Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 8

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

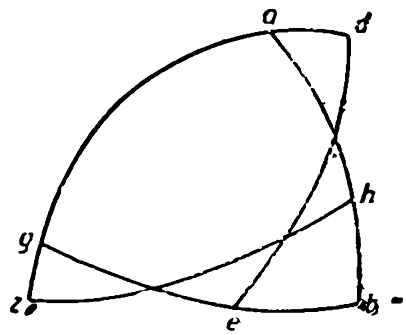
Р.Н. Бончковский
Р11 Математическое просвещение. Выпуск 8 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 74 с.

ISBN 978-5-458-25370-3

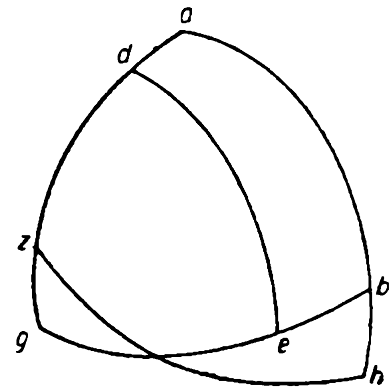
Сборник содержит оригинальные статьи по элементарной математике и простейшим вопросам высшей математики, задачи и библиографию по этим дисциплинам и т. д. Сборники рассчитаны на весьма широкий круг читателей: наиболее сильные учащиеся средней школы, студенты техникумов, вузов и втузов, преподаватели школ, техникумов и частично вузов (особенно педвузов) найдут в них интересный материал для чтения. Темы выпуска: О законе синусов для сферического треугольника - О свойствах правильных многоугольников - Об одном свойстве числа т=V(5+1)/2 - Решение одной комбинаторной задачи - О параболах, вписанных в треугольник - Релятивное интегрирование - О расходимости гармонического ряда - Один простой способ геометрического построения параболы второго порядка и связанное с ним построение параболы Нейля - К теории решения уравнений и неравенств.

ISBN 978-5-458-25370-3

согласно предыдущему доказательству [1]) отношение синуса дуги *ga* к синусу дуги *ab* равно отношению синуса дуги *gd* к синусу дуги *de*, или, перемещая члены пропорции, отношение синуса *ga* к синусу *gd* равно отношению синуса *ab* к синусу *de*.



Фиг. 2.



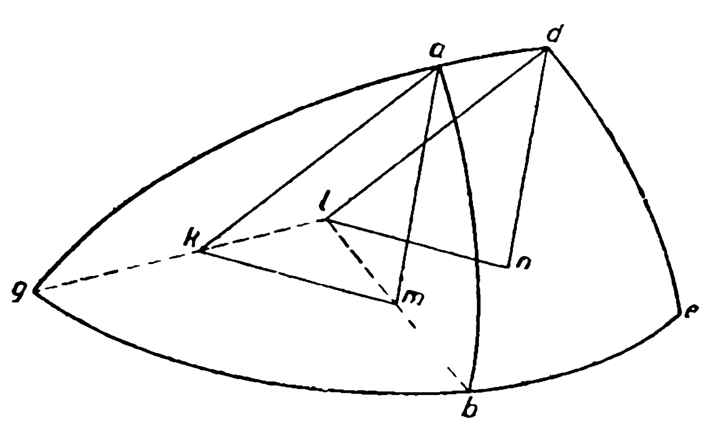
Фиг. 3.

Подобным же образом, два круга *az* и *ah* пересекаются под углом, и на окружности круга *az* имеются две точки *g* и *z*, из которых опущены две перпендикулярные дуги *gb* и *zh*. А потому согласно предыдущим теоремам, отношение синуса *ag* к синусу *gb* равно отношению синуса *az* к синусу *zh* и, изменяя порядок, синус *ag* относится к синусу *az*, как синус *gb* — к синусу *zh*.

Кроме того, синус *ag* относится к синусу *az*, как синус *ga* к синусу *gd*. Каждая из дуг *az* и *gd* есть квадрант. Следовательно, синус стороны *ab* относится к синусу *de*, как синус стороны *gb* — к синусу *zh*, и таково же отношение синуса стороны *ag* к синусу квадранта. Далее, синус *de* есть синус угла *agb*, так как дуга *de* служит мерой угла *agb* с точкой *g* как полюсом круга *de*. Подобным же образом, синус *zh* есть синус угла *bag*. Наконец, синус квадранта есть синус прямого угла;

---

[1]) К сожалению, мы не имели в руках полного текста книги Региомонтана, поэтому нам неизвестно, какое именно предыдущее доказательство он имеет в виду. Возможно, что он говорит о следующем: из точек *a* и *d* опустим перпендикуляры *dk* и *dl* на диаметр сферы, проходящий через точку *g*, и перпендикуляры *am* и *dn* на плоскость круга *gbl*; основания этих перпендикуляров соединяем отрезками *km* и *ln*.

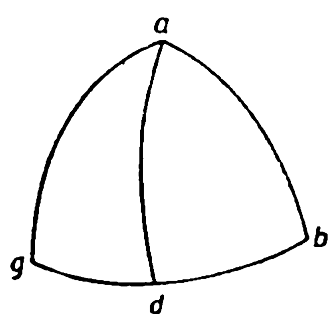


Треугольники *akm* и *dlm* подобны, так как их стороны попарно параллельны. Поэтому *ak* так относится к *am*, как *ld* к *dn*. Но *ak* есть синус дуги *ag*, *am* есть синус дуги *ab*, *ld* — синус дуги *ad*, *dn* — синус дуги *de*. Следовательно, синус дуги *ag* так относится к синусу угла *ab*, как синус дуги *ad* — к синусу угла *de*.

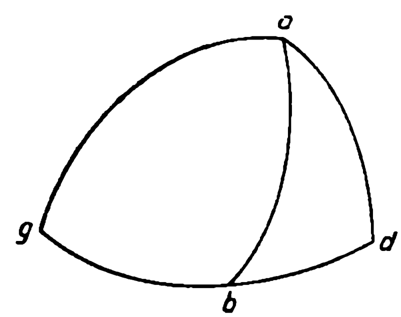
следовательно, отношение синуса стороны ab к синусу угла agb и отношение синуса стороны bg к синусу угла bag, а также отношение синуса стороны ag к синусу прямого угла abg будут одинаковы, что и требовалось доказать.

В любом треугольнике, непрямоугольном, синусы сторон пропорциональны синусам противолежащих углов.

Теорема, которая была доказана для прямоугольных треугольников, может быть доказана и для непрямоугольных треугольников. Пусть треугольник abg не имеет вовсе прямого угла. Я утверждаю, что отношение синуса стороны ab к синусу угла g и отношение синуса стороны bg к синусу угла a, и отношение синуса стороны ga к синусу угла b — равны между собой.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Опустим перпендикуляр ad из точки a, который пересечет дугу bg, если он остается внутри треугольника, или же встретит продолжение дуги bg, если он окажется вне треугольника, причем этот перпендикуляр не может иметь общего конца ни с ab, ни с ag, так как в этом случае один из углов b и g оказался бы прямым углом, что противоречит нашему предположению. Поэтому пусть он—берем первый случай—падает внутри треугольника, разбивая его на два треугольника abd и agd (фиг. 4). Согласно предыдущему доказательству, только с перестановкой членов отношение синуса ab к синусу ad равно отношению синуса угла adb, прямого угла, *к синусу угла* abd. Но согласно этому же доказательству отношение синуса ad к синусу ag равно отношению синуса угла agd к синусу прямого угла adg, на основании того, что синус угла adg равен синусу угла adb и что каждый из них прямой. Отсюда следует, что синус ab относится к синусу ag, как синус угла agb — к синусу угла abg; и, изменяя порядок, синус стороны ab относится к синусу угла agb, как синус стороны ag—к синусу угла abg.

Наконец, можно заключить, что отношение синуса стороны bg к синусу угла bag равно указанным прежде отношениям, если из одной из указанных вершин b или g опустить дугу, перпендикулярную к противоположной стороне.

Если же перпендикуляр ad окажется вне треугольника, вследствие чего чертеж несколько изменится (фиг. 5), то мы опять постараемся получить тот же результат, так как, видоизменяя предыдущее доказательство, получим, что синус *ab* будет относиться к синусу *ad*, как синус прямого угла *adb* относится к синусу угла *abd*.

Подобным же образом синус *ad* относится к синусу *ag*, как синус угла *agb* относится к синусу прямого угла *adg*. Следовательно, синус стороны *ab* относится к синусу стороны *ag*, как синус угла *agb* относится к синусу угла *abd*.

Кроме того, синус угла *abd* равен синусу угла *abg*, как всем известно. Следовательно, синус *ab* относится к синусу *ag*, как синус угла *agb* — к синусу угла *abd*, а потому также, перемещая члены, синус стороны *ab* относится к синусу угла *agb*, как синус стороны *ag* относится к синусу угла *abg*. Наконец, мы докажем, что тому же равно отношение синуса стороны *bg* к синусу угла *bag*, и это докажется тем же способом, каким мы выше пользовались. Следовательно, положение, которое было доказано в этих теоремах для прямоугольных и непрямоугольных треугольников, может быть теперь установлено нами вообще по поводу треугольников любого типа, и мы увидим шаг за шагом те обильные и приятные плоды, которые принесет нам это изучение [1]).

О СВОЙСТВАХ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

С. И. Зетель (Москва)

1. В настоящей статье я докажу теорему: С у м м а р а с с т о я н и й о т п р о и з в о л ь н о й т о ч к и о п и с а н н о й о к р у ж н о с т и д о ч е т н ы х в е р ш и н п р а в и л ь н о г о м н о г о у г о л ь н и к а р а в н а с у м м е р а с с т о я н и й д о е г о н е ч е т н ы х в е р ш и н. Теорема справедлива только для многоугольника с нечетным числом сторон. Для двух частных случаев эта теорема известна. Для треугольника в курсе геометрии Бальцера (Baltzer) приводятся два интересных доказательства. Для пятиугольника доказательство дано в журнале „Nouvelles Annales de Mathématiques" за 1876 г. Как следствие из доказанной мною теоремы получается формула для вычисления суммы длин диагоналей сначала для многоугольника с нечетным числом сторон, а затем и для многоугольника с четным числом сторон.

Рассмотрим два частных случая.

Пусть в треугольнике ABC $AB = BC = AC = a$ и M — произвольная точка на описанной окружности (фиг. 1). Применим теорему Птоломея к четырехугольнику $AMBC$:

$$MC \cdot a = MB \cdot a + MA \cdot a,$$

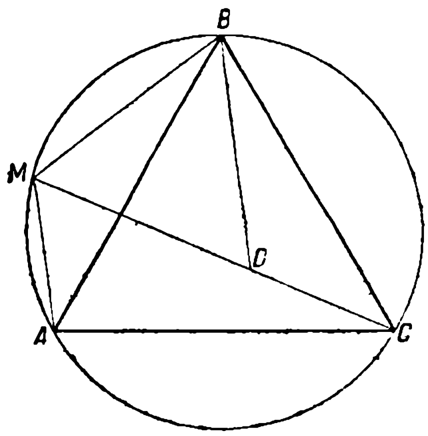
$$MC = MB + MA.$$

---

[1]) Подлинник на латинском языке. Извлечено из книги „A source book im Mathematics" by D. E. Smith, Нью-Йорк, 1929, перевод с английского И. А.

Теорема для треугольника доказана. Она может быть сформулирована так: расстояние от произвольной точки окружности до одной из вершин вписанного правильного треугольника равно сумме расстояний до двух других вершин.

Другое доказательство, приводимое Бальцером, основано только на равенстве треугольников. Пусть $MB > MA$. Отложим на отрезке MC отрезок $MD = MB$ и соединим точку D с B. Треугольник MBD равносторонний, так как $MB = MD$ и угол $BMD = 60^\circ$. Следовательно, $MB = BD = MD$; $\angle BDC = 120^\circ$; $\angle BDC = \angle BMA$; $\triangle BDC = \triangle BMA$. Из равенства треугольников следует, что $AM = DC$. Теорема доказана.



Фиг. 1.

Поставим следующую задачу: найти на окружности круга, описанного около произвольного треугольника, точку, расстояние которой от одной вершины равно сумме расстояний от двух других вершин.

Пусть z—расстояние точки M до вершины C — равно сумме расстояний x и y до вершин A и B. На основании теоремы Птоломея имеем:

$$ax + by = cz = c(x + y),$$
$$(c - a)\,x = (b - c)\,y,$$
$$\frac{c-a}{b-c} = \frac{y}{x}.$$

Итак, расстояния от искомой точки окружности до вершин A и B должны быть пропорциональны соответственно $(c - a)$ и $(b - c)$ при условии, что $b > c > a$. Построив геометрическое место точек, отношение расстояний которых до точек A и B соответственно равно $(c - a) : (b - c)$, найдем в пересечении этого геометрического места (окружности) с данной окружностью две точки. Из этих точек искомой будет точка, лежащая с вершиной C по разные стороны от хорды AB.

Интересен частный случай: $c - a = b - c$. Стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию. В этом случае $x = y = \frac{z}{2}$.

Найденное нами свойство треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, позволяет легко решить следующую задачу: вписать в круг треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, если средняя по величине сторона дана.

Восставив из середины данной стороны перпендикуляр до пересечения с дугой, меньшей 180°, стягиваемой данной стороной, найдем точку, удаленную от каждого из концов данной хорды на расстояние, равное x. Засекая из этой точки окружность радиусом, равным $2x$, найдем третью вершину искомого треугольника.

Задача допускает два решения, если данная хорда менее $R\sqrt{3}$. Задача возможна, если данная хорда не больше $R\sqrt{3}$.

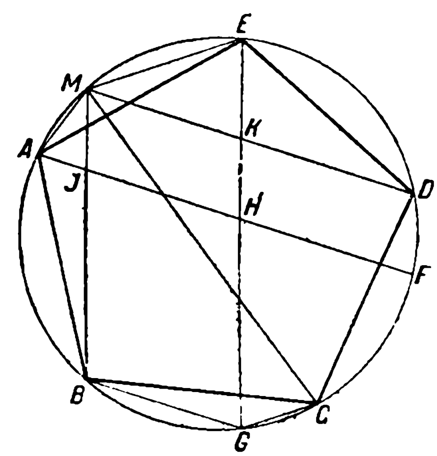
2. Для пятиугольника доказательство, приводимое в „Nouvelles Annales de Mathématiques", заключается в следующем:

Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, M — произвольная точка на окружности, описанной около пятиугольника, и $AF \parallel MD$ (фиг. 2).

$$\angle MAI = \quad \smile ME + \smile ED + \smile DF) = \frac{1}{2} \smile MEDF = \frac{1}{2} \smile AMED,$$

$$\angle AIM = \frac{1}{2}(\smile AM + \smile BCF) = \frac{1}{2} \smile BCFD.$$

Так как $\smile AMED = \smile BCFD$ (каждая из этих дуг равна $\frac{2}{5}$ окружности) то, следовательно, $\angle MAI = \angle AIM$, $IM = AM$.



Фиг. 2.

Проведем EG параллельно MB; имеем $BG = ME$; $GC = AM = DF$. Углы MEK и EKM равны между собой, так как каждый из них измеряется половиной дуги, равной $\frac{2}{5}$ окружности. Следовательно, $ME = MK$.

Четырехугольники $HIBG$, $HIMK$, $HFDK$ — параллелограмы. Доказательство того, что

$$MB + MD = MA + MC + ME,$$

сводится к доказательству того, что

$$(KH + HG) + (IH + HF) = MA + MC + ME.$$

Так как $ME = HI$, $MA = HK$, то остается показать, что

$$HG + HF = MC.$$

Треугольник EHF равнобедренный, так как каждая из дуг AE и GF равна $\frac{1}{5}$ окружности. Следовательно,

$$HG + HF = EG;$$

но

$$EG = MC,$$

так как хорды EG и MC стягивают равные дуги $EDCG$ и $CBAM$. Итак, теорема доказана.

3. Предлагаемое мною доказательство теоремы для многоугольника с нечетным числом сторон основано на суммировании синусов углов, составляющих арифметическую прогрессию:

$$S = \sin\varphi + \sin(\varphi + a) + \sin(\varphi + 2a) + \ldots + \sin[\varphi + (n-1)\,a].$$

Умножим обе части этого равенства на $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\varphi\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin(\varphi+\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} + $$
$$+ 2\sin(\varphi+2\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + 2\sin[\varphi+(n-1)\alpha]\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Но

$$2\sin\varphi\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right),$$
$$2\sin(\varphi+\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{3\alpha}{2}\right),$$
$$2\sin(\varphi+2\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\varphi+\frac{3\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{5\alpha}{2}\right),$$

. . . .

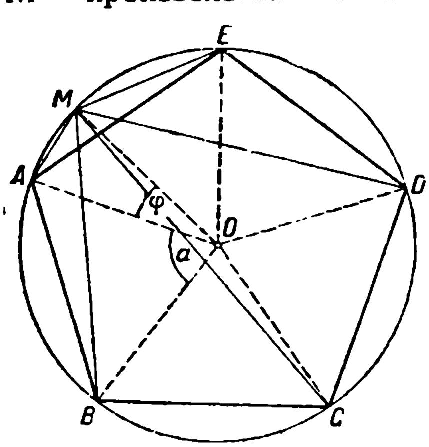
$$2\sin[\varphi+(n-1)\alpha]\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\varphi+\frac{2n-3}{2}\alpha\right) - \cos\left(\varphi+\frac{2n-1}{2}\alpha\right).$$

После сложения написанных равенств получим:

$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{2n-1}{2}\alpha\right),$$
$$2S\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2},$$
$$S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\varphi+\frac{n-1}{2}\alpha\right).$$

4. Перейдем к доказательству предложенной нами теоремы. Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около правильного многоугольника с нечетным числом сторон, равным $2n+1$, где n — целое число (фиг. 3). Обозначим центральный угол, опирающийся на сторону многоугольника, через α, тогда

$$\alpha = \frac{2\pi}{2n+1}.$$



Фиг. 3.

Угол MOA от точки M до ближайшей вершины A обозначим через φ ($\varphi<\alpha$).

Тогда расстояние MA от точки M до ближайшей вершины:

$$MA = 2R\sin\frac{\varphi}{2};$$

расстояние до третьей вершины:

$$MC = 2R\sin\frac{\varphi+2\alpha}{2} = 2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right),$$

и т. д.

Обозначим через S_1 сумму всех расстояний до нечетных вершин; имеем:

$$S_1 = 2R\left[\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+2\alpha\right) + \ldots + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+n\alpha\right)\right].$$

Каждое из рассматриваемых слагаемых положительно. Действительно, наибольший из углов $\frac{\varphi}{2}+n\alpha<\pi$, так как

$$\frac{\varphi}{2}+n\alpha<\frac{\alpha}{2}+n\alpha=\frac{2n+1}{2}\alpha=\pi.$$

По формуле предыдущего параграфа получаем:

$$S_1 = 2R\,\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\sin\frac{\varphi+n\alpha}{2}.$$

Так как

$$\frac{(n+1)\alpha}{2}+\frac{n\alpha}{2}=\frac{(2n+1)\alpha}{2}=\pi,$$

то

$$\frac{(n+1)\alpha}{2}=\pi-\frac{n\alpha}{2};\qquad \sin\frac{(n+1)\alpha}{2}=\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

Далее, так как

$$\frac{n\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}=\frac{\pi}{2},$$

то

$$\sin\frac{n\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{4}.$$

Следовательно,

$$S_1=\frac{2R\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\varphi+n\alpha}{2}=\frac{2R\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=\sin\frac{\varphi+n\alpha}{2}=$$

$$=\frac{R\sin\frac{\varphi+n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}}.$$

Определим S_2 — сумму расстояний до четных вершин. Расстояние MB до первой четной вершины:

$$MB=2R\sin\frac{\varphi+\alpha}{2};$$

до второй:

$$MD = 2R \sin \frac{\varphi + 3\alpha}{2};$$

и т. д.

$$S_2 = 2R \left\{\sin \frac{\varphi+\alpha}{2} + \sin \frac{\varphi+3\alpha}{2} + \sin \frac{\varphi+5\alpha}{2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \sin\left[\frac{\varphi+\alpha}{2} + (n-1)\alpha\right]\right\} =$$
$$= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\varphi+\alpha}{2} + \frac{n-1}{2}\alpha\right) =$$
$$= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi+n\alpha}{2} = R \frac{\sin \frac{\varphi+n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{4}}.$$

Итак, $S_1 = S_2$.

5. Рассмотрим многоугольник с четным числом сторон. Пусть число сторон его равно $2n$, где n — целое число. Сохраняя те же обозначения, найдем:

$$S_1 = 2R\left\{\sin \frac{\varphi}{2} + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}+2\alpha\right) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \sin\left[\frac{\varphi}{2} + (n-1)\alpha\right]\right\} =$$
$$= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{n-1}{2}\alpha\right) = 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi+(n-1)\alpha}{2}.$$

Так как $2n\alpha = 2\pi$, то $\frac{n\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$S_1 = \frac{2R}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi+(n-1)\alpha}{2} = \frac{2R \sin \frac{\varphi+(n-1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$S_2 = 2R\left[\sin \frac{\varphi+\alpha}{2} + \sin \frac{\varphi+3\alpha}{2} + \ldots + \sin \frac{\varphi+\alpha+2(n-1)\alpha}{2}\right] =$$
$$= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi+n\alpha}{2}.$$

Принимая во внимание, что $\sin \frac{n\alpha}{2} = 1$, получаем:

$$S_2 = \frac{2R \sin \frac{\varphi+n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, $S_2 \neq S_1$.

6. Интересен частный случай, когда выбранная нами точка M совпадает с одной из вершин многоугольника. В этом случае $\varphi = 0$.

Для многоугольника с нечетным числом сторон получим:

$$S_1 = S_2 = R\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}} = R\,\frac{\cos\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{4}} = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4},$$

$$S_1 + S_2 = 2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Итак, сумма расстояний от одной вершины многоугольника до всех остальных его вершин равна диаметру круга, умноженному на котангенс четверти центрального угла, опирающегося на сторону правильного многоугольника. Эта теорема нами доказана для многоугольника с нечетным числом сторон. Покажем ее справедливость и для многоугольника с четным числом сторон:

$$S_1 = 2R\,\frac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$S_2 = 2R\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2R}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$S_1 + S_2 = \frac{2R}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4R\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}} = 2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Итак, формула справедлива и для многоугольника с четным числом сторон.

Доказанная нами теорема может быть сформулирована следующим образом:

Сумма длин диагоналей, выходящих из одной вершины правильного многоугольника, вместе с двумя сторонами равна $2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, где α — центральный угол, опирающийся на сторону правильного многоугольника.

Обозначая сумму диагоналей, выходящих из одной вершины (не считая сторон), через d_m, а сторону многоугольника через a_m, мы можем предыдущую сумму записать так:

$$s_m = d_m + 2a_m = 2R\operatorname{ctg}\frac{90^\circ}{m},$$

где m — число сторон правильного многоугольника.

Умножим обе части полученного равенства на $\frac{m}{2}$:

$$S_m = \frac{ms_m}{2} = \frac{md_m}{2} + ma_m = mR\operatorname{ctg}\frac{90^\circ}{m}.$$

Здесь S_m — сумма всех сторон и диагоналей многоугольника; $\frac{md_m}{2} = D_m$ — сумма длин всех диагоналей; $ma_m = P_m$ — периметр многоугольника:

$$S_m = D_m + P_m = mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}.$$

7. Найдем сумму D_m всех диагоналей правильного многоугольника:

$$D_m = mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} - 2mR \sin \frac{180^\circ}{m} = mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} - 4mR \sin \frac{90^\circ}{m} \cos \frac{90^\circ}{m} =$$

$$= mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}\left(1 - 4 \sin^2 \frac{90^\circ}{m}\right) = 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}\left(\frac{1}{2} + \sin\frac{90^\circ}{m}\right)\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{90^\circ}{m}\right) =$$

$$= 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}\left(\sin 30^\circ + \sin \frac{90^\circ}{m}\right)\left(\sin 30^\circ - \sin \frac{90^\circ}{m}\right) =$$

$$= 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \cdot 2 \sin\left(15^\circ + \frac{45^\circ}{m}\right) \cos\left(15^\circ - \frac{45^\circ}{m}\right) \times$$

$$\times 2 \sin\left(15^\circ - \frac{45^\circ}{m}\right) \cos\left(15^\circ + \frac{45^\circ}{m}\right) =$$

$$= 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \sin\left(30^\circ + \frac{90^\circ}{m}\right) \sin\left(30^\circ - \frac{90^\circ}{m}\right).$$

Формула для вычисления длин диагоналей, полученная нами, преобразуется еще следующим образом:

$$D_m = 2mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}\left(\cos \frac{180^\circ}{m} - \cos 60^\circ\right) = 2mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}\left(\cos \frac{180^\circ}{m} - \frac{1}{2}\right).$$

Интересны частные случаи:

1) $m = 3$; $\quad D_3 = 0$;

2) $m = 4$; $\quad D_4 = 8R \operatorname{ctg} 22^\circ 30'\left(\cos 45^\circ - \frac{1}{2}\right) =$

$$= 8R(\sqrt{2} + 1)\frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 8R \cdot \frac{1}{2} = 4R;$$

3) $m = 5$; $\quad D_5 = 10R \operatorname{ctg} 18^\circ \left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right)$;

4) $m = 6$; $\quad D_6 = 12R \operatorname{ctg} 15^\circ \left(\cos 30^\circ - \frac{1}{2}\right) =$

$$= 12R \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} =$$

$$= 12R \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} =$$

$$= 6R(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 6R(1 + \sqrt{3}).$$

Формула

$$s_m = d_m + 2a_m = 2R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}$$