

Ю. В. ЩЕРБАКОВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

УДК 514.74

ББК 22.15

Ш61

Щербакова, Ю. В.

Ш61 Аналитическая геометрия / Ю. В. Щербакова. — М. :
T8RUGRAM / Научная книга. — 160 с.

ISBN 978-5-519-62019-2

Данное издание предлагает читателю краткое и структурированное изложение основного материала по аналитической геометрии. Представленный в книге материал поможет читателю получить углублённые знания о данной дисциплине.

Книга рекомендуется к прочтению учащимся, педагогам и всем лицам, заинтересованным в данном предмете.

УДК 514.74

ББК 22.15

BIC PBM

BISAC MAT012020

© T8RUGRAM, оформление, 2017

© ООО "Литературная студия

ISBN 978-5-519-62019-2 "Научная книга", издание, 2017

Содержание

Лекция № 1. Аналитическая геометрия	
на плоскости.....	9
1. Метод координат	9
Направленные отрезки	9
Координаты на прямой линии	12
Расстояние между двумя точками	
на прямой линии	13
Прямоугольные координаты на плоскости	14
Расстояние между двумя точками	
на плоскости	16
Деление отрезка в данном отношении	17
Угол между двумя осями	19
Основные положения теории проекций	21
Проекции направленного отрезка на оси	
координат	24
Площадь треугольника	27
Полярные координаты	29
2. Линии и их уравнения	31
Составление уравнений заданных линий	31
Геометрический смысл уравнений	31
Две основные задачи.	
Пересечение двух линий	34
Параметрические уравнения линий	34
Уравнения линий в полярных координатах	35

3. Прямая линия	36
Угловой коэффициент прямой	36
Уравнение прямой линии	
с угловым коэффициентом	37
Геометрический смысл уравнения	
первой степени между двумя переменными	38
Исследование общего уравнения	
первой степени $Ax+Bx+C=0$	40
Уравнение прямой линии в отрезках	41
Построение прямой линии по ее уравнению.	
Угол между двумя прямыми	43
Условия параллельности	
и перпендикулярности двух прямых	44
Уравнение прямой, проходящей через	
данную точку в данном направлении	45
Взаимное расположение	
двух прямых на плоскости	46
Уравнение пучка прямых	48
Уравнение прямой, проходящей через	
две данные точки. Условие, при котором	
три данные точки лежат на одной прямой	50
Нормальное уравнение прямой линии	51
Приведение общего уравнения первой	
степени к нормальному виду	53
Расстояние от данной точки	
до данной прямой	54
Уравнение прямой	
в полярной системе координат	56

4. Элементарная теория	
конических сечений	57
Окружность	57
Эллипс	59
Гипербола и ее асимптоты	62
Парабола	67
Построение точек эллипса, гиперболы и параболы посредством циркуля и линейки	69
Эксцентриситет и директрисы эллипса	70
Эксцентриситет и директрисы гиперболы	73
Эксцентриситет и директриса параболы	75
Уравнение конического сечения в полярных координатах	75
Диаметры эллипса.	
Сопряженные диаметры	78
Диаметры гиперболы.	
Сопряженные диаметры	81
Диаметры параболы	83
Касательная	85
Эллипс как проекция окружности	87
Параметрические уравнения эллипса	88
5. Преобразование координат.	
Классификация линий	90
Задача преобразования координат	90
Перенос начала координат	90
Поворот осей координат	91
Общий случай	93

Преобразование общего уравнения	
второй степени	94
Классификация линий	97
Лекция № 2. Аналитическая геометрия	
в пространстве	100
1. Метод координат в пространстве	100
Прямоугольные координаты	100
Основные задачи	100
Основные положения теории проекций	
в пространстве	105
Вычисление угла между двумя осями	
в пространстве	106
2. Элементы векторной алгебры	108
Векторы и скаляры	108
Сложение векторов	109
Вычитание векторов	112
Умножение вектора на число	114
Проекции вектора	116
Действия над векторами,	
заданными своими проекциями	119
Скалярное произведение векторов	120
Основные свойства	
скалярного произведения	122
Скалярное произведение векторов,	
заданных проекциями	124
Направление вектора	126
Векторное произведение	128

Основные свойства	
векторного произведения	129
Векторное произведение векторов, заданных проекциями	131
Векторно-скалярное произведение	132
Векторно-скалярное произведение в проекциях	135
Двойное векторное произведение	137
3. Геометрическое значение уравнений	140
Уравнение поверхности. Геометрический смысл уравнений. Две основные задачи	140
Сфера	140
Цилиндрические поверхности	141
Уравнения линии в пространстве	142
Пересечение трех поверхностей	143
4. Плоскость	145
Нормальное уравнение плоскости	145
Геометрический смысл уравнения первой степени между тремя переменными.	
Приведение общего уравнения первой степени к нормальному виду	146
Исследование общего уравнения плоскости	149
Уравнение плоскости в отрезках	151
Уравнение плоскости, проходящей через данную точку	153

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки	153
Угол между двумя плоскостями	154
Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей	155
Точка пересечения трех плоскостей	156
Расстояние от точки до плоскости	157

Лекция №1. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Метод координат

Направленные отрезки

Понятия отрезка и его длины известны из элементарной геометрии. **Отрезок** — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Длина отрезка есть положительное число, получаемое измерением этого отрезка с помощью некоторого заранее выбранного отрезка — единицы масштаба. Отрезок, ограниченный точками А и В, а также его длину, обозначают АВ или ВА. Во многих вопросах математики и физики имеет значение **направление** отрезка, например если отрезок рассматривается как путь, который проходит движущаяся точка. Чтобы охарактеризовать направление отрезка, одну из двух ограничивающих его точек принимают за начало отрезка, а другую — за его конец; направлением отрезка считают направление от начала к концу. Отрезок, на котором указано направление (т. е. сказано, какая из двух граничных точек считается началом и какая — концом), называется **направленным отрезком**. Условимся обозначать направленный отрезок двумя буквами с чертой над ними, помещая на первом месте букву, указывающую начало отрезка. Так, например, направленный отрезок, для которого точка А является начальной, а В — конечной, будем обозначать \overrightarrow{AB} . Заметим, что направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BA} различны, так как направления их противоположны. Если рассматривать направленные отрезки, расположенные на одной прямой, то их направления можно характеризовать знаками + и -. Для этого одно из двух противоположных направлений этой прямой (безразлично, какое) назовем положительным, а другое —

отрицательным. На чертеже положительное направление усloвимся отмечать стрелкой (направление слева направо принято за положительное). Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется **осью**. Длина направленного отрезка, расположенного на оси, взятая с определенным знаком, называется **величиной** направленного отрезка оси. При этом знак выбирается положительный, если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси, и отрицательный, если направление отрезка противоположно положительному направлению оси. Так, например, величина направленного отрезка \overline{AC} положительна, а величина отрезка \overline{CB} отрицательна. Очевидно, длину направленного отрезка равна модулю его величины. Условимся длину направленного отрезка \overline{AB} обозначать через AB , а его величину — символом $\text{вел} \overline{AB}$. Из определения величины направленного отрезка оси следует, что величины отрезков \overline{AB} и \overline{BA} отличаются знаком:

$$\text{вел} \overline{AB} = -\text{вел} \overline{BA}.$$

Возьмем на некоторой оси три точки А, В, С и выясним, чему будет равна сумма величин направленных отрезков \overline{AB} и \overline{BC} . Мы сейчас покажем, что при любом расположении точек А, В и С на оси сумма величин направленных отрезков \overline{AB} и \overline{BC} будет равна величине направленного отрезка \overline{AC} :

$$\text{вел} \overline{AB} + \text{вел} \overline{BC} = \text{вел} \overline{AC}, \quad (1)$$

т. е. сумма величин направленных отрезков \overline{AB} и \overline{BC} , расположенных на оси так, что конец первого из них является началом второго, равна величине направленного отрезка \overline{AC} , началом которого является начало первого, а концом — конец второго направленного отрезка.

Для доказательства равенства (1) предположим сначала, что точка В располагается между точками А и С. Рассматривая направленный