Доклады Академии наук СССР

Новая серия. Том 33. № 1-3

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
Д63

Д63 Доклады Академии наук СССР: Новая серия. Том 33. № 1-3 / – М.: Книга по Требованию, 2023. – 284 с.

ISBN 978-5-458-54180-0

ISBN 978-5-458-54180-0

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

1 октября

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

9-й год издания

1941

ТОМ XXXIII, № 1

СОДЕРЖАНИЕ

Отв. редактор академик А. Е. Ферсман

Подписано к печати 8/X 1941 г. Л150280. Объем 6 печ. л.—58 000 тип. зн. в печ. л.
Тираж 2100 экз. Цена 5 руб.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9. Заказ 1397.

Доклады Академии Наук СССР
1941. Том XXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 I 1941)

Пользуясь понятием линейных в малом $(\infty - h)$-мерном многообразии [1], можно дать строгое обоснование методу продолжения Пуанкаре [2]. Исследуем для конкретности уравнение

$$y'' + \varphi(x, y, y') + \lambda y = 0, \tag{1}$$

где φ — трижды непрерывная функция 3 аргументов, удовлетворяющая условиям:

а) нечетности: $\varphi(x, -y, -y') = -\varphi(x, y, y')$, (2)

б) $|\varphi(x, y, y')| \leqslant N(|y|^{4-\varepsilon} + |y'|^{\frac{3}{2}-\varepsilon} + 1)$. (3)

N и ε — фиксированные положительные числа. Совокупность функций φ, удовлетворяющих поставленным выше условиям, обозначим $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Так как $\varphi(x, 0, 0) = -\varphi(x, 0, 0) \equiv 0$, то уравнение (1) при любом λ имеет тривиальное решение $y \equiv 0$. Будем называть те числа λ, при которых уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее условиям:

$$y(a) = y(b) = 0, \quad \int_a^b y^2 dx = 1, \tag{4}$$

собственными значениями для (1), а сами решения $y(x)$ — нормированными собственными функциями. Нормированные собственные функции $y(x)$, обращающиеся в нуль внутри (a, b) ровно $(k-1)$ раз, обозначим: $y(x) = z(k, \varphi)$, а соответственное собственное значение: $\lambda = \lambda(y) = \lambda[z(k, \varphi)]$.

Пример: для $\varphi \equiv 0$, $z(k, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(a + k\frac{\pi}{b-a}x\right)$.

Теорема. *Для любого $\varphi \subset \mathfrak{N}(N, \varepsilon)$ и любого целого положительного k существует, по крайней мере, одна функция $z(k, \varphi)$.*

В дальнейшем, говоря о числе собственных функций $z(k, \varphi)$, мы будем иметь в виду число пар этих функций, $\pm z(k, \varphi)$, отличающихся знаком. Для любого k при $\varphi = \varphi_0 \equiv 0$ число $z(k, \varphi_0)$ равно 1. Нашей целью является ввести в функцию φ параметр t так, чтобы при $t = 0$,

$\varphi_t = \varphi_0 \equiv 0$, при $t=1$, $\varphi(t) = \varphi$, и чтобы при изменении t от 0 до 1 число функций $z(k, \varphi_t)$ менялось лишь на четное число. Число таких функций будет нечетно, значит отлично от нуля.

Заметим, что если при непрерывном изменении φ, функция $y = z(k, \varphi)$ непрерывно меняется вместе с y', то число нулей $z(k, \varphi)$ внутри (a, b), а, значит, и k, не меняется. В самом деле для $y = z(k, \varphi)$ и любого $x_0 \subset (a, b)$ не может быть одновременно $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, ибо единственное решение (1), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, есть тривиальное $y \equiv 0$. Поэтому число нулей $z(k, \varphi)$ при описанном изменении φ не может меняться.

1. Обозначим через $\{z(k, \varphi)\}$ совокупность всех $z(k, \varphi)$ при фиксированном k для всех $\varphi \subset \mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Лемма 1. *Множество $\{z(k, \varphi)\}$ компактно в смысле равномерной сходимости самих функций $y = z(k, \varphi)$ вместе с их производными.*

Эта лемма вытекает из следующих предложений, которые мы приведем без доказательства: 1) множества всех функций $y \subset \{z(k, \varphi)\}$ и их производных равномерно ограничены на $[a, b]$ некоторой константой K; 2) при фиксированном k множество собственных значений $\lambda(y)$ для всех y из $\{z(k, \varphi)\}$ ограничено. Отсюда и из уравнения (1) и условия (3) вытекает равномерная ограниченность всех $\frac{d^2}{dx^2} z(k, \varphi)$. Это в свою очередь доказывает компактность множества функций $\{z(k, \varphi)\}$ в смысле равномерной сходимости их вместе с производными на $[a, b]$.

Введем на $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$ следующую метрику: для φ и φ_1 из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$

$$\rho(\varphi, \varphi_1) = \|\varphi - \varphi_1\| = \max\{|\varphi(x, y, y') - \varphi_1(x, y, y')|,$$

$|\varphi^\alpha(x, y, y') - \varphi_1^\alpha(x, y, y')|\}$, $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant K$, $|y'| \leqslant K$, $\alpha = 1, 2, \ldots, 20$ (Через φ^α мы обозначили 20 частных производных φ по всем аргументам первых трех порядков).

В дальнейшем через $[y(x), \lambda]$ будем называть комплекс, состоящий из функции $y(x)$ и константы λ. Ортогональность $[y, \lambda]$ и $[y_1, \lambda_1]$ означает равенство $\int\limits_a^b yy_1 dx + \lambda\lambda_1 = 0$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}$ совокупность всех аналитических φ из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Пусть φ и $\varphi + \Delta\varphi$ — два близких элемента из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Будем искать $[y + \delta y = z(k, \varphi + \Delta\varphi)$, $\lambda + \delta\lambda = \lambda(y + \delta y]$ близкое к $[y = z(k, \varphi)$, $\lambda = \lambda(y)] \cdot [\delta y, \delta\lambda]$ определится из уравнений:

$$\delta y'' + \varphi(x, y + \delta y, y' + \delta y') - \varphi(x, y, y') + \lambda\delta y + \delta\lambda \cdot y +$$
$$+ \Delta\varphi(x, y + \delta y, y' + \delta y') = 0; \qquad \delta y(a) = \delta y(b) = 0,$$
$$\int\limits_a^b y\delta y dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \delta y^2 dx = 0. \tag{4}$$

Обозначим

$$L(z, \mu) = z'' + \varphi_y z + \varphi_{y'} z' + \lambda z + \mu y,$$
$$L_2(z, \mu) = \frac{1}{2}[\varphi_{yy} z^2 + 2\varphi_{yy'} zz' + \varphi_{y'y'} z'^2] + \mu z.$$

Уравнение (4) можно записать в виде:

$$L(\delta y, \delta\lambda) = -\Delta\varphi(x, y, y') - L_2(\delta y, \delta\lambda) - \Delta\varphi_y \delta y - \Delta\varphi_y \delta y' + \ldots \tag{5}$$

Рассмотрим приближенную к (4) — (5) систему

$$L(\delta y, \delta\lambda) = -\Delta\varphi, \quad \delta y(a) = \delta y(b) = 0, \quad \int_a^b y\delta y dx = 0. \tag{6}$$

Выделим следующие возможные случаи:

Случай I. Однородная система

$$L(z, \mu) = 0, \quad z(a) = z(b) = 0, \quad \int_a^b yz dx = 0 \tag{7}$$

имеет только тривиальное решение $[z \equiv 0, \mu = 0]$. Неоднородная система (6) имеет единственное решение $[\delta y_0, \delta\lambda_0]$, малое вместе с $\|\Delta\varphi\|$. Полагая $[\delta y_0, \delta\lambda_0]$ первым приближением в решении системы (4) или (5) методом последовательных приближений при достаточно малом $\|\Delta\varphi\|$, найдем точные решения $[\delta y, \delta\lambda]$ системы (4, 5). Для $\varphi + \Delta\varphi$, достаточно близких к φ, существует, притом единственная, функция, $y + \delta y = z(k, \varphi + \Delta\varphi)$, близкая к $y = z(k, \varphi)$.

2. Однородная система (7) имеет одно независимое нетривиальное решение $[z, \mu]$. Обозначим через $[\bar{z}, \bar{\mu}]$ решение сопряженной системы [получаемой из (7) заменой φ_y на $-\varphi_y$]. Будем искать $[\delta y, \delta\lambda]$ в виде: $\delta y = cz + \delta_1 y$, $\delta\lambda = c\mu + \delta_1\lambda$, где $[\delta_1 y, \delta_1\lambda]$ ортогонально $[z, \mu]$. Так как $L(z, \mu) = 0$, то в разложении (5) члены первого порядка относительно c пропадают. Поэтому в качестве первого приближения возьмем в разложении (5) наряду с членами первого порядка относительно $\delta_1 y$, $\delta_1\lambda$ члены второго порядка относительно c:

$$\left.\begin{aligned} L(\delta_1 y, \delta_1\lambda) = -\Delta\varphi - c^2 L_2(z, \mu); \qquad \delta_1 y(a) = \delta_1 y(b) = 0, \\ \int_a^b y\delta_1 y dx = -\frac{1}{2}c^2 \int_a^b z^2 dx. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для того, чтобы система (8) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\left[-\Delta\varphi - c^2 L_2(z, \mu), -\frac{1}{2}c^2 \int_a^b z^2 dx\right]$ было ортогонально решению сопряженной системы $[\bar{z}, \bar{\mu}]$:

$$\int_a^b \left\{\bar{z}\left[\Delta\varphi + c^2 L_2(z, \mu)\right] + \frac{c^2}{2}\bar{\mu} z^2\right\} dx = 0. \tag{9}$$

Выделим случаи:

Случай II$_1$. Функционал $d = \int_a^b \left[\bar{z} L_2(z, \mu) + \frac{1}{2}\bar{\mu} z^2\right] dx \neq 0$.

Из (9) найдем два значения c, оба действительные или мнимые. При этом, умножив $\Delta\varphi$ на -1, мы вместо вещественных c получим мнимые и обратно. Подставив найденные c в (8), мы получим для этой системы единственное решение $[\delta_1 y, \delta_1\lambda]$. Таким образом мы получим два решения приближенной системы: $[\pm cz + \delta_1 y, \pm c\mu + \delta_1\lambda]$, оба одновременно вещественных или оба комплексных, причем замена $\Delta\varphi$ на $-\Delta\varphi$ дает переход от вещественных к комплексным решениям и обратно. Приняв полученные решения за первые приближения к решению системы (4), мы получим соответственно для достаточно малых $\Delta\varphi$ пару точных решений $[\delta y, \delta\lambda]$ системы (4), оба вещественных или оба комплексных. Таким образом для $\varphi+\Delta\varphi$, близких к φ, имеется пара вещественных или комплексных $z(k, \varphi+\Delta\varphi)$, близких к $z(k, \varphi)$; $y=z(k, \varphi)$ нужно считать двукратной собственной функцией. Если для данного φ имеется конечное число $z(k, \varphi)$, для которых имеет место случай I или II, то для всех близких $\varphi+\Delta\varphi$ число вещественных функций $z(k, \varphi+\Delta\varphi)$ будет одной четности.

Случай II_2. $d=0$.

Случай III. Система (7) имеет два независимых решения.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}^*$ совокупность тех $\varphi\subset\overline{\mathfrak{N}}$, у которых для одного из $z(k, \varphi)$ имеет место случай II_2 или III.

Лемма 4. *Если для* $\varphi\subset\overline{\mathfrak{N}}$ *имеет место бесконечное множество* $z(k, \varphi)$, *то* φ *входит в* $\overline{\mathfrak{N}}^*$.

Лемма 5. $\overline{\mathfrak{N}}^*$ *есть линейное в малом* $(\infty-2)$-*мерное многообразие в* $\overline{\mathfrak{N}}$.

В самом деле, наличие случая II_2 требует двух независимых «линейных в малом» условий: 1) наличие нетривиального решения системы (7) или, что то же самое, совпадение нуля с простым Eigenwert'ом соответственного линейного оператора; 2) равенство нулю функционала d; для случая III требуются два «линейных в малом условия» — наличие в нуле двукратного Eigenwert'а для (7). $\overline{\mathfrak{N}}^{**}=\overline{\mathfrak{N}}-\overline{\mathfrak{N}}^*$ связно, так как $(\infty-2)$-мерное линейное в малом многообразие $\overline{\mathfrak{N}}^*$ не разбивает $\overline{\mathfrak{N}}$. Элемент $\varphi_0\equiv 0$ входит в $\overline{\mathfrak{N}}^{**}$. Для φ_0 имеется одно $z(k, \varphi_0)$ при любом k. Соединяя любое $\varphi\subset\overline{\mathfrak{N}}^{**}$ с φ_0 кривой, проходящей внутри $\overline{\mathfrak{N}}^{**}$, получим сохранение нечетности числа $z(k, \varphi)$ при движении вдоль кривой. Итак, число $z(k, \varphi)$ для любого $\varphi\subset\overline{\mathfrak{N}}^{**}$ не равно нулю. $\overline{\mathfrak{N}}^{**}$ всюду плотно на $\overline{\mathfrak{N}}$, а значит и на $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$. Совокупность всех $\{z(k, \varphi)\}$, как выше было доказано, компактно. Предельным переходом докажем наличие $z(k, \varphi)$ и для всех φ из $\mathfrak{N}(N, \varepsilon)$.

Поступило
30 I 1941

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Люстерник, ДАН, XXVII, № 8, (1940). [2] N. Poincaré, Trans. of the Americ. Math. Soc., 6, 266 (1905).

Доклады Академии Наук СССР
1941. Том XXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ЛИБЕРМАН

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 VII 1941)

В этой заметке я рассматриваю метрику m положительной гауссовой кривизны, заданную на сфере, и геодезические линии в этой метрике. Доказывается теорема

Теорема. *Существует положительное число N такое, что всякий отрезок геодезической линии, имеющий длину большую, чем N, имеет самопересечения.*

Чтобы не усложнять доказательства, мы будем предполагать в дальнейшем, что метрика m—аналитическая.

Доказательство. Зададимся последовательностью сходящихся к нулю положительных чисел $\varepsilon_i\,(i=1, 2, \ldots)$. Каждому i сопоставим конечное покрытие R_i нашей сферой открытыми множествами диаметра, меньшего чем ε_i. Число элементов покрытия R_i обозначим через N_i. Пусть $\frac{p}{2}$ будет точная верхняя граница длин всех отрезков геодезических линий, не имеющих сопряженных точек. Вследствие положительности гауссовой кривизны такая граница существует.

Допустим, что наша теорема не верна. Тогда существует последовательность отнесенных к длине дуги, как к параметру, отрезков геодезических линий $x_i(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 8N_i;\ i=1, 2, \ldots)$, не имеющих самопересечений. По принципу Дирихле для каждого i найдутся два целых числа a_i и a_i' и элемент r_i покрытия R_i такие, что:

1) $0 < a_i < a_i' < 2N_i$,

2) $x_i(4a_i) \in r_i$ и $x_i(4a_i') \in r_i$

Из 2) следует, что расстояние между точками $x_i(4a_i)$ и $x_i(4a_i')$ не превосходит ε_i.

Выберем последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$ такую, что:

3) Точки $x_{i_j}(4a_{i_j})$ сходятся к некоторой точке x, когда j неограниченно возрастает.

4) Направления геодезических $x_{\,j}(s)$ при $s=4a_{i_j}$ сходятся к некоторому направлению l в точке x.

Обозначим через $t_j(s)$ отрезок $-p \leqslant s \leqslant p$ геодезической $x_{i_j}(4a_{i_j}+s)$, через $t_j^1(s)$ обозначим отрезок $-p \leqslant s \leqslant p$ геодезической $x_{i_j}(4a_{i_j}'+s)$. По выбору геодезических $x_{i_j}(s)$ и чисел a_{i_j} и a_{i_j}' имеем:

I. Отрезки $t_j(s)$ и $t_j^1(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant p,\ j=1, 2, \ldots)$ не имеют самопересечений и не пересекаются друг с другом.

II. Когда j неограниченно возрастает, точки $t_j(0)$ и $t_j^1(0)$ сходятся к точке x, а направления отрезков $t_j(s)$, $-p \leqslant s \leqslant p$ сходятся при $s=0$ к направлению l в точке x.

Из I и II следует III:

III. Когда j неограниченно возрастает, направления отрезков $t_j^1(s)$, $-p \leqslant s \leqslant p$ сходятся при $s=0$ к направленю l в точке x.

Проведем через точку x в направление l геодезическую t_0 и выберем на ней начало отсчета и направление отсчета так, чтобы $t_0(0)=x$, а при $-p \leqslant s \leqslant p$ точки $t_j(s)$ сходились бы к $t_0(s)$.

В малой окрестности U геодезической $t_0(s)$ можно ввести прямоугольную систему координат (u, v) так, чтобы: кривая $v=0$ совпадала с $t_0(s)$, точка $t_0(s)$ получила бы координаты $(s, 0)$ и квадрат линейного элемента выражался бы формулой

$$ds^2 = A^2(u, v)\, du^2 + dv^2 \tag{I}$$

Для j достаточно больших отрезки $t_j(s)$ и $t_j^1(s)$ $(p- \leqslant s \leqslant p)$ можно задать уравнениями $v=v_j(s)$ и $v=v_j^1(s)$ или обратимыми уравнениями $s=s_j(u)$ и $(s=s_j^1(u)$ так, чтобы $s_j(0) \longrightarrow 0$ и $s_j^1(0) \longrightarrow 0$ когда $j \longrightarrow \infty$. Для j больших такое задание единственно.

Найдется ε, $\frac{p}{2} > \varepsilon > 0$, такое, что всякая точка с координатами (u, v) $(-p-\varepsilon \leqslant u \leqslant p+\varepsilon,\ -\varepsilon \leqslant v \leqslant \varepsilon)$ принадлежит U. Очевидно, что для j достаточно больших $-\varepsilon \leqslant v_j(u)$ и $-\varepsilon \leqslant v_j^1(u)$, если $-p-\varepsilon \leqslant u \leqslant p+\varepsilon$. В дальнейшем мы будем иметь дело с линейным элементом (I), заданным в координатах (u, v), и будем считать, что $-p-\varepsilon \leqslant u \leqslant p+\varepsilon$ и $-\varepsilon \leqslant v \leqslant \varepsilon$. Под точкой $t_j(s)$ мы будем понимать точку $(u_j^{-1}(s), v_j(u_j^{-1}(s))$. Аналогично для $t_j^1(s)$ и в остальных случаях, которые нам встретятся. По выбору геодезических $t_j(s)$ и $t_j^1(s)$ их отрезки $-p \leqslant s \leqslant p$ не пересекаются. Обозначим чере$Z_j(s)$ $\left(-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant s \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ такой отрезок геодезической линии, что $Z_j(0)=t_j(0)$ и $Z_j(s)$ перпендикулярен к $t_j(s)$ в точке $s=0$. Очевидно, что для j достаточно больших найдется ровно одна точка (u_j, v_j) такая, что $(u_j, v_j) \in Z_j(s)$ и $(u_j, v_j) \in t_j^1(s)\,(-p \leqslant s \leqslant p)$. Очевидно, что $(u_j, v_j) \longrightarrow (0, 0)$, когда $j \longrightarrow \infty$.

На основании 1) мы можем считать, что для j достаточно больших, если $(u_j, v_j)=Z_j(s)$, то $s>0$.

Пусть s_j и s_j' будут таковы, что $Z_j(s_j)=t_j^1(s_j')$. Очевидно, что $s_j \longrightarrow 0$ и $s_j' \longrightarrow 0$, когда $j \longrightarrow \infty$.

В дальнейшем мы будем считать, что угол между отрезками $Z_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_j)$ и $t_j^1(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant s_j')$ не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Очевидно, что выполнения этого условия легко добиться.

Обозначим через $y_j(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant p;\ j=0, 1, 2, \ldots)$ решение дифференциального уравнения $y''(s)+K_j(s)\,y(s)=0$ [$K_j(s)$ обозначает гауссову кривизну метрики (I) в точке $t_j(s)$], удовлетворяющее начальным условиям $y_j(0)=1$, $y_j'(0)=-1$. Обозначим через $y_{j_1}(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant p;$ $j=0, 1, 2, \ldots)$ решение дифференциального уравнения $y''(s)+$ $+K_{j_1}(s)\,y(s)=0$ [$K_{j_1}(s)$ обозначает гауссову кривизну метрики (I) в точке $t_j^1(s)$; $t_0^1(s)$ совпадает с $t_0(s)$], удовлетворяющее начальным условиям $y_{j_1}(s_j')=0$, $y_{j_1}'(s_j')=-1$ (s_0' считается равным нулю). Через q_j $(j=0, 1, \ldots)$ обозначим наибольшее из чисел $q<0$ таких, что $y_j(q)=0$, через q_j' обозначим наименьшее из чисел $q>0$ таких, что $y_j(q)=0$. Через q_{j_1} обозначим наибольшее из чисел $q<s_j'$ таких, что $y_{j_1}(q)=0$. Вследствие

положительности гауссовой кривизны такие числа существуют. Кроме того известно, что:

$$-\frac{p}{2} \leqslant q_{01} < q_0 < 0 < q_0' \leqslant \frac{p}{2} \text{ и } |q_j| \leqslant \frac{p}{2} \quad (j=0, 1, \ldots) \tag{1}$$

$$q_{j1} \to q_{01}, \; q_j \to q, \; q_j' \to q_0', \text{ когда } j \to \infty. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что существует последовательность $\tau_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant p)$ отрезков геодезических линий такая, что: a) $\tau_j(0) = t_j(q_j)$; b) угол φ_j между отрезками $\tau_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant p)$ и $t_j(s)$ $(q_j \leqslant s \leqslant p)$ стремится к нулю, когда $j \to \infty$; c) для достаточно больших j существует s_j'' $(0 \leqslant s_j'' \leqslant p)$ такое, что $t_j(s_j'') = t^1_{j_n}(s_j')$.

Очевидно, что $s_j'' \to -q_0$, когда $j \to \infty$.

Из b) следует, что для j достаточно больших и s из промежутка $-\frac{q_0}{2} \leqslant s \leqslant -q_0 + \frac{q_0'}{2}$ для расстояния $\rho(s)$ от точки $\tau_j(s)$ до отрезка геодезической $t_j(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant p)$ имеет место соотношение

$$\rho(s) = \frac{y_j(q_j + s)}{y_j'(q_j)} \varphi_j + \varphi_j^2 M_j(s), \tag{II}$$

где числа $M_j(s)$ и производные $M_j'(s)$ равномерно ограничены по абсолютной величине некоторым числом M.

Но тогда для угла ψ_j между отрезками $\tau_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_j'')$ и $Z_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_j)$ имеет место соотношение

$$\sin\psi_j = \frac{y_j'(q_j + s_j'')}{y_j'(q_j)} \varphi_j + \varphi_j^2 M_j'(s_j''). \tag{III}$$

Так как функции $y_j(s)$ выпуклы и положительны в промежутке $q_j \leqslant s \leqslant q_j'$, то $y_j'(q_j) > 0$ и $\frac{y_0'(0)}{y_0'(q_0)} = -\frac{1}{y_0'(q_0)} < 0$. Так как $s_j'' \to -q_0$ и $q_j \to q_0$, когда $j \to \infty$, то $q_j + s_j'' \to 0$, когда $j \to \infty$

Следовательно для j достаточно больших

$$\frac{y_j'(q_j + s_j''}{y_j'(q_j)} < \frac{1}{2}\frac{y_0'(0)}{y_0'(q_0)} < 0.$$

Но тогда из (III) следует, что для j достаточно больших $\sin\psi_j < 0$. Следовательно, для j достаточно больших

$$\psi_j \geqslant \frac{\pi}{2}. \tag{IV}$$

Из 4) и из того, что угол между отрезками $Z_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_j)$ и $t_j^1(s)$ $(q_j \leqslant s \leqslant 0)$ не превосходит $\frac{\pi}{2}$, следует, что для достаточно больших j отрезок $t_j^1(s)$ $\left(\frac{q_{01} + q_0}{2} \leqslant s < s_j'\right)$ пересекает один из двух отрезков $t_j(s)$ $(q_j \leqslant s \leqslant 0)$ или $\tau_j(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant s_j'')$.

Так как по условию отрезки $t_j^1(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant p)$ и $t_j(s)$ $(-p \leqslant s \leqslant p)$ не пересекаются, то для достаточно больших j отрезки $t_j^1(s)$ $\left(\frac{q_{01} + q_0}{2} \leqslant s < s_j'\right)$ и $\tau_j(s)$ $(q_j \leqslant s \leqslant 0)$ пересекаются.

Последнее противоречит тому, что для достаточно больших j имеет место, на основании (1) и (2), неравенство

$$\frac{q_{01} + q_0}{2} - q_{j1} > \frac{q_0 - q_{01}}{4} > 0.$$

Теорема доказана.

Действующая армия

Поступило 14 VII 1941

Доклады Академии Наук СССР
1941. Том XXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПИНСКЕР

О НОРМИРОВАННЫХ K-ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 IV 1941)

В настоящей заметке указываются некоторые предложения, относящиеся к нормированным K-пространствам [линейные полуупорядоченные пространства Л. В. Канторовича(¹); основные понятия и результаты общей теории K-пространств предполагаются известными]. Условимся K-пространство Y называть непрерывным, если всякий положительный элемент $y \in Y$, $y > 0$ может быть представлен в виде суммы двух дизъюнктных положительных элементов y_1 и y_2

$$y = y_1 + y_2, \quad \inf(y_1, y_2) = 0 \tag{*}$$

Если для всякого положительного элемента $z > 0$ K-пространства Z можно указать положительный элемент $z' \leqslant z$, не допускающий представления (*), то Z будем называть дискретным пространством. Под декартовым произведением K-пространств U и V будем понимать, как обычно, множество пар $\{(uv)\}$ $(u \in U, v \in V)$, причем $(u', v') + (u'', v'') = (u' + u'', v' + v'')$, $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$ (λ — вещественное число) и $(u, v) > 0$, если $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и оба неравны нулю одновременно.

Условимся, наконец, подпространство $X' \subset X$ называть нормальным, если из $x_0 \in X'$ и $|x| \leqslant |x_0|$ $(x \in X)$ следует $x \in X'$.

Лемма. *Во всяком K-пространстве X содержатся нормальные подпространства: непрерывное Y и дискретное Z такие, что декартово произведение (Y, Z) изоморфно X.*

1°. Пусть X — K-пространство типа B_2, т. е, нормированное K-пространство, в котором помимо обычных свойств нормы имеют место следующие два:

1) $\|x_1\| < \|x_2\|$, если $|x_1| < |x_2|$.

2) a) Если $x_n \to 0$ монотонно, то $\|x_n\| \to 0$.

b) Если $x_n \to +\infty$ монотонно, то $\|x_n\| \to +\infty$.

В частности, L-пространство суммируемых функций $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и l K-пространство числовых последовательностей $\{\xi_i\}$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$, с обычным определением нормы и положительности элемента, будут пространствами типа B_2, первое — непрерывным и второе — дискретным.