно и подробно, поэтому приведем без доказательства основные положения.

Четной вершиной фигуры назовем такую ее вершину, в которой сходится четное число линий, а если линий сходится нечетное число, то вершину назовем *нечетной*. Для того чтобы установить можно ли начертить фигуру непрерывным движением без повторного прохождения отдельных участков, следует прежде всего установить, имеются ли у фигуры нечетные вершины и сколько их. Всякая четная вершина заведомо проходима: условно говоря, сколько раз линия пришла в нее, столько же раз и вышла из этой точки. С нечетной вершиной дело обстоит иначе. С такой вершины можно начать движение или закончить его в ней, так как путей, ведущих к нечетной вершине, нечетное число. Поэтому, *если нечетных вершин больше двух, то такую фигуру начертить непрерывным движением нельзя*. В случае, *когда фигура имеет две нечетных вершины, ее вычерчи-*

вание нужно начинать от одной из таких вершин и заканчивать в другой. Действительно, непрерывная линия имеет ровно два конца и этим многое объясняется.

Можно доказать, что какова бы ни была фигура, нечетных вершин в ней либо нет совсем, либо имеется четное их число. Свободная точка, к которой еще не прочерчено ни одной линии считается четной. После проведения первой линии, соединяющей две свободные точки, появляются две нечетных вершины. И далее, любая новая линия соединяет две точки. Если это были четные точки, то они станут нечетными, если соединяются нечетные точки – они становятся четными, наконец, при соединении четной и нечетной точек, каждая из них меняет свою четность, не меняя общую картину. Следовательно, нечетные точки могут появляться только парами.

Сгруппируем имеющиеся закономерности:

Вывод 1. *Во всякой фигуре число нечетных вершин четно.*

Вывод 2. *Фигуру, имеющую более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком». Фигуру, имеющую ровно $2n$ нечетных вершин, можно полностью обойти по n отдельным маршрутам.*

Вывод 3. *Фигуру, имеющую всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.*

Вывод 4. *Если все вершины фигуры четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги, проводя по каждому ребру только один раз, начертить эту фигуру. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.*

Фигура, которую можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, называется **универсальной**.

На математической модели кёнигсбергских мостов все четыре вершины нечетные, откуда следует, что задача Эйлера о кенигсбергских мостах не имеет решения.

Поучительная сторона предлагаемых ниже задач состоит в исследовании, возможно или нет решение данной задачи, прежде чем при-

ниматься за само решение. Но и зная, что задача разрешима, найти решение не всегда просто.

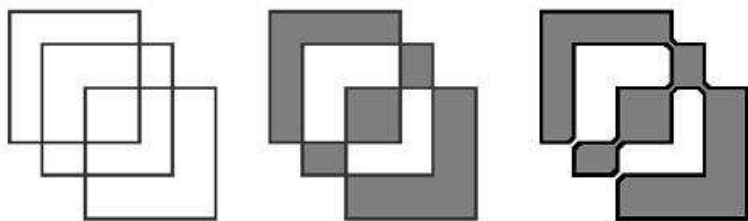
Можно воспользоваться, например, таким правилом: *«Все уже проведенные линии заданной фигуры надо считать отсутствующими и при выборе очередной линии следить за тем, чтобы фигура сохраняла целостность, то есть не распадалась, если эта линия также будет изъята из чертежа»*.

Если при вычерчивании «конверта» с двумя открытыми боковыми клапанами начнем идти по пути $ABCD$ и следующим шагом проведем линию DA , то останутся недочерченными два треугольника – ACF и BDE , которые между собой не связаны – фигура распадается. Тогда закончив фигуру AFC , мы не сможем перейти к фигуре BDE , так как не останется линий, их связывающих.

Следовательно, пройдя путь $ABCD$, нельзя далее идти по линии DA , а следует сначала пройти путь $DBED$ и затем по оставшейся линии DA перейти к фигуре AFC .

Таким образом, приступая к решению задач подобного рода легко можно отсеять заведомо неразрешимые, но зная о возможности решения, подумать придется. Многие из приведенных задач допускают решение с соблюдением дополнительного требования – чтобы у проводимой линии не было самопересечений. Такое условие в частности ставил Льюис Кэрролл (его задача **21**).

Подобные задачи решаются с применением метода Томаса О'Бейрна. Раскрасив области чертежа в «шахматном порядке» в два цвета (черный и белый), необходимо разъединить фигуру в некоторых вершинах таким образом, чтобы темная закрашенная часть оказалась «односвязной». Тогда периметр закрашенной области и будет искомой линией.



Решение без самопересечений считается более сложным и более изящным, поэтому по возможности старайтесь найти такое решение, даже если об этом не сказано в условии задачи. В силу симметрии и красоты многих фигур, задачи имеют и эстетическую ценность, развивая чувство прекрасного.

Большое количество однотипных задач объясняется стремлением обеспечить возможность выбора задания необходимого уровня сложности, чтобы посредством постепенного усложнения совершенствовать пространственные представления.

Количественно меньшая часть задач раздела практически относится к этой же теме – проведение непрерывных линий без отрыва карандаша от бумаги, но имеет свою индивидуальную окраску. Включение их в подборку позволяет показать игру фантазии в словесной интерпретации, обыгрывающей по существу одну и ту же основную идею. Поэтому рассмотрим задачи с прохождением мостов, подобные задаче Эйлера, с которой началось исследование этой темы; аналогичные им задачи о прохождении комнат в подвалах и замках. При решении можно будет, абстрагируясь от частных деталей, перевести конкретную задачу с рекой, мостами, островами, или дверями и комнатами в соответствующую фигуру из точек и линий и решить вопрос для полученной фигуры, но можно искать решение и без трансформации условия.

Задачи с плоскими фигурами имеют выход в трехмерное пространство, получаются каркасные трехмерные модели, которые в идеале необходимо согнуть из прямолинейного отрезка проволоки,

не проходя никакое ребро дважды. Эти задачи тоже можно решать с карандашом на плоском изображении трехмерной модели, тем более что все закономерности сохраняются. Например, из пяти правильных многогранников, только октаэдр имеет четные вершины и допускает требуемое построение.

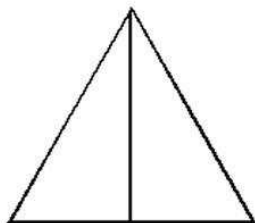
Еще несколько задач предлагают вам провести заданную непрерывную фигуру в соответствии с дополнительными условиями. Это головоломки, требующие индивидуального подхода и не имеющие каких-то общих схем решения. Наконец, даже в такой серьезной области математики возможны задачи-шутки, и хороший математик должен обладать чувством юмора.

Так как задачи не типовые, то в конце раздела приводятся ответы и, при необходимости, решения.

Ответы мы будем давать в двух видах: показывая стрелками направление движения при проведении линии или утрированно закругляя линию и делая разрывы в тех местах, где хотим подчеркнуть отсутствие самопересечения.

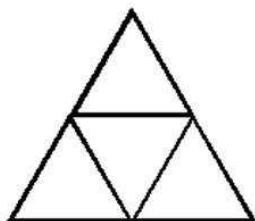
Одним росчерком

1



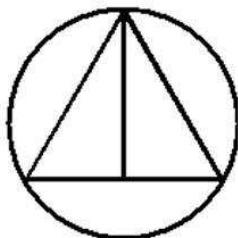
Требуется нарисовать фигуру одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги, не делая никаких лишних штрихов и не проводя дважды ни одной линии.

2



Требуется нарисовать фигуру одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги, не делая никаких лишних штрихов и не проводя дважды ни одной линии.

3



Требуется нарисовать фигуру одним росчерком, не отрывая карандаша от бумаги, не делая никаких лишних штрихов и не проводя дважды ни одной линии.