

Доклады Академии наук СССР

Новая серия. Том 33. № 1-3

УДК 93
ББК 63.3
Д63

Д63 Доклады Академии наук СССР: Новая серия. Том 33. № 1-3 / – М.: Книга по Требованию, 2023. – 284 с.

ISBN 978-5-458-54180-0

ISBN 978-5-458-54180-0

© Издание на русском языке, оформление
«УОУО Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

1 октября

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

акад. А. А. Борисьяк, акад. С. И. Вавилов, акад. А. М. Деборин,
акад. А. Н. Колмогоров, акад. А. А. Рихтер, акад. А. Е. Ферман,
акад. А. Н. Фрумкин

НОВАЯ СЕРИЯ

9-й год издания

1941

ТОМ XXXIII, № 1

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Л. А. Люстерник. Об одной краевой задаче в теории нелинейных дифференциальных уравнений 5
И. М. Либерман. Геодезические линии на выпуклой поверхности положительной гауссовой кривизны 9
А. Г. Пинскер. О нормированных K -пространствах 12

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- В. Г. Гоголадзе. Волны Релея на границе двух твердых упругих сред 16

ФИЗИКА

- В. В. Чердынцев. О распространении четных и нечетных атомных ядер 19
М. М. Сущинский. Зависимость интенсивности линий комбинационного рассеяния в растворах от концентрации 21

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- А. Я. Сочнев. Новый метод теоретического исследования магнитного поля электромагнитных систем 25

ХИМИЯ

- Н. И. Кобозев и Л. И. Каштанов. Кинетика и энергетика высокотемпературного крекинга метана до ацетиленца 29
Е. С. Вассерман и А. Б. Бедридзева. О механизме получения простых виниловых эфиров 34
В. П. Гольмов и В. А. Казанский. О реакции образования этилового эфира циклобутан-(1,1)-дикарбоновой кислоты по Кижнеру 37
А. Ф. Беляев и А. Е. Беляева. О горении гремучей ртuti при давлениях меньших атмосферного 41
В. И. Кузнецов. Об отыскании цветных реакций на сурьму, галлий и другие элементы 44

ГЕОХИМИЯ

- Н. К. Разумовский. О значении логарифмически-нормального закона распределения частот в петрологии и геохимии 48
Ш. Е. Каминская. Титан в главных зональных почвах Европейской части СССР 50

ГЕОЛОГИЯ

- Б. П. Кротов.** Роль и значение эпейрогенических движений при формировании месторождений железных и марганцевых руд и бокситов 54
В. Н. Тихий. Воронежский карбон 57
В. Г. Левинсон. Выход осадочного палеозоя в центральной части Тургайского пролива 60

МИНЕРАЛОГИЯ

- В. И. Герасимовский.** Новый минерал Ловозерских тундр—металлопарит 61
Л. М. Миропольский. О примесях бария и кальция в целестине 64

БИОХИМИЯ

- В. С. Буткевич,** член-корреспондент Академии Наук СССР и **Н. А. Колесникова.** Об образовании аммиака при фиксации молекулярного азота азотобактером 66
А. И. Смородицев и В. П. Жигалов. Сравнительное влияние папаина и пепсина на белки мяса и клейковины 70

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- Н. Я. Федорова.** Испытание картофеля на фитопфтороустойчивость путем непосредственного заражения растений 73
Т. В. Вобликова. Интенсивность фотосинтеза и дыхания листа в зависимости от возраста 76
Р. Х. Турецкая. Влияние возраста маточного растения на укоренение черенков 78

МИКРОБИОЛОГИЯ

- А. Л. Бродский.** Антагонистические отношения между почвенными инфузориями и почвенным патогенным грибом 81

ГИДРОБИОЛОГИЯ

- С. П. Жданов.** Некоторые особенности зимнего гидрохимического режима р. Волги в 1939 и 1940 гг. и их объяснение (о причинах замора рыб в Волге) 84

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОРФОЛОГИЯ

- В. Н. Жеденов.** Конечные формообразовательные процессы в области foramen ovale сердца плода у высших млекопитающих животных и человека 89

ПАЛЕОНТОЛОГИЯ

- В. Громова.** Фауна верхнепалеолитической стоянки Мальта близ Иркутска 94

Отв. редактор академик А. Е. Ферсман

Подписано к печати 8/Х 1941 г. Л150280. Объем 6 печ. л.—58 000 тип. зн. в печ. л.
Тираж 2100 экз. Цена 5 руб.

16-я типография треста «Полиграфнига», Москва, Трехпрудный пер., 9. Заказ 1397.

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 I 1941)

Пользуясь понятием линейных в малом $(\infty - h)$ -мерном многообразии⁽¹⁾, можно дать строгое обоснование методу продолжения Пуанкаре⁽²⁾. Исследуем для конкретности уравнение

$$y'' + \varphi(x, y, y') + \lambda y = 0, \quad (1)$$

где φ — трижды непрерывная функция 3 аргументов, удовлетворяющая условиям:

$$\text{а) нечетности: } \varphi(x, -y, -y') = -\varphi(x, y, y'), \quad (2)$$

$$\text{б) } |\varphi(x, y, y')| \leq N(|y|^{4-\varepsilon} + |y'|^{\frac{3}{2}-\varepsilon} + 1). \quad (3)$$

N и ε — фиксированные положительные числа. Совокупность функций φ , удовлетворяющих поставленным выше условиям, обозначим $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Так как $\varphi(x, 0, 0) = -\varphi(x, 0, 0) \equiv 0$, то уравнение (1) при любом λ имеет тривиальное решение $y \equiv 0$. Будем называть те числа λ , при которых уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее условиям:

$$y(a) = y(b) = 0, \quad \int_a^b y^2 dx = 1, \quad (4)$$

собственными значениями для (1), а сами решения $y(x)$ — нормированными собственными функциями. Нормированные собственные функции $y(x)$, обращающиеся в нуль внутри (a, b) ровно $(k-1)$ раз, обозначим: $y(x) = z(k, \varphi)$, а соответственное собственное значение: $\lambda = \lambda(y) = \lambda[z(k, \varphi)]$.

Пример: для $\varphi \equiv 0$, $z(k, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(a + k \frac{\pi}{b-a} x\right)$.

Теорема. Для любого $\varphi \in \mathfrak{N}(N, \varepsilon)$ и любого целого положительного k существует, по крайней мере, одна функция $z(k, \varphi)$.

В дальнейшем, говоря о числе собственных функций $z(k, \varphi)$, мы будем иметь в виду число пар этих функций, $\pm z(k, \varphi)$, отличающихся знаком. Для любого k при $\varphi = \varphi_0 \equiv 0$ число $z(k, \varphi_0)$ равно 1. Нашей целью является ввести в функцию φ параметр t так, чтобы при $t=0$,

$\varphi_t = \varphi_0 \equiv 0$, при $t=1$, $\varphi(t) = \varphi$, и чтобы при изменении t от 0 до 1 число функций $z(k, \varphi_t)$ менялось лишь на четное число. Число таких функций будет нечетно, значит отлично от нуля.

Заметим, что если при непрерывном изменении φ , функция $y = z(k, \varphi)$ непрерывно меняется вместе с y' , то число нулей $z(k, \varphi)$ внутри (a, b) , a , значит, и k , не меняется. В самом деле для $y = z(k, \varphi)$ и любого $x_0 \in (a, b)$ не может быть одновременно $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, ибо единственное решение (1), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, есть тривиальное $y \equiv 0$. Поэтому число нулей $z(k, \varphi)$ при описанном изменении φ не может меняться.

1. Обозначим через $\{z(k, \varphi)\}$ совокупность всех $z(k, \varphi)$ при фиксированном k для всех $\varphi \in \mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Лемма 1. Множество $\{z(k, \varphi)\}$ компактно в смысле равномерной сходимости самих функций $y = z(k, \varphi)$ вместе с их производными.

Эта лемма вытекает из следующих предложений, которые мы приведем без доказательства: 1) множества всех функций $y \in \{z(k, \varphi)\}$ и их производных равномерно ограничены на $[a, b]$ некоторой константой K ; 2) при фиксированном k множество собственных значений $\lambda(y)$ для всех y из $\{z(k, \varphi)\}$ ограничено. Отсюда и из уравнения (1) и условия (3) вытекает равномерная ограниченность всех $\frac{d^2}{dx^2} z(k, \varphi)$. Это в свою очередь доказывает компактность множества функций $\{z(k, \varphi)\}$ в смысле равномерной сходимости их вместе с производными на $[a, b]$.

Введем на $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$ следующую метрику: для φ и φ_1 из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$

$$\rho(\varphi, \varphi_1) = \|\varphi - \varphi_1\| = \max \{ |\varphi(x, y, y') - \varphi_1(x, y, y')|,$$

$|\varphi^\alpha(x, y, y') - \varphi_1^\alpha(x, y, y')| \}, a \leq x \leq b, |y| \leq K, |y'| \leq K, \alpha = 1, 2, \dots, 20$
(Через φ^α мы обозначили 20 частных производных φ по всем аргументам первых трех порядков).

В дальнейшем через $[y(x), \lambda]$ будем называть комплекс, состоящий из функции $y(x)$ и константы λ . Ортогональность $[y, \lambda]$ и $[y_1, \lambda_1]$ означает равенство $\int_a^b y y_1 dx + \lambda \lambda_1 = 0$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}$ совокупность всех аналитических φ из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Пусть φ и $\varphi + \Delta\varphi$ — два близких элемента из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Будем искать $[y + \delta y = z(k, \varphi + \Delta\varphi), \lambda + \delta\lambda = \lambda(y + \delta y)]$ близкое к $[y = z(k, \varphi), \lambda = \lambda(y)] \cdot [\delta y, \delta\lambda]$ определится из уравнений:

$$\begin{aligned} \delta y'' + \varphi(x, y + \delta y, y' + \delta y') - \varphi(x, y, y') + \lambda \delta y + \delta\lambda \cdot y + \\ + \Delta\varphi(x, y + \delta y, y' + \delta y') = 0; \quad \delta y(a) = \delta y(b) = 0, \\ \int_a^b y \delta y dx + \frac{1}{2} \int_a^b \delta y^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим

$$L(z, \mu) = z'' + \varphi_y z + \varphi_{y'} z' + \lambda z + \mu y,$$

$$L_2(z, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi_{yy} z^2 + 2\varphi_{yy'} z z' + \varphi_{y'y'} z'^2] + \mu z.$$

Уравнение (4) можно записать в виде:

$$L(\delta y, \delta\lambda) = -\Delta\varphi(x, y, y') - L_2(\delta y, \delta\lambda) - \Delta\varphi_y \delta y - \Delta\varphi_{y'} \delta y' + \dots \quad (5)$$

Рассмотрим приближенную к (4) — (5) систему

$$L(\delta y, \delta \lambda) = -\Delta \varphi, \quad \delta y(a) = \delta y(b) = 0, \quad \int_a^b y \delta y dx = 0. \quad (6)$$

Выделим следующие возможные случаи:

Случай I. Однородная система

$$L(z, \mu) = 0, \quad z(a) = z(b) = 0, \quad \int_a^b y z dx = 0 \quad (7)$$

имеет только тривиальное решение $[z \equiv 0, \mu = 0]$. Неоднородная система (6) имеет единственное решение $[\delta y_0, \delta \lambda_0]$, малое вместе с $\|\Delta \varphi\|$. Полагая $[\delta y_0, \delta \lambda_0]$ первым приближением в решении системы (4) или (5) методом последовательных приближений при достаточно малом $\|\Delta \varphi\|$, найдем точные решения $[\delta y, \delta \lambda]$ системы (4, 5). Для $\varphi + \Delta \varphi$, достаточно близких к φ , существует, притом единственная, функция, $y + \delta y = z(k, \varphi + \Delta \varphi)$, близкая к $y = z(k, \varphi)$.

2. Однородная система (7) имеет одно независимое нетривиальное решение $[z, \mu]$. Обозначим через $[\bar{z}, \bar{\mu}]$ решение сопряженной системы [получаемой из (7) заменой φ_y на $-\varphi_y$]. Будем искать $[\delta y, \delta \lambda]$ в виде: $\delta y = cz + \delta_1 y$, $\delta \lambda = c\mu + \delta_1 \lambda$, где $[\delta_1 y, \delta_1 \lambda]$ ортогонально $[z, \mu]$. Так как $L(z, \mu) = 0$, то в разложении (5) члены первого порядка относительно c пропадают. Поэтому в качестве первого приближения возьмем в разложении (5) наряду с членами первого порядка относительно $\delta_1 y, \delta_1 \lambda$ члены второго порядка относительно c :

$$\left. \begin{aligned} L(\delta_1 y, \delta_1 \lambda) &= -\Delta \varphi - c^2 L_2(z, \mu); & \delta_1 y(a) &= \delta_1 y(b) = 0, \\ \int_a^b y \delta_1 y dx &= -\frac{1}{2} c^2 \int_a^b z^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для того, чтобы система (8) имела решение, необходимо и достаточно,

чтобы $\left[-\Delta \varphi - c^2 L_2(z, \mu), -\frac{1}{2} c^2 \int_a^b z^2 dx \right]$ было ортогонально решению

сопряженной системы $[\bar{z}, \bar{\mu}]$:

$$\int_a^b \left\{ \bar{z} [\Delta \varphi + c^2 L_2(z, \mu)] + \frac{c^2}{2} \bar{\mu} z^2 \right\} dx = 0. \quad (9)$$

Выделим случаи:

Случай II₁. Функционал $d = \int_a^b \left[\bar{z} L_2(z, \mu) + \frac{1}{2} \bar{\mu} z^2 \right] dx \neq 0$.

Из (9) найдем два значения c , оба действительные или мнимые. При этом, умножив $\Delta \varphi$ на -1 , мы вместо вещественных c получим мнимые и обратно. Подставив найденные c в (8), мы получим для этой системы единственное решение $[\delta_1 y, \delta_1 \lambda]$. Таким образом мы получим два решения приближенной системы: $[\pm cz + \delta_1 y, \pm c\mu + \delta_1 \lambda]$, оба одновременно вещественных или оба комплексных, причем замена $\Delta \varphi$ на $-\Delta \varphi$ дает переход

от вещественных к комплексным решениям и обратно. Приняв полученные решения за первые приближения к решению системы (4), мы получим соответственно для достаточно малых $\Delta\varphi$ пару точных решений $[\delta y, \delta\lambda]$ системы (4), оба вещественных или оба комплексных. Таким образом для $\varphi + \Delta\varphi$, близких к φ , имеется пара вещественных или комплексных $z(k, \varphi + \Delta\varphi)$, близких к $z(k, \varphi)$; $y = z(k, \varphi)$ нужно считать двукратной собственной функцией. Если для данного φ имеется конечное число $z(k, \varphi)$, для которых имеет место случай I или II, то для всех близких $\varphi + \Delta\varphi$ число вещественных функций $z(k, \varphi + \Delta\varphi)$ будет одной четности.

Случай Π_2 . $d = 0$.

Случай III. Система (7) имеет два независимых решения.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}^*$ совокупность тех $\varphi \in \overline{\mathfrak{N}}$, у которых для одного из $z(k, \varphi)$ имеет место случай Π_2 или III.

Лемма 4. Если для $\varphi \in \overline{\mathfrak{N}}$ имеет место бесконечное множество $z(k, \varphi)$, то φ входит в $\overline{\mathfrak{N}}^*$.

Лемма 5. $\overline{\mathfrak{N}}^*$ есть линейное в малом $(\infty - 2)$ -мерное многообразие в $\overline{\mathfrak{N}}$.

В самом деле, наличие случая Π_2 требует двух независимых «линейных в малом» условий: 1) наличие нетривиального решения системы (7) или, что то же самое, совпадение нуля с простым Eigenwert'ом соответственного линейного оператора; 2) равенство нулю функционала d ; для случая III требуются два «линейных в малом условия» — наличие в нуле двукратного Eigenwert'a для (7). $\overline{\mathfrak{N}}^{**} = \overline{\mathfrak{N}} - \overline{\mathfrak{N}}^*$ связно, так как $(\infty - 2)$ -мерное линейное в малом многообразие $\overline{\mathfrak{N}}^*$ не разбивает $\overline{\mathfrak{N}}$. Элемент $\varphi_0 \equiv 0$ входит в $\overline{\mathfrak{N}}^{**}$. Для φ_0 имеется одно $z(k, \varphi_0)$ при любом k . Соединяя любое $\varphi \in \overline{\mathfrak{N}}^{**}$ с φ_0 кривой, проходящей внутри $\overline{\mathfrak{N}}^{**}$, получим сохранение нечетности числа $z(k, \varphi)$ при движении вдоль кривой. Итак, число $z(k, \varphi)$ для любого $\varphi \in \overline{\mathfrak{N}}^{**}$ не равно нулю. $\overline{\mathfrak{N}}^{**}$ всюду плотно на $\overline{\mathfrak{N}}$, а значит и на $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$. Совокупность всех $\{z(k, \varphi)\}$, как выше было доказано, компактно. Предельным переходом докажем наличие $z(k, \varphi)$ и для всех φ из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Поступило
30 I 1941

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Люстерник, ДАН, XXVII, № 8, (1940). ² N. Poincaré, Trav. of the Americ. Math. Soc., 6, 266 (1905).

И. М. ЛИБЕРМАН

**ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 VII 1941)

В этой заметке я рассматриваю метрику m положительной гауссовой кривизны, заданную на сфере, и геодезические линии в этой метрике. Доказывается теорема

Теорема. Существует положительное число N такое, что всякий отрезок геодезической линии, имеющий длину большую, чем N , имеет самопересечения.

Чтобы не усложнять доказательства, мы будем предполагать в дальнейшем, что метрика m — аналитическая.

Доказательство. Зададимся последовательностью сходящихся к нулю положительных чисел ε_i ($i = 1, 2, \dots$). Каждому i сопоставим конечное покрытие R_i нашей сферой открытыми множествами диаметра, меньшего чем ε_i . Число элементов покрытия R_i обозначим через N_i . Пусть $\frac{p}{2}$ будет точная верхняя граница длин всех отрезков геодезических линий, не имеющих сопряженных точек. Вследствие положительности гауссовой кривизны такая граница существует.

Допустим, что наша теорема не верна. Тогда существует последовательность отнесенных к длине дуги, как к параметру, отрезков геодезических линий $x_i(s)$ ($0 \leq s \leq 8N_i$; $i = 1, 2, \dots$), не имеющих самопересечений. По принципу Дирихле для каждого i найдутся два целых числа a_i и a'_i и элемент r_i покрытия R_i такие, что:

- 1) $0 < a_i < a'_i < 2N_i$,
- 2) $x_i(4a_i) \in r_i$ и $x_i(4a'_i) \in r_i$

Из 2) следует, что расстояние между точками $x_i(4a_i)$ и $x_i(4a'_i)$ не превосходит ε_i .

Выберем последовательность $i_1 < i_2 < \dots$ такую, что:

3) Точки $x_{i_j}(4a_{i_j})$ сходятся к некоторой точке x , когда j неограниченно возрастает.

4) Направления геодезических $x_{i_j}(s)$ при $s = 4a_{i_j}$ сходятся к некоторому направлению l в точке x .

Обозначим через $t_j(s)$ отрезок $-p \leq s \leq p$ геодезической $x_{i_j}(4a_{i_j} + s)$, через $t_j^1(s)$ обозначим отрезок $-p \leq s \leq p$ геодезической $x_{i_j}(4a'_{i_j} + s)$. По выбору геодезических $x_{i_j}(s)$ и чисел a_{i_j} и a'_{i_j} имеем:

I. Отрезки $t_j(s)$ и $t_j^1(s)$ ($-p \leq s \leq p$, $j = 1, 2, \dots$) не имеют самопересечений и не пересекаются друг с другом.

II. Когда j неограниченно возрастает, точки $t_j(0)$ и $t_j^1(0)$ сходятся к точке x , а направления отрезков $t_j(s)$, $-p \leq s \leq p$ сходятся при $s=0$ к направлению l в точке x .

Из I и II следует III:

III. Когда j неограниченно возрастает, направления отрезков $t_j^1(s)$, $-p \leq s \leq p$ сходятся при $s=0$ к направлению l в точке x .

Проведем через точку x в направлении l геодезическую t_0 и выберем на ней начало отсчета и направление отсчета так, чтобы $t_0(0) = x$, а при $-p \leq s \leq p$ точки $t_j(s)$ сходились бы к $t_0(s)$.

В малой окрестности U геодезической $t_0(s)$ можно ввести прямоугольную систему координат (u, v) так, чтобы: кривая $v=0$ совпадала с $t_0(s)$, точка $t_0(s)$ получила бы координаты $(s, 0)$ и квадрат линейного элемента выражался бы формулой

$$ds^2 = A^2(u, v) du^2 + dv^2 \quad (I)$$

Для j достаточно больших отрезки $t_j(s)$ и $t_j^1(s)$ ($-p \leq s \leq p$) можно задать уравнениями $v = v_j(s)$ и $v = v_j^1(s)$ или обратимыми уравнениями $s = s_j(u)$ и $s = s_j^1(u)$ так, чтобы $s_j(0) \rightarrow 0$ и $s_j^1(0) \rightarrow 0$ когда $j \rightarrow \infty$. Для j больших такое задание единственно.

Найдется ϵ , $\frac{p}{2} > \epsilon > 0$, такое, что всякая точка с координатами (u, v) ($-p - \epsilon \leq u \leq p + \epsilon$, $-\epsilon \leq v \leq \epsilon$) принадлежит U . Очевидно, что для j достаточно больших $-\epsilon \leq v_j(u)$ и $-\epsilon \leq v_j^1(u)$, если $-p - \epsilon \leq u \leq p + \epsilon$. В дальнейшем мы будем иметь дело с линейным элементом (I), заданным в координатах (u, v) , и будем считать, что $-p - \epsilon \leq u \leq p + \epsilon$ и $-\epsilon \leq v \leq \epsilon$. Под точкой $t_j(s)$ мы будем понимать точку $(u_j^{-1}(s), v_j(u_j^{-1}(s)))$.

Аналогично для $t_j^1(s)$ и в остальных случаях, которые нам встретятся. По выбору геодезических $t_j(s)$ и $t_j^1(s)$ их отрезки $-p \leq s \leq p$ не пересекаются. Обозначим через $Z_j(s)$ ($-\frac{\epsilon}{2} \leq s \leq \frac{\epsilon}{2}$) такой отрезок геодезической линии, что $Z_j(0) = t_j(0)$ и $Z_j(s)$ перпендикулярен к $t_j(s)$ в точке $s=0$. Очевидно, что для j достаточно больших найдется ровно одна точка (u_j, v_j) такая, что $(u_j, v_j) \in Z_j(s)$ и $(u_j, v_j) \in t_j^1(s)$ ($-p \leq s \leq p$). Очевидно, что $(u_j, v_j) \rightarrow (0, 0)$, когда $j \rightarrow \infty$.

На основании 1) мы можем считать, что для j достаточно больших, если $(u_j, v_j) = Z_j(s)$, то $s > 0$.

Пусть s_j и s_j' будут таковы, что $Z_j(s_j) = t_j^1(s_j')$. Очевидно, что $s_j \rightarrow 0$ и $s_j' \rightarrow 0$, когда $j \rightarrow \infty$.

В дальнейшем мы будем считать, что угол между отрезками $Z_j(s)$ ($0 \leq s \leq s_j$) и $t_j^1(s)$ ($-p \leq s \leq s_j'$) не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Очевидно, что выполнения этого условия легко добиться.

Обозначим через $y_j(s)$ ($-p \leq s \leq p$; $j=0, 1, 2, \dots$) решение дифференциального уравнения $y'(s) + K_j(s)y(s) = 0$ [$K_j(s)$ обозначает гауссову кривизну метрики (I) в точке $t_j(s)$], удовлетворяющее начальным условиям $y_j(0) = 1$, $y_j'(0) = -1$. Обозначим через $y_{j1}(s)$ ($-p \leq s \leq p$; $j=0, 1, 2, \dots$) решение дифференциального уравнения $y''(s) + K_{j1}(s)y(s) = 0$ [$K_{j1}(s)$ обозначает гауссову кривизну метрики (I) в точке $t_j^1(s)$; $t_0^1(s)$ совпадает с $t_0(s)$], удовлетворяющее начальным условиям $y_{j1}(s_j') = 0$, $y_{j1}'(s_j') = -1$ (s_0' считается равным нулю). Через q_j ($j=0, 1, \dots$) обозначим наибольшее из чисел $q < 0$ таких, что $y_j(q) = 0$, через q_j' обозначим наименьшее из чисел $q > 0$ таких, что $y_j(q) = 0$. Через q_{j1} обозначим наибольшее из чисел $q < s_j'$ таких, что $y_{j1}(q) = 0$. Вследствие

положительности гауссовой кривизны такие числа существуют. Кроме того известно, что:

$$-\frac{p}{2} \leq q_{01} < q_0 < 0 < q'_0 \leq \frac{p}{2} \text{ и } |q_j| \leq \frac{p}{2} \quad (j=0, 1, \dots) \quad (1)$$

$$q_{j1} \rightarrow q_{01}, \quad q_j \rightarrow q, \quad q'_j \rightarrow q'_0, \quad \text{когда } j \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что существует последовательность $\tau_j(s)$ ($0 \leq s \leq p$) отрезков геодезических линий такая, что: а) $\tau_j(0) = t_j(q_j)$; б) угол φ_j между отрезками $\tau_j(s)$ ($0 \leq s \leq p$) и $t_j(s)$ ($q_j \leq s \leq p$) стремится к нулю, когда $j \rightarrow \infty$; в) для достаточно больших j существует s''_j ($0 \leq s''_j \leq p$) такое, что $t_j(s''_j) = t''_j(s''_j)$.

Очевидно, что $s''_j \rightarrow -q_0$, когда $j \rightarrow \infty$.

Из б) следует, что для j достаточно больших и s из промежутка $-\frac{q_0}{2} \leq s \leq -q_0 + \frac{q'_0}{2}$ для расстояния $\rho(s)$ от точки $\tau_j(s)$ до отрезка геодезической $t_j(s)$ ($-p \leq s \leq p$) имеет место соотношение

$$\rho(s) = \frac{y_j(q_j + s)}{y'_j(q_j)} \varphi_j + \varphi_j^2 M_j(s), \quad (II)$$

где числа $M_j(s)$ и производные $M'_j(s)$ равномерно ограничены по абсолютной величине некоторым числом M .

Но тогда для угла ψ_j между отрезками $\tau_j(s)$ ($0 \leq s \leq s''_j$) и $Z_j(s)$ ($0 \leq s \leq s_j$) имеет место соотношение

$$\sin \psi_j = \frac{y'_j(q_j + s''_j)}{y'_j(q_j)} \varphi_j + \varphi_j^2 M'_j(s''_j). \quad (III)$$

Так как функции $y_j(s)$ выпуклы и положительны в промежутке $q_j \leq s \leq q'_j$, то $y'_j(q_j) > 0$ и $\frac{y'_0(0)}{y'_0(q_0)} = -\frac{1}{y'_0(q_0)} < 0$. Так как $s''_j \rightarrow -q_0$ и $q_j \rightarrow q_0$, когда $j \rightarrow \infty$, то $q_j + s''_j \rightarrow 0$, когда $j \rightarrow \infty$.

Следовательно для j достаточно больших

$$\frac{y'_j(q_j + s''_j)}{y'_j(q_j)} < \frac{1}{2} \frac{y'_0(0)}{y'_0(q_0)} < 0.$$

Но тогда из (III) следует, что для j достаточно больших $\sin \psi_j < 0$. Следовательно, для j достаточно больших

$$\psi_j \geq \frac{\pi}{2}. \quad (IV)$$

Из 4) и из того, что угол между отрезками $Z_j(s)$ ($0 \leq s \leq s_j$) и $t''_j(s)$ ($q_j \leq s \leq 0$) не превосходит $\frac{\pi}{2}$, следует, что для достаточно больших j отрезок $t''_j(s)$ ($\frac{q_{01} + q_0}{2} \leq s < s'_j$) пересекает один из двух отрезков $t_j(s)$ ($q_j \leq s \leq 0$) или $\tau_j(s)$ ($0 \leq s \leq s''_j$).

Так как по условию отрезки $t''_j(s)$ ($-p \leq s \leq p$) и $t_j(s)$ ($-p \leq s \leq p$) не пересекаются, то для достаточно больших j отрезки $t''_j(s)$ ($\frac{q_{01} + q_0}{2} \leq s < s'_j$) и $\tau_j(s)$ ($q_j \leq s \leq 0$) пересекаются.

Последнее противоречит тому, что для достаточно больших j имеет место, на основании (1) и (2), неравенство

$$\frac{q_{01} + q_0}{2} - q_{j1} > \frac{q_0 - q_{01}}{4} > 0.$$

Теорема доказана.

Действующая
армия

Поступило
14 VII 1944

А. Г. ПИНСКЕР

О НОРМИРОВАННЫХ K -ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 IV 1941)

В настоящей заметке указываются некоторые предложения, относящиеся к нормированным K -пространствам [линейные полуупорядоченные пространства Л. В. Канторовича⁽¹⁾; основные понятия и результаты общей теории K -пространств предполагаются известными]. Условимся K -пространство Y называть непрерывным, если всякий положительный элемент $y \in Y$, $y > 0$ может быть представлен в виде суммы двух дизъюнктивных положительных элементов y_1 и y_2

$$y = y_1 + y_2, \quad \inf(y_1, y_2) = 0 \quad (*)$$

Если для всякого положительного элемента $z > 0$ K -пространства Z можно указать положительный элемент $z' \leq z$, не допускающий представления (*), то Z будем называть дискретным пространством. Под декартовым произведением K -пространств U и V будем понимать, как обычно, множество пар $\{(uv)\}$ ($u \in U, v \in V$), причем $(u', v') + (u'', v'') = (u' + u'', v' + v'')$, $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (λ — вещественное число) и $(u, v) > 0$, если $u \geq 0, v \geq 0$ и оба неравны нулю одновременно.

Условимся, наконец, подпространство $X' \subset X$ называть нормальным, если из $x_0 \in X'$ и $|x| \leq |x_0|$ ($x \in X$) следует $x \in X'$.

Лемма. Во всяком K -пространстве X содержатся нормальные подпространства: непрерывное Y и дискретное Z такие, что декартово произведение (Y, Z) изоморфно X .

1°. Пусть X — K -пространство типа B_2 , т. е. нормированное K -пространство, в котором помимо обычных свойств нормы имеют место следующие два:

- 1) $\|x_1\| < \|x_2\|$, если $|x_1| < |x_2|$.
- 2) а) Если $x_n \rightarrow 0$ монотонно, то $\|x_n\| \rightarrow 0$.
- б) Если $x_n \rightarrow +\infty$ монотонно, то $\|x_n\| \rightarrow +\infty$.

В частности, L -пространство суммируемых функций $x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) и l K -пространство числовых последовательностей $\{\xi_i\}$ таких, что

$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$, с обычным определением нормы и положительности элемента, будут пространствами типа B_2 , первое — непрерывным и второе — дискретным.