

Г. Корн, Т. Корн

**Справочник по математике для научных
работников и инженеров**

Определения, теоремы, формулы

УДК 030
ББК 92
Г11

Г11 **Г. Корн**
Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн – М.: Книга по Требованию, 2024. – 832 с.

ISBN 978-5-458-25439-7

"Справочник" содержит сведения по следующим разделам: высшая алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, математический анализ (включая интегралы Лебега и Стильтьеса), векторный и тензорный анализ, криволинейные координаты, функции комплексного переменного, операционное исчисление, дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными, вариационное исчисление, абстрактная алгебра, матрицы, линейные векторные пространства, операторы и теория представлений, интегральные уравнения, краевые задачи, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы анализа, специальные функции. В настоящем издании заново написаны главы XI, XX и значительная часть глав XIII и XVIII. Книга пополнилась значительным количеством новых разделов.

ISBN 978-5-458-25439-7

© Издание на русском языке, оформление
«УОУО Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

(79). 3.1-13. Аналитическое задание кривых (81). 3.1-14. Способы задания поверхностей (81). 3.1-15. Специальные типы поверхностей (82). 3.1-16. Поверхности и кривые (82).	
3.2. Плоскость	83
3.2-1. Уравнение плоскости (83). 3.2-2. Параметрическое задание плоскости (84).	
3.3. Прямая линия	84
3.3-1. Уравнения прямой (84). 3.3-2. Параметрические уравнения прямой (85).	
3.4. Взаимное расположение точек, плоскостей и прямых	85
3.4-1. Углы (85). 3.4-2. Расстояния (86). 3.4-3. Специальные случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей (87). 3.4-4. Тангенциальные координаты плоскости и принцип двойственности (88). 3.4-5. Некоторые дополнительные соотношения (88).	
3.5. Поверхности второго порядка	89
3.5-1. Общее уравнение второй степени (89). 3.5-2. Инварианты (89). 3.5-3. Классификация поверхностей второго порядка (89). 3.5-4. Характеристическая квадратичная форма и характеристическое уравнение (89). 3.5-5. Диаметральные плоскости, диаметры и центры поверхностей второго порядка (91). 3.5-6. Главные плоскости и главные оси (91). 3.5-7. Приведение уравнения поверхности второго порядка к стандартному (каноническому) виду (92). 3.5-8. Касательные плоскости и нормали поверхности второго порядка. Полусы и поляры (93). 3.5-9. Некоторые дополнительные формулы и теоремы (96). 3.5-10. Параметрическое задание поверхностей второго порядка (97).	

Г Л А В А 4

**ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

4.1. Введение	98
4.2. Функции	93
4.2-1. Функции и переменные (98). 4.2-2. Функции со специальными свойствами (99).	
4.3. Точечные множества, интервалы и области	99
4.3-1. Вводные замечания (99). 4.3-2. Свойства множеств (100). 4.3-3. Границы (100). 4.3-4. Интервалы (101). 4.3-5. Определение окрестностей (101). 4.3-6. Открытые и замкнутые множества и области (101).	
4.4. Пределы, непрерывные функции и смежные вопросы	102
4.4-1. Пределы функций и последовательностей (102). 4.4-2. Операции над пределами (103). 4.4-3. Асимптотические соотношения между двумя функциями (103). 4.4-4. Равномерная сходимость (104). 4.4-5. Пределы по совокупности переменных и повторные пределы (104). 4.4-6. Непрерывные функции (104). 4.4-7. Односторонние пределы. Односторонняя непрерывность (105). 4.4-8. Монотонные функции и функции ограниченной вариации (106).	
4.5. Дифференциальное исчисление	107
4.5-1. Производные и дифференцирование (107). 4.5-2. Частные производные (107). 4.5-3. Дифференциалы (109). 4.5-4. Правила дифференцирования (110). 4.5-5. Однородные функции (112). 4.5-6. Якобианы и функциональная зависимость (112). 4.5-7. Неявные функции (112).	
4.6. Интегралы и интегрирование	113
4.6-1. Определенные интегралы (интеграл Римана) (113). 4.6-2. Несобственные интегралы (115). 4.6-3. Среднее значение (117). 4.6-4. Неопределенные интегралы (117). 4.6-5. Основная теорема интегрального исчисления (117). 4.6-6. Методы интегрирования (117). 4.6-7. Эллиптические интегралы (119). 4.6-8. Кратные интегралы (119). 4.6-9. Длина дуги спрямляемой кривой (120). 4.6-10. Криволинейные интегралы (120). 4.6-11. Площади и объемы (121). 4.6-12. Интегралы по поверхности и по объему (122). 4.6-13. Замена переменных в интегралах по объему и по поверхности (123). 4.6-14. Мера Лебега. Измеримые функции (123). 4.6-15. Интеграл Лебега (124). 4.6-16. Теоремы о сходимости (теоремы о непрерывности) (126). 4.6-17. Интеграл Стильтьеса (126). 4.6-18. Свертки (128). 4.6-19. Неравенства Минковского и Гельдера (128).	

4.7. Теоремы о среднем значении. Раскрытие неопределенностей. Теоремы Вейерштрасса о приближении	129
4.7-1. Теоремы о среднем значении (129). 4.7-2. Раскрытие неопределенностей (130). 4.7-3. Теоремы Вейерштрасса о приближении (131).	
4.8. Бесконечные ряды, бесконечные произведения и непрерывные дроби	131
4.8-1. Бесконечные ряды. Сходимость (131). 4.8-2. Ряды функций. Равномерная сходимость (132). 4.8-3. Операции над сходящимися рядами (132). 4.8-4. Операции над бесконечными рядами функций (133). 4.8-5. Улучшение сходимости и суммирование рядов. Суммы некоторых рядов (134). 4.8-6. Расходящиеся бесконечные ряды (136). 4.8-7. Бесконечные произведения (137). 4.8-8. Непрерывные (цепные) дроби (138).	
4.9. Признаки сходимости и равномерной сходимости бесконечных рядов и несобственных интегралов	139
4.9-1. Признаки сходимости бесконечных рядов (139). 4.9-2. Признаки равномерной сходимости бесконечных рядов (140). 4.9-3. Признаки сходимости несобственных интегралов (140). 4.9-4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов (142).	
4.10. Разложение функций в бесконечный ряд и представление их интегралом. Степенные ряды и ряд Тейлора	142
4.10-1. Разложение функций в бесконечный ряд и представление их интегралом (142). 4.10-2. Степенные ряды (143). 4.10-3. Теоремы Абеля и Таубера (145). 4.10-4. Ряд Тейлора (145). 4.10-5. Кратный ряд Тейлора (146).	
4.11. Ряды Фурье и интегралы Фурье	146
4.11-1. Вводные замечания (146). 4.11-2. Ряды Фурье (146). 4.11-3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье (148). 4.11-4. Функции, разложимые в ряд Фурье и представимые интегралом Фурье. Гармонический анализ (149). 4.11-5. Некоторые свойства коэффициентов Фурье и преобразования Фурье (156). 4.11-6. Интегралы Дирихле и Фейера (157). 4.11-7. Суммирование средними арифметическими (160). 4.11-8. Кратные ряды и интегралы Фурье (160).	

Г Л А В А 5

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

5.1. Векторы в евклидовом пространстве	162
5.2. Векторная алгебра	162
5.2-1. Сложение векторов и умножение вектора на (действительный) скаляр (162). 5.2-2. Разложение векторов по базисным векторам (163). 5.2-3. Декартовы прямоугольные координаты вектора (163). 5.2-4. Векторы и физические размерности (163). 5.2-5. Модуль (норма, абсолютная величина, длина) вектора (164). 5.2-6. Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов (164). 5.2-7. Векторное произведение двух векторов (164). 5.2-8. Смешанное (векторно-скалярное) произведение (165). 5.2-9. Другие произведения, содержащие более двух векторов (166). 5.2-10. Разложение вектора \mathbf{a} по направлению единичного вектора \mathbf{n} и ему перпендикулярному (166). 5.2-11. Решение уравнений (166).	
5.3. Векторные функции скалярного аргумента	166
5.3-1. Векторные функции и их пределы (166). 5.3-2. Дифференцирование (166). 5.3-3. Интегрирование и обыкновенные дифференциальные уравнения (167).	
5.4. Скалярные и векторные поля	168
5.4-1. Вводные замечания (168). 5.4-2. Скалярные поля (168). 5.4-3. Векторные поля (168). 5.4-4. Векторный элемент линии и длина дуги (168). 5.4-5. Криволинейные (линейные) интегралы (169). 5.4-6. Поверхностные интегралы (169). 5.4-7. Объемные интегралы (170).	
5.5. Дифференциальные операторы	170
5.5-1. Градиент, дивергенция и ротор; инвариантные определения (170). 5.5-2. Оператор ∇ (171). 5.5-3. Полный дифференциал, полная производная и производная по направлению (172). 5.5-4. Производные высших порядков по направлению. Ряд Тейлора (173). 5.5-5. Оператор Лапласа (173). 5.5-6. Операции второго порядка (173). 5.5-7. Операции над простейшими функциями от \mathbf{r} (174). 5.5-8. Функции от двух и более радиусов-векторов (174).	
5.6. Интегральные теоремы	175
5.6-1. Теорема о дивергенции и связанные с ней теоремы (175). 5.6-2. Теорема о роторе и связанные с ней теоремы (176). 5.6-3. Поля с разрывами на поверхностях (176).	

5.7. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции	176
5.7-1. Безвихревое векторное поле (176). 5.7-2. Соленоидальные (трубчатые) векторные поля (177). 5.7-3. Отыскание векторного поля по его ротору и дивергенции (177).	

Г Л А В А 6

СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

6.1. Вводные замечания	179
6.2. Системы криволинейных координат	179
6.2-1. Криволинейные координаты (179). 6.2-2. Координатные поверхности и координатные линии (179). 6.2-3. Элементы длины дуги и объема (179).	
6.3. Криволинейные координаты вектора	180
6.3-1. Координаты вектора и локальный (местный) базис (180). 6.3-2. Физические координаты вектора (182). 6.3-3. Контравариантные и ковариантные координаты вектора (182). 6.3-4. Запись векторных соотношений в криволинейных координатах (183).	
6.4. Системы ортогональных координат. Векторные соотношения в ортогональных координатах	183
6.4-1. Ортогональные координаты (183). 6.4-2. Векторные соотношения (184). 6.4-3. Криволинейный интеграл, поверхностный интеграл и объемный интеграл (185).	
6.5. Формулы для специальных систем ортогональных координат	185

Г Л А В А 7

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7.1. Вводные замечания	197
7.2. Функции комплексного переменного. Области в комплексной плоскости	197
7.2-1. Функции комплексного переменного (197). 7.2-2. z -плоскость и w -плоскость. Окрестности. Бесконечно удаленные точки (197). 7.2-3. Кривые и контуры (200). 7.2-4. Границы и области (200). 7.2-5. Комплексные контурные интегралы (200).	
7.3. Аналитические (регулярные, голоморфные) функции	201
7.3-1. Производная функция (201). 7.3-2. Уравнения Коши — Римана (201). 7.3-3. Аналитические функции (202). 7.3-4. Свойства аналитических функций (202). 7.3-5. Теорема о максимуме модуля (203).	
7.4. Многозначные функции	203
7.4-1. Ветви (203). 7.4-2. Точки разветвления и разрезы (203). 7.4-3. Римановы поверхности (204).	
7.5. Интегральные теоремы и разложения в ряды	205
7.5-1. Интегральные теоремы (205). 7.5-2. Разложение в ряд Тейлора (206). 7.5-3. Разложение в ряд Лорана (206).	
7.6. Нули и изолированные особые точки	207
7.6-1. Нули (207). 7.6-2. Особые точки (207). 7.6-3. Нули и особенности в бесконечности (209). 7.6-4. Теоремы Вейерштрасса и Пикара (209). 7.6-5. Целые функции (209). 7.6-6. Разложение целой функции в произведение (210). 7.6-7. Мероморфные функции (210). 7.6-8. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (211). 7.6-9. Нули и полюсы мероморфных функций (211).	
7.7. Вычеты и контурные интегралы	211
7.7-1. Вычеты (211). 7.7-2. Теорема о вычетах (212). 7.7-3. Вычисление определенных интегралов (212). 7.7-4. Применение вычетов к суммированию рядов (213).	
7.8. Аналитическое продолжение	214
7.8-1. Аналитическое продолжение и моногенные аналитические функции (214). 7.8-2. Методы аналитического продолжения (214).	
7.9. Конформное отображение	215
7.9-1. Конформное отображение (215). 7.9-2. Дробно-линейное отображение (преобразование) (216). 7.9-3. Отображение $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ (217).	

7.9-4. Интеграл Шварца — Кристоффеля (217). 7.9-5. Таблица отображений (218). 7.9-6. Функции, отображающие специальные области на единичный круг (227).

Г Л А В А 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ДРУГИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.1. Вводные замечания	228
8.2. Преобразование Лапласа	228
8.2-1. Определение (228). 8.2-2. Абсолютная сходимость (228). 8.2-3. Область определения (229). 8.2-4. Достаточные условия существования преобразования Лапласа (229). 8.2-5. Обратное преобразование Лапласа (229). 8.2-6. Теорема обращения (229). 8.2-7. Существование обратного преобразования Лапласа (230). 8.2-8. Единственность преобразования Лапласа и его обращения (230).	
8.3. Соответствие между операциями над оригиналами и изображениями . . .	230
8.3-1. Таблица соответствия операций (230). 8.3-2. Преобразования Лапласа периодических функций и произведений оригиналов на синус или косинус (230). 8.3-3. Преобразование произведения (теорема о свертке) (233). 8.3-4. Предельные теоремы (233).	
8.4. Таблицы преобразования Лапласа и вычисление обратных преобразований Лапласа	234
8.4-1. Таблицы преобразования Лапласа (234). 8.4-2. Вычисление обратных преобразований Лапласа (234). 8.4-3. Применение контурного интегрирования (234). 8.4-4. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение Хевисайда (234). 8.4-5. Обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций: разложение на простейшие дроби (252). 8.4-6. Разложения в ряды (252). 8.4-7. Разложения по степеням t (253). 8.4-8. Разложения по многочленам Лагерра (253). 8.4-9. Разложения в асимптотические ряды (254).	
8.5. Формальное преобразование Лапласа импульсных функций	255
8.6. Некоторые другие функциональные преобразования	256
8.6-1. Вводные замечания (256). 8.6-2. Двустороннее преобразование Лапласа (256). 8.6-3. Преобразование Лапласа в форме интеграла Стильтьеса (256). 8.6-4. Преобразования Ганкеля и Фурье — Бесселя (258).	
8.7. Конечные интегральные преобразования, производящие функции и z -преобразование	260
8.7-1. Ряды как функциональные преобразования. Конечные преобразования Фурье и Ганкеля (260). 8.7-2. Производящие функции (260). 8.7-3. z -преобразование. Определение и формула обращения (263).	

Г Л А В А 9

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

9.1. Введение	265
9.1-1. Вводные замечания (265). 9.1-2. Обыкновенные дифференциальные уравнения (265). 9.1-3. Системы дифференциальных уравнений (266). 9.1-4. Существование решений (266). 9.1-5. Общие указания (266).	
9.2. Уравнения первого порядка	266
9.2-1. Существование и единственность решений (266). 9.2-2. Геометрическое толкование. Особые интегралы (267). 9.2-3. Преобразование переменных (268). 9.2-4. Решение специальных типов уравнений первого порядка (268). 9.2-5. Общие методы интегрирования (270).	
9.3. Линейные дифференциальные уравнения	271
9.3-1. Линейные дифференциальные уравнения. Принцип наложения (271). 9.3-2. Линейная независимость и фундаментальные системы решений (271). 9.3-3. Решение методом вариации постоянных. Функции Грина (272). 9.3-4. Приведение двухточечных краевых задач к задачам Коши (275). 9.3-5. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной области. Тейлоровские разложения решения и влияние особенностей (275). 9.3-6. Решение однородных уравнений путем разложения в ряд в окрестности правильной особой точки (276). 9.3-7. Методы интегральных преобразований (277). 9.3-8. Линейные уравнения второго порядка (278). 9.3-9. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение Гаусса и P -уравнение Римана (279).	

9.3-10. Вырожденные гипергеометрические функции (282). 9.3-11. Обобщенные гипергеометрические ряды (283).	
9.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	283
9.4-1. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (283). 9.4-2. Неоднородные уравнения (285). 9.4-3. Свертки и функции Грина (286). 9.4-4. Устойчивость (287). 9.4-5. Операторный метод решения (288). 9.4-6. Периодические внешние нагрузки и решения (289). 9.4-7. Передаточные функции и частотные характеристики (290). 9.4-8. Нормальные координаты и собственные колебания (291).	
9.5. Нелинейные уравнения второго порядка	292
9.5-1. Вводные замечания (292). 9.5-2. Представление на фазовой плоскости. Графический метод решения (292). 9.5-3. Особые точки и предельные циклы (293). 9.5-4. Устойчивость решений по Ляпунову (294). 9.5-5. Приближенный метод Крылова и Боголюбова (296). 9.5-6. Интеграл живых сил (297).	
9.6. Дифференциальные уравнения Пфаффа	298
9.6-1. Дифференциальные уравнения Пфаффа (298). 9.6-2. Вполне интегрируемый случай (298).	

Г Л А В А 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

10.1. Введение и обзор	299
10.1-1. Вводные замечания (299). 10.1-2. Дифференциальные уравнения с частными производными (299). 10.1-3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными; разделение переменных (300).	
10.2. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка	301
10.2-1. Уравнения с двумя независимыми переменными. Геометрическая интерпретация (301). 10.2-2. Задача с начальными условиями (задача Коши) (302). 10.2-3. Полные интегралы. Общие, частные, особые интегралы; решения характеристических уравнений (303). 10.2-4. Уравнения с n независимыми переменными (304). 10.2-5. Преобразования соприкосновения (306). 10.2-6. Канонические уравнения и канонические преобразования (307). 10.2-7. Уравнение Гамильтона — Якоби. Решение канонических уравнений (310).	
10.3. Гиперболические, параболические и эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными. Характеристики	312
10.3-1. Квазилинейные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристики (312). 10.3-2. Решение гиперболических уравнений методом характеристик (313). 10.3-3. Преобразование гиперболических, параболических и эллиптических уравнений к каноническому виду (314). 10.3-4. Типичные краевые задачи для уравнений второго порядка (315). 10.3-5. Одномерное волновое уравнение (316). 10.3-6. Метод Римана — Вольтерра для линейных гиперболических уравнений (317). 10.3-7. Уравнения с тремя и более независимыми переменными (318).	
10.4. Линейные уравнения математической физики. Частные решения	319
10.4-1. Физические основы и обзор (319). 10.4-2. Линейные краевые задачи (321). 10.4-3. Частные решения уравнения Лапласа: трехмерный случай (322). 10.4-4. Частные решения для трехмерного уравнения Гельмгольца (324). 10.4-5. Частные решения двумерных задач (325). 10.4-6. Уравнение Шредингера (326). 10.4-7. Частные решения для уравнения теплопроводности и диффузии (326). 10.4-8. Частные решения для волнового уравнения. Синусоидальные волны (326). 10.4-9. Решение краевой задачи разложением в ортогональные ряды. Примеры (328).	
10.5. Метод интегральных преобразований	329
10.5-1. Общая теория (329). 10.5-2. Преобразование Лапласа по временной переменной (330). 10.5-3. Решение краевых задач методом интегральных преобразований. Примеры (331). 10.5-4. Формулы Дюамеля (332).	

Г Л А В А 11

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

11.1. Вводные замечания	333
11.2. Экстремумы функций одного действительного переменного	333
11.2-1. Локальные максимумы и минимумы (333). 11.2-2. Условия существования внутренних максимумов и минимумов (333).	

11.3. Экстремумы функций двух и большего числа действительных переменных	334
11.3-1. Локальные максимумы и минимумы (334). 11.3-2. Формула Тейлора для приращения функции (334). 11.3-3. Условия существования внутренних максимумов и минимумов (334). 11.3-4. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа (335). 11.3-5. Численные методы (336).	
11.4. Линейное программирование, игры и смежные вопросы	336
11.4-1. Задача линейного программирования (336). 11.4-2. Симплекс-метод (339). 11.4-3. Нелинейное программирование. Теорема Куна — Такера (342). 11.4-4. Введение в конечные игры двух партнеров с нулевой суммой (342).	
11.5. Вариационное исчисление. Максимумы и минимумы определенных интегралов.	344
11.5-1. Вариации (344). 11.5-2. Максимумы и минимумы определенных интегралов (345). 11.5-3. Решение вариационных задач (346).	
11.6. Экстремали как решения дифференциальных уравнений: классическая теория	346
11.6-1. Необходимые условия максимумов и минимумов (346). 11.6-2. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа (348). 11.6-3. Изопериметрические задачи (349). 11.6-4. Решение вариационных задач в случае, когда подынтегральная функция содержит производные высших порядков (350). 11.6-5. Вариационные задачи с неизвестными граничными значениями и неизвестными пределами интегрирования (350). 11.6-6. Задачи Больца и Майера (351). 11.6-7. Ломаные экстремали. Отражение, преломление и односторонние экстремумы (352). 11.6-8. Канонические уравнения и уравнение Гамильтона — Якоби (353). 11.6-9. Вариационные задачи в случае нескольких независимых переменных: максимумы и минимумы кратных интегралов (354). 11.6-10. Достаточные условия для максимума и минимума в простейшей задаче (355).	
11.7. Решение вариационных задач прямыми методами	356
11.7-1. Прямые методы (356). 11.7-2. Метод Релея — Ритца (357). 11.7-3. Приближение $y(x)$ полигональными функциями (357).	
11.8. Задачи управления и принцип максимума	357
11.8-1. Постановка задачи (357). 11.8-2. Принцип максимума Понтрягина (360). 11.8-3. Примеры (362). 11.8-4. Матричные обозначения в задачах управления (364). 11.8-5. Ограничения-неравенства для переменных состояния. Угловые условия (365). 11.8-6. Метод динамического программирования (366).	
11.9. Шаговые задачи управления и динамическое программирование	366
11.9-1. Постановка задачи (366). 11.9-2. Принцип оптимальности Беллмана (367).	

Г Л А В А 12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: СОВРЕМЕННАЯ (АБСТРАКТНАЯ) АЛГЕБРА И АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

12.1. Введение	333
12.1-1. Математические модели (368). 12.1-2. Обзор (369). 12.1-3. «Равенство» и отношения эквивалентности (369). 12.1-4. Преобразования, функции, операции (369). 12.1-5. Инвариантность (370). 12.1-6. Представление одной модели другой: гомоморфизмы и изоморфизмы (370).	
12.2. Алгебра моделей с одной определяющей операцией: группы	371
12.2-1. Определение и основные свойства группы (371). 12.2-2. Подгруппы (371). 12.2-3. Циклические группы. Порядок элемента группы (372). 12.2-4. Произведения подмножеств. Смежные классы (372). 12.2-5. Сопряженные элементы и подгруппы. Нормальные делители. Фактор-группы (372). 12.2-6. Нормальный ряд. Композиционный ряд (372). 12.2-7. Центр. Нормализаторы (373). 12.2-8. Группы преобразований или операторов (373). 12.2-9. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп. Представление групп (373). 12.2-10. Аддитивные группы. Классы вычетов и сравнимость (374).	
12.3. Алгебра моделей с двумя определяющими операциями: кольца, поля и области целостности	374
12.3-1. Определения и основные теоремы (374). 12.3-2. Подкольца и подполя. Идеалы (375). 12.3-3. Расширения (375).	
12.4. Модели, включающие в себя более одного класса математических объектов: линейные векторные пространства и линейные алгебры	375
12.4-1. Линейные векторные пространства (375). 12.4-2. Линейные алгебры (376).	

12.5. Модели, допускающие определение предельных процессов: топологические пространства	377
12.5-1. Топологические пространства (377). 12.5-2. Метрические пространства (378). 12.5-3. Топология, окрестности и сходимости в метрическом пространстве (378). 12.5-4. Метрические пространства со специальными свойствами. Теория точечных множеств (379). 12.5-5. Примеры: пространства числовых последовательностей и функций (380). 12.5-6. Теорема Банаха о сжатых отображениях и последовательные приближения (382).	
12.6. Порядок	382
12.6-1. Частично упорядоченные множества (382). 12.6-2. Линейно упорядоченные множества (382). 12.6-3. Упорядоченные поля (383).	
12.7. Комбинации моделей: прямое произведение, топологическое произведение и прямая сумма	383
12.7-1. Декартово произведение (383). 12.7-2. Прямое произведение групп (383). 12.7-3. Прямое произведение действительных векторных пространств (383). 12.7-4. Топологическое произведение (384). 12.7-5. Прямая сумма (384).	
12.8. Булевы алгебры	384
12.8-1. Булевы алгебры (384). 12.8-2. Булевы функции. Приведение к каноническому виду (385). 12.8-3. Отношение включения (386). 12.8-4. Алгебра классов (386). 12.8-5. Изоморфизм булевых алгебр. Диаграммы Венна (386). 12.8-6. Алгебры событий и символическая логика (387). 12.8-7. Представление булевых функций истинностными таблицами. Карты Карно (389). 12.8-8. Полная аддитивность. Алгебры меры (389).	

Г Л А В А 13

МАТРИЦЫ, КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

13.1. Вводные замечания	390
13.2. Алгебра матриц и матричное исчисление	390
13.2-1. Прямоугольные матрицы (390). 13.2-2. Основные операции (392). 13.2-3. Нулевая и единичная матрицы; обратные матрицы (393). 13.2-4. Целочисленные степени квадратных матриц (393). 13.2-5. Матрицы как строительные блоки математических моделей (393). 13.2-6. Умножение на матрицы специального вида. Матрицы перестановки (394). 13.2-7. Ранг, след и определитель матрицы (394). 13.2-8. Разбиение матриц (394). 13.2-9. Клеточные матрицы. Прямые суммы (395). 13.2-10. Прямое (внешнее) произведение матриц (395). 13.2-11. Сходимость и дифференцирование (395). 13.2-12. Функции матриц (395).	
13.3. Матрицы со специальными свойствами симметрии	396
13.3-1. Транспонированная и эрмитово сопряженная матрица (396). 13.3-2. Матрицы со специальными свойствами симметрии (396). 13.3-3. Правила комбинирования (396). 13.3-4. Теоремы о разложении. Нормальные матрицы (397).	
13.4. Эквивалентные матрицы, собственные значения, приведение к диагональному виду и смежные вопросы	398
13.4-1. Эквивалентные и подобные матрицы (398). 13.4-2. Собственные значения и спектры квадратных матриц (398). 13.4-3. Приведение квадратной матрицы к треугольному виду. Алгебраическая кратность собственного значения (399). 13.4-4. Приведение матриц к диагональному виду (399). 13.4-5. Собственные значения и характеристическое уравнение матрицы (400). 13.4-6. Собственные значения клеточных матриц (прямых) сумм (401). 13.4-7. Теорема Кэли — Гамильтона и смежные вопросы (401).	
13.5. Квадратичные и эрмитовы формы	401
13.5-1. Билинейные формы (401). 13.5-2. Квадратичные формы (401). 13.5-3. Эрмитовы формы (402). 13.5-4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм. Приведение к сумме квадратов (402). 13.5-5. Одновременное приведение двух квадратичных или эрмитовых форм к сумме квадратов (404). 13.5-6. Признаки положительной определенности, неотрицательности и т. д. (404).	
13.6. Матричные обозначения для систем дифференциальных уравнений (динамических систем). Возмущения и теория устойчивости Ляпунова	405
13.6-1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Матричные обозначения (405). 13.6-2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (406). 13.6-3. Линейные системы с переменными коэффициентами (407). 13.6-4. Методы возмущений и уравнения в вариациях (408). 13.6-5. Устойчивость решений: определения (409). 13.6-6. Функции Ляпунова и устойчивость (410). 13.6-7. Приложения и примеры (411).	

Г Л А В А 14

**ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ). ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТРИЦАМИ**

14.1.	Введение. Системы отсчета и преобразования координат	414
	14.1-1. Вводные замечания (414). 14.1-2. Числовое описание математических моделей: системы отсчета (414). 14.1-3. Преобразования координат (414). 14.1-4. Инвариантность (415). 14.1-5. Системы мер (415).	
14.2.	Линейные векторные пространства	415
	14.2-1. Определяющие свойства (415). 14.2-2. Линейные многообразия и подпространства в \mathbb{Z} (416). 14.2-3. Линейно независимые и линейно зависимые векторы (416). 14.2-4. Размерность линейного многообразия или векторного пространства. Базисы и системы координат (системы отсчета) (416). 14.2-5. Нормированные векторные пространства (417). 14.2-6. Унитарные векторные пространства (417). 14.2-7. Норма, метрика и сходимости в унитарных векторных пространствах. Гильбертовы пространства (418). 14.2-8. Теорема о проекции (419).	
14.3.	Линейные преобразования (линейные операторы)	419
	14.3-1. Линейные преобразования векторных пространств. Линейные операторы (419). 14.3-2. Множество значений, ядро и ранг линейного преобразования (оператора) (419). 14.3-3. Сложение и умножение на скаляры. Нулевое преобразование (420). 14.3-4. Произведение двух линейных преобразований (операторов). Тожественное преобразование (420). 14.3-5. Невырожденные линейные преобразования (операторы). Обратные преобразования (операторы) (420). 14.3-6. Целые степени операторов (420).	
14.4.	Линейные операторы в нормированном или гильбертовом пространстве. Эрмитовы и унитарные операторы	421
	14.4-1. Ограниченные линейные преобразования (421). 14.4-2. Ограниченные линейные операторы в нормированном векторном пространстве (421). 14.4-3. Сопряженный оператор (421). 14.4-4. Эрмитовы операторы (422). 14.4-5. Унитарные операторы (422). 14.4-6. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы в действительных унитарных векторных пространствах (422). 14.4-7. Правила комбинирования (423). 14.4-8. Теоремы о разложении. Нормальные операторы (423). 14.4-9. Сопряженные векторные пространства. Более общее определение сопряженных операторов (424). 14.4-10. Бесконечно малые линейные преобразования (424).	
14.5.	Матричное представление векторов и линейных преобразований (операторов)	425
	14.5-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «активная» точка зрения (425). 14.5-2. Матричное представление векторов и линейных преобразований (операторов) (426). 14.5-3. Матричные обозначения для систем линейных уравнений (426). 14.5-4. Диадическое представление линейных операторов (427).	
14.6.	Замена системы координат	427
	14.6-1. Преобразование базисных векторов и координат векторов: «пассивная» точка зрения (427). 14.6-2. Представление линейного оператора в различных базисах (428). 14.6-3. Последовательное применение операторов (428).	
14.7.	Представление скалярного произведения. Ортонормированные базисы . . .	429
	14.7-1. Представление скалярного произведения (429). 14.7-2. Замена системы координат (430). 14.7-3. Ортогональные векторы и ортонормированные системы векторов (430). 14.7-4. Ортонормированные базисы (полные ортонормированные системы) (430). 14.7-5. Матрицы соответствующие сопряженным операторам (431). 14.7-6. Взаимные базисы (432). 14.7-7. Сравнение обозначений (433).	
14.8.	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов . . .	433
	14.8-1. Вводные замечания (433). 14.8-2. Инвариантные многообразия. Разложимые линейные преобразования (линейные операторы) и матрицы (433). 14.8-3. Собственные векторы, собственные значения и спектр (434). 14.8-4. Собственные векторы и собственные значения нормальных и эрмитовых операторов (435). 14.8-5. Определение собственных значений и собственных векторов: конечномерный случай (436). 14.8-6. Приведение и диагонализация матриц. Преобразование к главным осям (437). 14.8-7. «Обобщенная» задача о собственных значениях (439). 14.8-8. Задачи о собственных значениях как задачи о стационарных значениях (439). 14.8-9. Границы для собственных значений линейных операторов (441). 14.8-10. Неоднородные линейные векторные уравнения (442).	

14.9.	Представления групп и смежные вопросы	443
	14.9-1. Представления групп (443). 14.9-2. Приведение представлений (443). 14.9-3. Неприводимые представления группы (444). 14.9-4. Характер представления (445). 14.9-5. Соотношения ортогональности (445). 14.9-6. Прямые произведения представлений (446). 14.9-7. Представления колец, полей и линейных алгебр (446).	
14.10.	Математическое описание вращений	446
	14.10-1. Вращения в трехмерном евклидовом векторном пространстве (446). 14.10-2. Угол поворота. Ось вращения (447). 14.10-3. Параметры Эйлера и вектор Гиббса (448). 14.10-4. Представление векторов и вращений спиновыми матрицами и кватернионами. Параметры Кэли — Клейна (448). 14.10-5. Вращения вокруг осей координат (449). 14.10-6. Углы Эйлера (450). 14.10-7. Бесконечно малые вращения, непрерывное вращение и угловая скорость (452). 14.10-8. Группа трехмерных вращений и ее представления (454).	

Г Л А В А 15

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

15.1.	Введение. Функциональный анализ	456
	15.1-1. Вводные замечания (456). 15.1-2. Обозначения (456).	
15.2.	Функции как векторы. Разложения по ортогональным функциям	457
	15.2-1. Квадратично интегрируемые функции как векторы. Скалярное произведение и нормирование (457). 15.2-2. Метрика и сходимость в L_2 . Сходимость в среднем (458). 15.2-3. Ортогональные функции и ортонормированные последовательности функций (459). 15.2-4. Полные ортонормированные последовательности функций. Ортонормированные базисы (459). 15.2-5. Ортогонализация и нормирование последовательности функций (460). 15.2-6. Аппроксимации и разложения в ряды по ортогональным функциям (460). 15.2-7. Линейные операции над функциями (460).	
15.3.	Линейные интегральные преобразования и линейные интегральные уравнения	461
	15.3-1. Линейные интегральные преобразования (461). 15.3-2. Линейные интегральные уравнения. Обзор (462). 15.3-3. Однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Собственные функции и собственные значения (463). 15.3-4. Теоремы разложения (463). 15.3-5. Итерированные ядра (464). 15.3-6. Эрмитовы интегральные формы. Задача о собственных значениях как вариационная задача (465). 15.3-7. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода (465). 15.3-8. Решение линейного интегрального уравнения (16) (467). 15.3-9. Решение линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода (468). 15.3-10. Интегральные уравнения Вольterra (469).	
15.4.	Линейные краевые задачи и задачи о собственных значениях для дифференциальных уравнений	470
	15.4-1. Линейные краевые задачи. Постановка задачи и обозначения (470). 15.4-2. Дополнительное дифференциальное уравнение и краевые условия для линейной краевой задачи. Теоремы о суперпозиции (470). 15.4-3. Эрмитово сопряженные и сопряженные краевые задачи. Эрмитовы операторы (471). 15.4-4. Теорема Фредгольма об альтернативе (473). 15.4-5. Задачи о собственных значениях для линейных дифференциальных уравнений (473). 15.4-6. Собственные значения и собственные функции эрмитовой задачи о собственных значениях. Полные ортонормированные множества собственных функций (474). 15.4-7. Эрмитова задача о собственных значениях как вариационная задача (475). 15.4-8. Одномерная задача Штурма — Лиувилля о собственных значениях (476). 15.4-9. Задача Штурма — Лиувилля для уравнений с частными производными второго порядка (477). 15.4-10. Теоремы сравнения (477). 15.4-11. Решение дискретных задач о собственных значениях методами возмущений (478). 15.4-12. Решение краевых задач посредством разложений в ряды по собственным функциям (479).	
15.5.	Функции Грина. Связь краевых задач и задач о собственных значениях с интегральными уравнениями	480
	15.5-1. Функции Грина для краевой задачи с однородными краевыми условиями (480). 15.5-2. Связь краевых задач и задач о собственных значениях с интегральными уравнениями. Резольвента Грина (481). 15.5-3. Приложение метода функций Грина к задаче с начальными условиями: обобщенное уравнение диффузии (482). 15.5-4. Метод функций Грина для неоднородных краевых условий (483).	

15.6. Теория потенциала	484
15.6-1. Введение. Дифференциальные уравнения Лапласа и Пуассона (484). 15.6-2. Трехмерная теория потенциала. Классические краевые условия задачи (484). 15.6-3. Теорема Кельвина об инверсии (485). 15.6-4. Свойства гармонических функций (485). 15.6-5. Решения уравнений Лапласа и Пуассона как потенциалы (486). 15.6-6. Решение трехмерных краевых задач посредством функций Грина (488). 15.6-7. Двумерная теория потенциала. Логарифмический потенциал (490). 15.6-8. Двумерная теория потенциала; сопряженные гармонические функции (490). 15.6-9. Решение двумерных краевых задач. Функции Грина и конформные отображения (492). 15.6-10. Распространение теории на более общие дифференциальные уравнения. Запаздывающие и опережающие потенциалы (493).	
Г Л А В А 16	
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ	
16.1. Введение	494
16.1-1. Вводные замечания (494). 16.1-2. Системы координат и допустимые преобразования (494). 16.1-3. Компоненты объектов. Индексные обозначения (494). 16.1-4. Системы отсчета и индуцированные преобразования. Геометрические объекты (495).	
16.2. Абсолютные (истинные) тензоры и относительные тензоры (псевдотензоры)	496
16.2-1. Определение абсолютных и относительных тензоров, основанное на законе преобразования их компонент (496). 16.2-2. Инфинитезимальное перемещение. Градиент скалярного поля (498).	
16.3. Тензорная алгебра: определение основных операций	499
16.3-1. Равенство тензоров (499). 16.3-2. Нуль-тензор (499). 16.3-3. Сложение тензоров (499). 16.3-4. Умножение тензора на абсолютный скаляр (499). 16.3-5. Свертывание смешанного тензора (499). 16.3-6. Произведение (внешнее) двух тензоров (500). 16.3-7. Внутреннее произведение (500). 16.3-8. Знак тензора (500).	
16.4. Тензорная алгебра. Инвариантность тензорных уравнений	501
16.4-1. Инвариантность тензорных уравнений (501).	
16.5. Симметричные и антисимметричные тензоры	502
16.5-1. Симметричные и антисимметричные объекты (502). 16.5-2. Символы Кронекера (502). 16.5-3. ϵ -объекты (символы Леви-Чивита) (503). 16.5-4. Альтернированное произведение двух векторов (503).	
16.6. Локальная система базисных векторов (локальный базис)	504
16.6-1. Выражение векторов и тензоров через векторы локального базиса (504). 16.6-2. Преобразование локального базиса при преобразовании координат (504).	
16.7. Тензоры в римановых пространствах. Ассоциированные тензоры	505
16.7-1. Риманово пространство и фундаментальные тензоры (505). 16.7-2. Ассоциированные тензоры. Поднятие и опускание индексов (506). 16.7-3. Эквивалентность ассоциированных тензоров (506). 16.7-4. Операции над тензорами в римановых пространствах (507).	
16.8. Скалярное произведение векторов и связанные с ним понятия	507
16.8-1. Скалярное (внутреннее) произведение двух векторов в римановом пространстве (507). 16.8-2. Скалярные произведения локальных базисных векторов. Ортогональная система координат (507). 16.8-3. Физические компоненты тензора (508). 16.8-4. Векторное произведение и смешанное произведение (508).	
16.9. Тензоры ранга 2 в римановом пространстве	509
16.9-1. Диадные произведения (509). 16.9-2. Умножение тензоров ранга 2 и векторов и связанная с ним система обозначений (510). 16.9-3. Собственные векторы и собственные значения (510).	
16.10. Абсолютное дифференциальное исчисление. Ковариантное дифференцирование	510
16.10-1. Абсолютные дифференциалы (510). 16.10-2. Абсолютный дифференциал относительного тензора (512). 16.10-3. Символы Кристоффеля (512). 16.10-4. Ковариантное дифференцирование (513). 16.10-5. Правила ковариантного дифференцирования (514). 16.10-6. Ковариантные производные высших порядков (514). 16.10-7. Дифференциальные операторы и дифференциальные инварианты (515). 16.10-8. Абсолютные (внутренние) производ-	