

Ш.Е. Микеладзе

**Численные методы
интегрирования
дифференциальных
уравнений с частными
производными**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш11 **Ш.Е. Микеладзе**
Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными / Ш.Е. Микеладзе – М.: Книга по Требованию, 2021. – 106 с.

ISBN 978-5-458-56881-4

ISBN 978-5-458-56881-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Множество вопросов математической физики, включая сюда теорию упругости и гидродинамику, приводят к необходимости интегрировать уравнения с частными производными.

За последние пятьдесят лет эти вопросы все более и более проникают в технику и притом в самые разнообразные ее области. Таким образом, интегрирование уравнений с частными производными, помимо отвлеченного чисто математического интереса, приобрело важное практическое значение.

Запросы практики существенно отличаются от запросов чистой математики.

В математике при современных ее воззрениях прежде всего требуется безукоризненная строгость и общность рассуждений. Поэтому здесь придается большое значение доказательствам самого существования решения поставленных вопросов и установлению тех условий, при которых это решение действительно имеет место.

Во многих случаях считается достаточным доказать, что требуемое решение может быть получено „конечным“ числом действий или выражено рядом абсолютно и равномерно сходящимся, причем отводится лишь совершенно второстепенное внимание вопросу о том, „сколько“ действий надо произвести или сколько членов ряда надо взять, чтобы получить заданную степень точности в окончательном результате, и сколько надо затратить времени и работы на это.

Между тем практику обыкновенно нужен результат, обладающий лишь грубой степенью точности, ибо как исходные данные так и самое уравнение не являются абсолютно точными, а лишь приближенными и притом, по большей части, грубо приближенными. Поэтому практик совершенно не интересуется вопросом о существовании точного решения, — оно ему не нужно. Его интересует лишь решение, обладающее только такою степенью точности, которая нужна в данном вопросе для практических потребностей и которая соответствует как точности данных и точности самих исходных уравнений так и тех до-

пущений, которые сделаны при самом составлении этих уравнений.

Практику нужен окончательный результат, само собою разумеется в численной, непосредственно к делу применимой, форме. Самый процесс получения результата для практика интереса не представляет, — чем меньше этот процесс требует „квалифицированной“ работы, тем лучше.

Уже давно разработаны для надобностей Астрономии и Баллистики методы приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В Астрономии применялась или метода разложения в ряды расположенных по степеням „малых“ постоянных параметров, входящих в уравнения движения, или метода „механических квадратур“, основанная на применении приближенных формул для вычисления определенных интегралов. Лишь лет двадцать пять тому назад начали пользоваться методами „численного интегрирования“, основанными на непосредственном применении к самим уравнениям интерполяционных формул и исчисления конечных разностей.

Еще Эйлер в 1740-х годах применил методу приближенного интегрирования, основанную на пользовании рядом Тейлора, т. е. методу, представляющую как бы зачатки методы „аналитического продолжения“. Во время мировой войны эта метода Эйлера была заменена методами численного интегрирования основанными на интерполировании и пользовании исчислением конечных разностей.

Здесь надо особенно упомянуть знаменитого Адамса и проф. К. Штермера, развивших эти методы и давших примеры громадных вычислений, исполненных по этим методам.

По отношению к уравнениям в частных производных положение вопроса было в гораздо худшем состоянии. Кроме работы Ричардсона едва ли можно указать работу, где бы обширные вычисления были доведены до конца в применении к практическому вопросу. Но в работе Ричардсона общая теоретическая сторона изложена недостаточно полно, и самый способ производства вычислений не указан с достаточной подробностью.

Весьма изящны работы Гершгорина, но, к сожалению, недостаточно пояснены численными примерами.

В монографии Ш. Е. Микеладзе вопрос о численном интегрировании уравнений в частных производных взят с самого

начала, поставлен в общем, и притом практическом, виде и разработан до конца, т. е. с пояснением схем вычислений, оценки погрешностей, контроля, выбора табличного промежутка и пр. Но наряду с этой чисто практической частью Ш. Е. Микеладзе не пренебрег и теоретической. Не увлекаясь утомительными доказательствами существования решений, Ш. Е. Микеладзе дает полное теоретическое обоснование применяемых им процессов, доказывает их сходимость и указывает способы оценки погрешностей и выбора величины табличных промежутков.

Монография Ш. Е. Микеладзе заполняет, таким образом, пробел в математической литературе как русской так и иностранной и дает практику существенное и бывшее столь настоятельно необходимым подспорье для решения многих вопросов, столь часто возникающих при нашем громадном и всеобъемлющем строительстве.

Академик А. Крылов.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта монография является результатом моих исследований, посвященных вопросам численного решения линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Для облегчения чтения монографии к ней приложена ранее напечатанная моя статья:¹ „О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными“.

Основную целью работы является проведение поставленных задач до численного результата. С целью пойти навстречу нуждам практики, монография снабжена многими примерами из математической физики и теории упругости.

Для облегчения контроля подбирались примеры, точное решение которых возможно тем или иным путем.

Предлагаемые мною способы решения сопровождаются доказательствами сходимости процессов и оценками погрешностей сеток решения, что позволяет, путем надлежащего выбора размеров клеточки сетки, получить численное решение данной проблемы с наименьшей затратой труда и времени на вычислительную работу.

Считаю приятным долгом отметить то огромное значение, которое имело для меня личное общение с акад. А. Н. Крыловым. Его советы и, главное, исключительное внимание и чуткость, с которым он постоянно относился к моей работе и к моим нуждам, имели для меня решающее значение. Я счастлив возможностью выразить А. Н. Крылову самую глубокую и теплую благодарность.

Ш. Микеладзе

Тифлис,
4 сентября 1935 г.

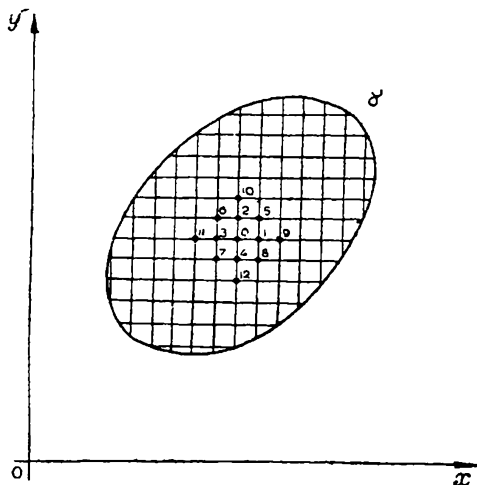
¹ Изв. Акад. Наук СССР по ОМЕМ, 1934, № 6, ст. 819 и сл.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. Общие замечания. Пусть u — функция от x и y . Проведем в плоскости xOy простой замкнутый¹ контур γ , и прямые параллельно координатным осям (фиг. 1). Часть плоскости, ограниченную этим контуром, будем называть областью A . С помощью наших построений получим сетку, которая разобьет область A с одной стороны на правильные части, состоящие из прямоугольников со сторонами параллельными осям Ox , Oy , с другой стороны — на неправильные части, получающиеся из тех

прямоугольников, которые отчасти выступают за контур γ . Точки пересечения прямых будем называть точками сетки, из коих точки, лежащие на γ — граничными, а точки, лежащие внутри γ — внутренними точками сетки.² Если прямые, параллельные осям Ox и Oy , отстоят друг от друга



Фиг. 1.

¹ Простым контуром мы называем контур, который не пересекает сам себя.

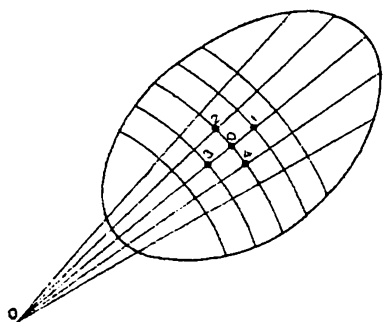
² Внутренние точки, по возможности близкие к контуру γ , будут нами относиться к граничным точкам. При посредстве граничных точек мы можем начертить некоторую замкнутую ломаную, по возможности близкую к γ .

на постоянное расстояние h , сетку будем называть квадратной. Перенумеруем точки сетки в произвольном порядке от 0 до N . В дальнейшем, если рассматривается k -ая точка сетки, то через (x_k, y_k) будем обозначать координаты этой точки, а через u_k — численное значение u в этой же точке сетки.

Часто численное интегрирование весьма упрощается, если преобразовать данное дифференциальное уравнение с помощью соотношения

$$x = f(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

а область A разбить на малые области двумя семействами кривых (u) и (v) . В соответствии с этим, если, например, сделать



Фиг. 2.

переход от прямоугольных координат к полярным, прямоугольная сетка преобразуется в полярную сетку (фиг. 2).

Рассмотрим некоторое дифференциальное уравнение с частными производными. Пусть граничные условия таковы, что наша проблема разрешима. Идея численного способа интегрирования данного уравнения заключается в установлении

арифметического соотношения между значениями u в точках сетки¹ (на контуре и внутри контура) и в дальнейшем решении системы уравнений, доставляемых упомянутым соотношением. Идея эта принадлежит С. Runge.²

Методу интегрирования Runge разбивает на примере

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C, \quad (1)$$

определяя кручение цилиндрического стержня с крестообразным поперечным сечением при контурных условиях $u=0$ на γ .

¹ Полагаем, что значения u в граничных точках нам известны. Иными словами, нам известны значения функции u в точках, соединением которых можно образовать замкнутую ломаную по возможности близкую к γ . О погрешности см. § 4.

² Über eine Methode die partielle Differentialgleichung $\Delta u = \text{Constans}$ numerisch zu integrieren Ztschr. f. Math. u. Phys., Bd. 56, 1908, S. 225—232.

Полагая (для достаточно малых значений h),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2},$$

Runge заменяет уравнение (1) уравнением в конечных разностях

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0 = h^2 C, \quad (2)$$

где C постоянная, и тем самым вопрос численного интегрирования приводит к решению системы линейных уравнений вида (2) со многими неизвестными.

При сколько-нибудь значительном числе внутренних точек сетки, решение этих уравнений требует затраты большого труда. С целью упрощения решения в том частном случае, когда $C=0$, Н. Liebmann¹ выбирает приближенные значения u во внутренних точках сетки, учитывая граничные условия, и далее, исходя из этих значений, при посредстве (2) вычисляет более точные значения.

Отсюда ясно, какую важную роль играет построение формул, подобных (2), с возможно большей степенью точности. Такие формулы будут способствовать с увеличением h уменьшению числа внутренних точек сетки, а тем самым сокращать число уравнений (2). Вопросу построения возможно точных формул в конечных разностях мы уделяем следующий параграф.

Рассматривая сетки, образованные правильными многоугольниками, С. А. Гершгорин² показывает, что при численном интегрировании уравнения Пуассона, разные типы сеток доставляют результат различной степени точности, причем наибольшая степень — соответствует сеткам треугольного типа. Переходя к оценке погрешности, соответствующей различным сеткам, С. А. Гершгорин получает для четырехугольных сеток точность порядка h^2 , а для сеток треугольного типа — h^4 . Мы имеем показать, что и для квадратных сеток точность решения есть порядка h^4 .

¹ Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen. Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wissenschaften, Math.-phys. Kl., 1918, S. 385—416.

² О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. Ленингр. политехн. инст., т. XXX, 1927, стр. 75—94.

L. F. Richardson в работе „The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam“,¹ пользуясь центрированными разностями Shepard'a, полагает приближенно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{u_1 - u_3}{2h} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &\approx \frac{u_0 - 2u_1 + 2u_3 - u_{11}}{2h^3} \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &\approx \frac{u_0 - 4u_1 + 6u_0 - 4u_3 + u_{11}}{h^4} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\approx \frac{u_5 + u_7 - u_6 - u_8}{4h^2}, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

где h сторона клеточки.

Внося эти приближенные значения частных производных в данное дифференциальное уравнение, он тем самым преобразовывает его в уравнение в конечных разностях. Так, например, если рассмотреть уравнения

$$\Delta u = \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta \Delta u = \psi(x, y),$$

где Δ — оператор Лапласа, то первому из них будет соответствовать уравнение в конечных разностях

$$u_1 + u_2 + u_8 + u_4 - 4u_0 = h^2 \varphi(x_0, y_0),$$

а второму —

$$\begin{aligned}20u_0 - 8[u_1 + u_2 + u_8 + u_4] + 2[u_5 + u_6 + u_7 + u_8] + \\ + [u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}] = h^2 \psi(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Точки сетки, отвечающие этим уравнениям, показаны на фиг. 1.

Как видно, L. F. Richardson развивает, в сущности, методу C. Runge, хотя на Runge он не ссылается.²

Легко усмотреть непрактичность метода, когда, например, данное дифференциальное уравнение есть уравнение второй и выше степени относительно функции или ее производных.

¹ Philosoph. Trans. of the Roy. Soc. of London, ser. A, vol. 210, 1911, pp. 807—857.

² Мы имеем в виду работу Runge в Z. f. Math. u. Phys., 56 (1908).

Арифметические соотношения, связывающие значения u в различных точках сетки не будут, линейными, а решение их представит непреодолимые трудности.

Из самых преобразований Richardson'a видно, что различным дифференциальным уравнениям соответствуют различные друг от друга арифметические соотношения, и, что с повышением порядка дифференциального уравнения число неизвестных значений, входящих в эти соотношения, возрастает. В соответствии с этим и способ решения становится исключительно кропотливым. Нам кажется, что методу в некоторой мере можно сделать компактной, если связь между значениями u в точках сетки устанавливать при посредстве формулы Тейлора (см. ниже §§ 2 и 7).

Далее Richardson подробно останавливается на группе уравнений вида

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = -k^2 u, \quad \Delta \Delta u = 0, \quad \Delta \Delta u = k^4 u,$$

где Δ обозначает операцию Лапласа, и показывает, что ошибка, полученная от замены в левых частях этих уравнений производных через разности, а также ошибка значений u , доставляемых соответствующими арифметическими соотношениями, может быть представлена под видом

$$h^2 f_2(x, y, z) + h^4 f_4(x, y, z) + \dots$$

где $f_2, f_4 \dots$ от h не зависят. При достаточно малых значениях h ошибка просто пропорциональна h^2 .

Ниже мы покажем на примере

$$\Delta u = \varphi(x, y),$$

что удачным комбинированием значений

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

представленных по формуле Тейлора, можно получить арифметические соотношения с погрешностью, пропорциональной h^6 . Эти соотношения доставляют значения u с точностью порядка h^4 .

Douglas,¹ излагая метод численного интегрирования уравнения минимальной поверхности

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \quad (3)$$

¹ A method of numerical solution of the problem of Plateau. *Annals of Math.*, sec. ser., vol. 29, Princeton, 1928, pp. 180—188.

где p, q, r, s и t обозначают частные производные от функции двух переменных по Монжу (Monge), показывает, как вычислять значение u в центре некоторого квадрата (далее называемого нами основным) посредством значений в вершинах и в серединах сторон.

Пользуясь методом Runge, Douglas заменяет дифференциальное уравнение минимальной поверхности уравнением в конечных разностях, и, решая это уравнение относительно u_0 , после некоторых упрощений получает

$$u_0 = \frac{4(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8)}{20} + \frac{3}{10} \frac{\left| \begin{array}{cc} (u_1 + u_8) - (u_2 + u_4), & (u_1 - u_8)(u_2 - u_4) \\ (u_5 + u_7) - (u_6 + u_3), & (u_5 - u_7)(u_6 - u_3) \end{array} \right|}{8h^2 + \left| \begin{array}{cc} u_5 - u_7, & u_6 - u_8 \\ u_1 - u_3, & u_2 - u_4 \end{array} \right|}. \quad (4)$$

Вычисляя u_0 по этой формуле, Douglas основной квадрат разбивает на 16 равных квадратов (фиг. 4) и далее методом графической интерполяции подбирает значения u в точках пересечения сплошных линий с пунктирными. После этого формула (4) дает возможность вычислить u в центре любого из четырех квадратов, образованных сплошными линиями. Имеющиеся приближенные значения u можно улучшать при посредстве формулы (4).

Замечательно при этом то, что избегается решение системы уравнений со многими неизвестными, что сопряжено с громадной затратой труда и времени. Так, например, в соответствии с делением стороны основного квадрата на n равных частей, число внутренних точек сетки будет

$$(n-1)^2,$$

а, следовательно, будем иметь $(n-1)^2$ уравнений со столько же неизвестными. Легко усмотреть, что при сколько-нибудь малых значениях h , число уравнений так велико, что решение их практически невыполнимо.

Любопытно одно обстоятельство: в начале работы Douglas предполагает $h \rightarrow 0$, но, приводя численные примеры, он полагает $h=4$ и $h=10$ и получает хорошие результаты. Причина этого легко усматривается из примера § 6. Наконец, заметим, что задача Plateau чрезвычайно легко решается при посредстве