

И.А. Биргер

Прочность. Устойчивость. Колебания

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
И11

И11 **И.А. Биргер**
Прочность. Устойчивость. Колебания: Том 1 / И.А. Биргер – М.: Книга по Требованию, 2021. – 829 с.

ISBN 978-5-458-30125-1

Книга предназначена для инженеров-конструкторов, расчетчиков машиностроительных предприятий и НИИ, а также для студентов технических вузов. В первом томе приведены основные уравнения деформируемых сред, справочные сведения по теории упругости, пластичности, ползучести, усталости и надежности механических систем, по термоупругости и термомоупругости, по определению напряжений и деформаций при растяжении, изгибе и кручении прямых и кривых стержней, прямоугольных и круглых пластинок, оболочек.

ISBN 978-5-458-30125-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Кручение тонкостенных грубчатых профилей	276
Кручение тонкостенных стержней с многосвязными профилями	281
Концентрации напряжений во входящих углах тонкостенных стержней	283
Литература	286
Глава 11. Расчет круговых колец и кольцевых систем (И. А. Биргер, Н. А. Федоров)	287
Круговой стержень	287
Обозначения	287
Дифференциальные уравнения изгиба	288
Стержни постоянного сечения, нагруженные в их плоскости	300
Стержни постоянного сечения, нагруженные перпендикулярно их плоскости	309
Замкнутое круговое кольцо	309
Основные соотношения	309
Элементарные нагрузки на кольцо	312
Условия и перемещения при простейших нагрузках в плоскости кольца	320
Кольца переменной жесткости. Составные кольца	325
Гибкие брус и кольцо	340
Влияние нормальных сил	340
Влияние начального прогиба	344
Тонкостенные стержень и кольцо	346
Плоский изгиб	346
Нагрузка, перпендикулярная плоскости стержня	346
Кольца с произвольным расположением осей инерции	358
Кольцо с присоединенной цилиндрической оболочкой	361
Кольцевые системы с малым числом спиц	365
Шарнирное соединение спиц с кольцами	365
Жесткое соединение спиц с кольцами	382
Кольцевые системы с большим числом спиц	396
Внутреннее кольцо абсолютно жесткое	399
Шарнирное соединение спиц с кольцами	402
Литература	415
Глава 12. Тонкостенные и кривые стержни	417
Тонкостенные стержни (Я. Г. Пановко)	417
Общие сведения	417
Степенное кручение под действием скручивающих моментов	418
Степненное кручение при действии внешних бимоментов и продольной нагрузки	426
Кривые стержни (И. А. Биргер)	430
Общие сведения. Нормальные напряжения	430
Условия равновесия, касательные напряжения и перемещения	437
Глава 13. Естественно закрученные стержни (Б. Ф. Шорр)	440
Основные положения	440
Теория Кирхгофа—Клебша	443
Общая теория закрученных стержней	446
Техническая теория закрученных стержней удлиненного профиля	454
Нелинейные задачи	462
Литература	465
Глава 14. Составные стержни (Н. Г. Калинин)	466
Балки со стенкой, работающей на сдвиг, и поясами, воспринимающими только осевые усилия	465
Многослойные составные стержни	467
Двухслойная балка с упругими поперечными связями и без связей сдвига	471
Учет сил трения и конструктивное демпфирование	474
Литература	479

Г л а в а 24. Расчет сферических оболочек (К. Ф. Черных).	737
Осесимметричный изгиб	739
Осесимметричное кручение	746
Обратносимметричный случай	747
Случай малого центрального отверстия	755
Примеры расчета	766
Литература	774
Г л а в а 25. Расчет торообразных оболочек (К. Ф. Черных).	776
Осесимметричный изгиб	778
Осесимметричное кручение	793
Обратносимметричный случай	794
Примеры расчета	802
Литература	810
Предметный алфавитный указатель (М. Э. Рафес, К. М. Хась- мицкая).	812

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие современного машиностроения тесно связано с проблемами прочности и динамики. Интенсификация рабочих процессов, повышение нагрузок, скоростей, давлений, температур, уменьшение веса и габаритов конструкций, увеличение надежности и ресурса приводят к необходимости расширения теоретических и экспериментальных исследований в области прочности, устойчивости и колебаний.

При создании современных машин важным этапом является расчет на прочность. Однако в практической работе при проведении расчетов на прочность конструктор и расчетчик сталкивались с большими трудностями, так как не было достаточно полной справочной литературы.

Отсутствие такой литературы затрудняло практическое использование многих важных результатов, полученных отечественными и зарубежными учеными в теории упругости, пластичности и ползучести, в расчетах на прочность стержней, пластинок и оболочек.

Основная цель предлагаемого справочника — дать инженерам-машиностроителям достаточно полное и доступное изложение основных результатов современной науки о прочности и динамике.

Материал справочника разбит на три тома.

В первом томе изложены необходимые сведения из теории упругости, пластичности и ползучести, рассмотрены вопросы термоупругости и термопластичности. Специальная глава посвящена теории упруго-вязких тел, представляющей интерес для расчета на прочность стеклопластиков и других полимерных материалов. В этом же томе приведены основы теории усталости и надежности механических систем, даны нужные сведения из теории стержней, пластинок и оболочек.

Дополнительные сведения из теории пластинок и оболочек изложены во втором томе. В нем указаны методы расчета на прочность составных, анизотропных и трехслойных оболочек, круглых пластинок, оболочек вращения переменной толщины. В этом же томе приведены справочные сведения о концентрации напряжений в пластинках и оболочках, расчете контактных деформаций и толстостенных цилиндров.

Последний — третий — том посвящен вопросам устойчивости и колебаний. В нем рассмотрены устойчивость и колебания стержней, пластинок и оболочек, аэроупругость, действие случайных нагрузок и др.

Материал справочника может служить основой для разработки методов расчета на прочность, устойчивость и колебания деталей и узлов конструкций. Расчетную схему, условия закрепления и другие конкретные данные выбирают в процессе расчета с учетом особенностей работы конструкции.

Замечания и пожелания по содержанию справочника просьба направлять по адресу: *Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3, Издательство «Машиностроение»*

● ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Глава 1

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

НАПРЯЖЕНИЯ

Тензор напряжения. В сечении тела на произвольно ориентированной площадке с нормалью n действует вектор напряжения S_n (рис. 1). Нормальную составляющую σ_n вектора напряжения называют нормальным напряжением, касательную — τ_n — касательным напряжением на данной площадке.

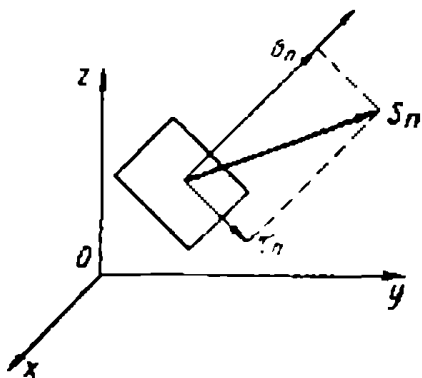


Рис. 1. Вектор напряжения на произвольной площадке

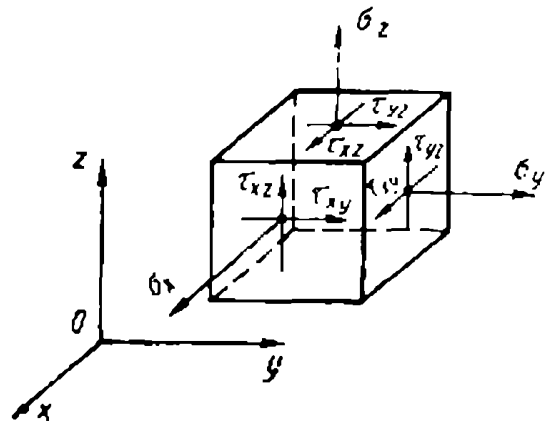


Рис. 2. Компоненты напряжения

Напряжение S_n может быть охарактеризовано тремя проекциями S_{nx} , S_{ny} , S_{nz} на координатные оси x , y , z и зависит от направления площадки в данной точке тела. Первый индекс указывает на направление площадки, второй — на ось проектирования.

На площадках, соответственно перпендикулярных к осям x , y , z , напряжения имеют компоненты (рис. 2), которые образуют *тензор напряжения*

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Напряжение на произвольно ориентированной площадке вычисляется по компонентам напряжения (формулы Коши):

$$\left. \begin{aligned} S_{nx} &= \sigma_x \cos \widehat{nx} + \tau_{xy} \cos \widehat{ny} + \tau_{xz} \cos \widehat{nz}; \\ S_{ny} &= \tau_{yx} \cos \widehat{nx} + \sigma_y \cos \widehat{ny} + \tau_{yz} \cos \widehat{nz}; \\ S_{nz} &= \tau_{zx} \cos \widehat{nx} + \tau_{zy} \cos \widehat{ny} + \sigma_z \cos \widehat{nz}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы вытекают из условий равновесия элементарного тетраэдра (рис. 3); \widehat{nx} , \widehat{ny} , \widehat{nz} — углы между нормалью к косо́й площадке и соответственно осями x , y , z .

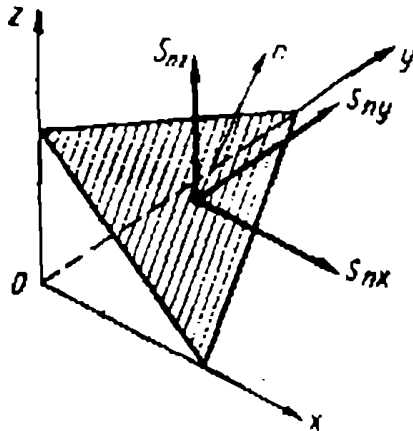


Рис. 3. Элементарный тетраэдр

Если к элементам тела не приложены внешние объемные моменты (например, магнитные моменты), то тензор напряжения симметричен, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

В дальнейшем будем рассматривать только этот случай; несимметричную механику сплошной среды, см., например, в работе [8].

Нормальное напряжение на данной площадке

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \widehat{nx} + \sigma_y \cos^2 \widehat{ny} + \\ &+ \sigma_z \cos^2 \widehat{nz} + 2\tau_{xy} \cos \widehat{nx} \cos \widehat{ny} + \\ &+ 2\tau_{yz} \cos \widehat{ny} \cos \widehat{nz} + 2\tau_{xz} \cos \widehat{nx} \cos \widehat{nz}. \end{aligned} \quad (2)$$

При рассмотрении общих вопросов удобно обозначать оси прямоугольных координат через x_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда компоненты напряжения будут обозначены через σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). При переходе к другой, прямоугольной координатной системе x'_i компоненты напряжения преобразуют по формуле

$$\sigma_{i'j'} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sigma_{kl} \alpha_{lk} \alpha_{jl}, \quad (3)$$

где α_{ik} — косинус угла между старой осью x_i и новой осью x'_k .

Главные напряжения. В каждой точке тела существуют, по крайней мере, три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называют *главными*, а направления нормалей к этим площадкам называют *главными направлениями* (или главными осями) тензора напряжения. На главных площадках действуют *главные нормальные напряжения* σ_1 , σ_2 , σ_3 . Если главные напряжения различны, имеется только три главных направления. Если два главных напряжения равны (например, $\sigma_2 = \sigma_3$), напряженное состояние характеризуется осевой симметрией; любая площадка, содержащая ось 1 — главная. Если все главные напряжения равны

($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), напряженное состояние характеризуется центральной симметрией, любая площадка в данной точке является главной (случай гидростатического напряженного состояния).

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

или (в развернутой форме)

$$-\lambda^3 + I_1(T_\sigma)\lambda^2 + I_2(T_\sigma)\lambda + I_3(T_\sigma) = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты этого уравнения

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \equiv 3\sigma; \\ I_2(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

не зависят от выбора координатной системы и называются соответственно *линейным*, *квадратичным* и *кубическим* инвариантами тензора напряжения. Величину σ называют *средним давлением*.

В сечениях, делящих пополам углы между главными плоскостями, действуют *главные касательные напряжения*

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Максимальным касательным напряжением называют величину

$$\tau_{\max} = \max \{ |\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3| \}. \quad (7)$$

Если главные оси нумерованы так, что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

то

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Не существует площадки, на которой бы действовало касательное напряжение, превосходящее τ_{\max} .

Девiator напряжения. Так как тела по-разному сопротивляются равномерному всестороннему давлению и касательным напряжениям, то удобно представить тензор напряжения в виде суммы

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma,$$

где $\sigma T_1 = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix}$ — шаровой тензор, соответствующий среднему

давлению, а

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad \text{— тензор, характеризующий нап-}$$

ряжения сдвига в данной точке и называемый *девиатором напряжений*. Главные направления девиатора напряжения и тензора напряжения совпадают. Линейный инвариант девиатора напряжения $I_1(D_{\sigma})$ равен, очевидно, нулю. С квадратичным инвариантом $I_2(D_{\sigma})$ связана интенсивность касательных напряжений:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}. \quad (8)$$

В случае чистого сдвига (напряжение сдвига τ) $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$; тогда $\tau_i = \tau$. При одноосном растяжении (сжатии) $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\tau_i = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}}$.

Иногда рассматривают *интенсивность напряжений* (или приведенное напряжение), равную $\sigma_i = \sqrt{3}\tau_i$. Очевидно, что при одноосном растяжении (сжатии) $\sigma_i = |\sigma_1|$.

Отметим важное неравенство

$$1 \leq \frac{\tau_i}{\tau_{\max}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (9)$$

из которого вытекает приближенное соотношение

$$\tau_i \approx 1,08\tau_{\max} \quad (10)$$

с наибольшей погрешностью около 7%.

Компоненты девиатора напряжений будем обозначать через s_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$); заметим, что

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

В плоском напряженном состоянии компоненты напряжения

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Главные напряжения равны

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \\ \sigma_3 &= \sigma_z = 0. \end{aligned}$$

Угол $\widehat{1, x}$, образуемый первым главным направлением с осью x , определяют из соотношения

$$\operatorname{tg} 2(\widehat{1, x}) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

Максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, если σ_1, σ_2 — разных знаков; $\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_1|$, если σ_1, σ_2 — одинакового знака.

Диаграмма Мора (рис. 4) дает наглядное представление о распределении нормальных и касательных напряжений в различных сечениях, проходящих через данную точку. Значения σ_n и τ_n лежат в заштрихованной области.

Форма диаграммы Мора характеризуется коэффициентом Лоде и Надаи

$$\mu_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (11)$$

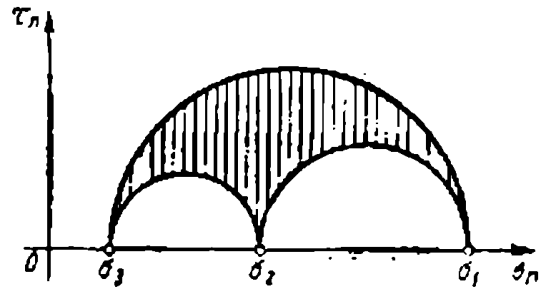


Рис. 4. Диаграмма Мора

изменяющимся в пределах от -1 до $+1$. При фиксированном μ_σ и фиксированных главных осях напряженное состояние определено с точностью до общего множителя (пропорционального интенсивности σ_i) и аддитивного среднего давления σ . Коэффициент μ_σ является характеристикой «вида напряженного состояния».

Дифференциальные уравнения равновесия. Компоненты напряжения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где X, Y, Z — компоненты объемной силы. В случае движения в правых частях уравнения (12) будут инерционные силы, соответственно равные $\rho\omega_x, \rho\omega_y, \rho\omega_z$, где ρ — плотность тела; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции ускорения частицы тела.

В цилиндрических координатах r, φ, z (рис. 5) уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + X_r &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + X_\varphi &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + X_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В сферических координатах, показанных на рис. 6, уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) + X_r = 0; \\
 & \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta - 3\tau_{r\theta}] + X_\theta = 0; \\
 & \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} - 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) + X_\varphi = 0.
 \end{aligned} \right\} (14)$$

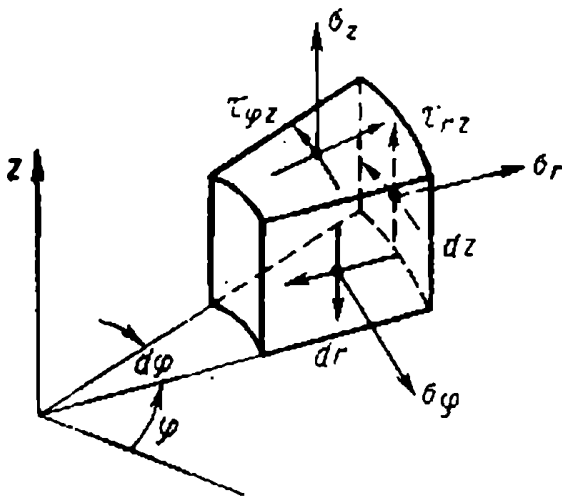


Рис. 5. Элемент в цилиндрических координатах

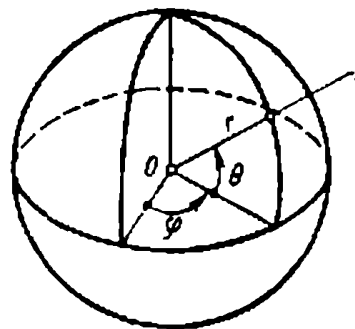


Рис. 6. Сферические координаты

Уравнения равновесия в произвольной криволинейной ортогональной системе координат см. в работах [2, 4].

ДЕФОРМАЦИЯ

Тензор деформации. Деформацией называют изменение расстояния между точками тела. Пусть u , v , w — составляющие смещения, испытываемого точками тела (рис. 7). Квадрат элемента длины

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

после деформации будет равен

$$\begin{aligned}
 ds_1^2 = & (1 + 2\varepsilon_x) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_y) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_z) dz^2 + \\
 & + 2\gamma_{xy} dx dy + 2\gamma_{yz} dy dz + 2\gamma_{xz} dx dz,
 \end{aligned} \quad (15)$$