

Н. А. Рыбкин

**Сборник задач по
тригонометрии**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. А. Рыбкин**
Сборник задач по тригонометрии / Н. А. Рыбкин – М.: Книга по Требованию,
2021. – 96 с.

ISBN 978-5-458-27505-7

Сборник задач к учебнику тригонометрии для средних школ. С приложением задач по стереометрии, требующих применения тригонометрии.

ISBN 978-5-458-27505-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

§ 2. Изменение тригонометрических функций с изменением угла 5

углов. Измерив с точностью до 1 мм тригонометрические линии, найти (с точностью до 0,1) значения следующих функций: 1) $\operatorname{tg} 30^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\sin 225^\circ$; 4) $\cos (-30^\circ)$; 5) $\operatorname{tg} (-120^\circ)$; 6) $\operatorname{ctg} 560^\circ$.

15. Определить знак каждой из следующих разностей: 1) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 21^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 21^\circ$; 5) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$; 6) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 7) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ$; 8) $\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 130^\circ$.

16. Какая функция в каждой из следующих пар больше: 1) $\sin 20^\circ$ или $\cos 20^\circ$? 2) $\sin 50^\circ$ или $\cos 50^\circ$? 3) $\operatorname{tg} 40^\circ$ или $\operatorname{ctg} 40^\circ$? 4) $\operatorname{tg} 50^\circ$ или $\operatorname{ctg} 50^\circ$?

**Построение
и нахождение
угла.**

17. Построить углы, синусы которых равны: 1) 0,6; 2) $-\frac{1}{2}$. Найти их величину с точностью до 1° .

18. Построить углы, косинусы которых равны:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0,4$.

19. Построить углы, тангенсы которых равны: 1) $+1,5$; 2) -1

20. Построить углы, котангенсы которых равны: 1) -2 ; 2) $+1$

21. По данному общему виду угла x написать его частные положительные значения, меньшие 360° (2π):

$$1) x = 15^\circ + 120^\circ \cdot n;$$

$$2) x = -60^\circ + 360^\circ \cdot n;$$

$$3) x = -10^\circ + 60^\circ \cdot n;$$

$$4) x = \pm 120^\circ + 720^\circ \cdot n;$$

$$5) x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n;$$

$$6) x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n;$$

$$7) x = (-1)^n \cdot 45^\circ + 180^\circ \cdot n; \quad 8) x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n.$$

22. Написать общие решения уравнений, найдя углы (с точностью до 1°) построением и измерением.

$$1) \operatorname{tg} x = 2,6;$$

$$2) \operatorname{tg} x = -0,8;$$

$$3) \cos x = 0,9;$$

$$4) \cos x = -\frac{2}{3};$$

$$5) \sin x = 0,25;$$

$$6) \sin x = -\frac{5}{7}.$$

В задачах 23—31 требуется найти значение той тригонометрической функции, которая содержится в уравнении, и построить углы.

$$23. \sin^2 x - 3 = 2 \sin x.$$

$$24. \cos^2 x + \cos x = 1.$$

$$25. 6 \sin^4 x + 1 = \sin^2 x.$$

$$26. \sin^2 x = 2 \sin x.$$

$$27. \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x.$$

$$28. \sec^2 x = 2 \sec x.$$

$$29. \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x = 0.$$

$$30. \frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} = 0.$$

$$31. (\cos x - 2)(2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0.$$

Обратные
круговые
функции.

32. Решить уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = m$; 2) $\cos x = m$; 3) $\sin x = m$.

Какие значения можно подразумевать под m в каждом из этих уравнений?

33. Записать с помощью обратных круговых

функций равенства:

1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos 90^\circ = 0$; 5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 6) $\operatorname{tg} 0 = 0$;

7) $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} 0 = \infty$.

34. Выразить с помощью таблиц в градусах и радианах:

1) $\arcsin 0,7314$;

2) $\arccos 0,3987$;

3) $\operatorname{arctg} 3,677$;

4) $\operatorname{arcctg} 0,5117$.

35. Найти x из уравнений:

1) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$;

4) $\arcsin \frac{x}{3} = a$; 5) $\arccos \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 6) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = a$.

36. Построить:

1) $\arcsin 0,8$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; 3) $\arccos \frac{2}{3}$;

4) $\arccos -0,75$; 5) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{arctg}(-1,5)$;

7) $\operatorname{arctg} 1,2$; 8) $\operatorname{arcctg}(-0,6)$; 9) $\operatorname{arcsec} 1\frac{1}{2}$;

10) $\operatorname{arc cosec}(-2)$.

§ 3. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Выразить тригонометрические функции угла a :

1. Через $\sin a$.

2. Через $\cos a$.

3. Через $\operatorname{tg} a$.

4. Через $\operatorname{ctg} a$.

Найти тригонометрические функции угла a , если дано:

5. $\sin a = 0,8$. 6. $\sin a = -0,3$.

7. $\cos a = \frac{2}{3}$. 8. $\cos a = -\frac{3}{5}$. 9. $\operatorname{tg} a = -1$.

10. $\operatorname{tg} a = -\frac{9}{40}$. 11. $\operatorname{ctg} a = \frac{8}{15}$. 12. $\operatorname{ctg} a = -3$.

13. $\sec a = 3$. 14. $\sec a = -1\frac{9}{20}$. 15. $\operatorname{cosec} a = 2,6$.

16. $\operatorname{cosec} a = -\sqrt{3}$.

Предполагая: $0 < b < a$, найти тригонометрические функции угла α по данным задач 17—19:

$$17. \sin \alpha = \frac{a-b}{a+b}. \quad 18. \cos \alpha = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}. \quad 19. \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Найти тригонометрические функции угла α , если:

$$20. \alpha \text{ — угол положительный острый и } \operatorname{tg} \alpha = 4\frac{19}{20}.$$

$$21. \alpha \text{ — угол треугольника и } \cos \alpha = -0,28.$$

$$22. \alpha \text{ оканчивается в III четверти и } \sin \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$23. \alpha \text{ оканчивается в IV четверти и } \operatorname{ctg} \alpha = -1,05.$$

Упростить выражения в задачах 24—62:

$$24. 1 - \sin^2 \alpha. \quad 25. 1 - \cos^2 \alpha.$$

$$26. \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad 27. \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - 1}.$$

$$28. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$29. \sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$30. \text{ а) } \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \text{ б) } \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$31. \text{ а) } \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}; \text{ б) } \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1}.$$

$$32. \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$33. \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

$$34. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha.$$

$$35. \sin \alpha \cdot \sec \alpha.$$

$$36. \cos \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha.$$

$$37. \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sec \alpha.$$

$$38. \sin \alpha : \operatorname{tg} \alpha.$$

$$39. \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$40. 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha.$$

$$41. 1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$42. (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha.$$

$$43. (\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha)^2.$$

$$44. (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha)^2 - 1.$$

$$45. \sin^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha.$$

$$46. \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1.$$

$$47. \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1.$$

$$48. \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$49. \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}.$$

$$50. \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

$$51. (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2. \quad 52. \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$53. \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \text{ выразить: а) через } \sin \alpha \text{ и б) через } \cos \alpha.$$

$$54. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \text{ выразить через } \sin \alpha \text{ и } \cos \alpha.$$

$$55. \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} \text{ выразить через } \operatorname{tg} \alpha.$$

$$56. \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ выразить через } \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$57. \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \text{ выразить: а) через } \operatorname{tg} \alpha \text{ и б) через } \operatorname{ctg} \alpha.$$

58. $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ выразить: а) через $\operatorname{tg} \alpha$ и б) через $\operatorname{ctg} \alpha$.
59. Выразить $\sec \alpha$ через $\operatorname{ctg} \alpha$, если α оканчивается в IV четверти.
60. Вычислить $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}$.
61. Определить $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = m$.
62. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$; определить:
 $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ и $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.
- Доказать тождества в задачах 63—92:
63. $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.
64. $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.
65. $\frac{\sec \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha + 1}$.
66. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$.
67. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
68. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
69. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$.
70. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
71. $\frac{\sin \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.
72. $\frac{\sec \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$.
73. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}{\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha}$.
74. $\frac{1 + \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.
75. $\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \operatorname{ctg}^3 \alpha$.
76. $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1$.
77. $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$.
78. $\frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha - 1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1} = 1$.
79. $\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.
80. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$.
81. $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
82. $\sec^2 \alpha (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.
83. $1 - \sin \alpha - \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 + \operatorname{tg} \alpha)$.
84. $(\sin \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)(\cos \alpha - \sec \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
85. $(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$.
86. $\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$.
87. $\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) - \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
88. $\operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sec \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \sec^2 \alpha = \operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha$.
89. $\sec \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2$.
90. $\left(\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} \right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.
91. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

$$92. \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Решить уравнения 93 — 113. Построив по найденной из уравнения функции угол и измерив его (с точностью до 1°) транспортиром, ответ написать в общем виде.

$$93. \sin^3 x = 1 + \cos^2 x.$$

$$94. \sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}.$$

$$95. \sin x = \operatorname{ctg} x.$$

$$96. \cos x - 1 + 2 \sin x \cdot \operatorname{tg} x = 0.$$

$$97. \sin^2 x + \cos x = 0.$$

$$98. \sec x = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$99. 2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2.$$

$$100. \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}.$$

$$101. \cos x = 2 \operatorname{tg} x.$$

$$102. \operatorname{cosec} x - \sin x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x.$$

$$103. 2 \operatorname{tg} x = -3 \operatorname{cosec} x.$$

$$104. 2 \sec x = \operatorname{cosec} x.$$

$$105. 2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 3.$$

$$106. 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1.$$

$$107. \sin^4 x - \cos^4 x = 0,5.$$

$$108. 1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0.$$

Решить однородные уравнения:

$$109. \sin x = \cos x.$$

$$110. \sin x = \sqrt{3} \cos x.$$

$$111. 3 \sin^2 x = \cos^2 x.$$

$$112. \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x.$$

$$113. 1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x.$$

§ 4. Функции дополнительных и пополнительных углов.

1. Привести к углу, меньшему 45° : 1) $\sin 73^\circ$; 2) $\cos 80^\circ 40'$; 3) $\operatorname{tg} 69^\circ 25' 40''$; 4) $\operatorname{ctg} 59^\circ 59'$.

2. Привести к тем же функциям острого угла: 1) $\sin 112^\circ 20'$; 2) $\cos 99^\circ 25' 35''$; 3) $\operatorname{tg} 108^\circ 48' 36''$; 4) $\operatorname{ctg} 140^\circ 40'$.

3. Привести к углу, меньшему 45° : 1) $\sin 121^\circ 40'$; 2) $\sin 163^\circ 35'$; 3) $\cos 158^\circ 17'$; 4) $\cos 98^\circ 21'$; 5) $\operatorname{tg} 160^\circ 27' 32''$; 6) $\operatorname{tg} 106^\circ 32'$; 7) $\operatorname{tg} 120^\circ 28' 40''$; 8) $\operatorname{ctg} 140^\circ 42'$.

Упростить выражения:

$$4. \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)}.$$

$$5. \frac{\cos^2(90^\circ - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg} \sin(180^\circ - \alpha)}.$$

$$6. \sin(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha).$$

$$7. \frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}.$$

$$8. \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha) + 2 \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$9. \cos(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha).$$

$$10. \operatorname{tg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ.$$

$$11. \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha).$$

$$12. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

10 § 5. Таблицы натуральных величин тригонометрических функций

$$13. \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi - \alpha)}.$$

$$14. \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}.$$

15. Показать, что:

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha); \quad \cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha).$$

§ 5. Таблицы натуральных величин тригонометрических функций.

По таблицам натуральных тригонометрических величин найти числовые значения следующих функций:

1. 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 45^\circ$; 3) $\sin 60^\circ$; 4) $\sin 73^\circ$;
5) $\sin 38^\circ 30'$; 6) $\sin 69^\circ 24'$; 7) $\sin 11^\circ 50'$; 8) $\sin 87^\circ 10'$;
2. 1) $\operatorname{tg} 20^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 45^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 85^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 72^\circ 30'$;
5) $\operatorname{tg} 17^\circ 42'$; 6) $\operatorname{tg} 53^\circ 13'$; 7) $\operatorname{tg} 20^\circ 47'$; 8) $\operatorname{tg} 83^\circ 7'$;
9) $\operatorname{tg} 85^\circ 28'$; 10) $\operatorname{tg} 88^\circ 30'$; 11) $\operatorname{tg} 89^\circ 48'$; 12) $\operatorname{tg} 89^\circ 59'$;
3. 1) $\cos 65^\circ$; 2) $\cos 45^\circ$; 3) $\cos 30^\circ$; 4) $\cos 73^\circ$; 5) $\cos 36^\circ 30'$;
6) $\cos 20^\circ 24'$; 7) $\cos 61^\circ 10'$; 8) $\cos 78^\circ 46'$; 9) $\cos 2^\circ 52'$; 10) $\cos 1^\circ 20'$;
4. 1) $\operatorname{ctg} 20^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 45^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 37^\circ 30'$; 4) $\operatorname{ctg} 71^\circ 24'$;
5) $\operatorname{ctg} 69^\circ 13'$; 6) $\operatorname{ctg} 19^\circ 37'$; 7) $\operatorname{ctg} 88^\circ 15'$; 8) $\operatorname{ctg} 5^\circ$;
9) $\operatorname{ctg} 2^\circ 27'$; 10) $\operatorname{ctg} 90^\circ$; 11) $\operatorname{ctg} 1^\circ 53'$.

Найти величину острых углов по данным значениям их функций:

5. 1) $\sin \alpha = 0,3420$; 2) $\sin \beta = 0,5948$; 3) $\sin \gamma = 0,842$;
4) $\sin x = 0,9293$; 5) $\sin y = 1,0024$; 6) $\sin z = 0,3932$.
6. 1) $\operatorname{tg} \alpha = 0,4452$; 2) $\operatorname{tg} \beta = 11,43$; 3) $\operatorname{tg} \gamma = 2,675$;
4) $\operatorname{tg} x = 0,5452$; 5) $\operatorname{tg} y = 5,558$; 6) $\operatorname{tg} z = 0,5$;
7) $\operatorname{tg} u = 0,42$; 8) $\operatorname{tg} v = 12,9$; 9) $\operatorname{tg} w = 6,63$.
7. 1) $\cos \alpha = 0,891$; 2) $\cos \beta = 0,910$; 3) $\cos \gamma = 0,6361$;
4) $\cos x = 1,0008$; 5) $\cos y = 0,8189$; 6) $\cos z = 0,4485$.
8. 1) $\operatorname{ctg} \alpha = 2,747$; 2) $\operatorname{ctg} \beta = 0,4142$; 3) $\operatorname{ctg} \gamma = 1,768$;
4) $\operatorname{ctg} x = 1,4948$; 5) $\operatorname{ctg} y = 0,6946$; 6) $\operatorname{ctg} z = 1,6946$;
7) $\operatorname{ctg} u = 7,115$; 8) $\operatorname{ctg} v = 10,23$; 9) $\operatorname{ctg} w = 20$.

Найти по таблицам значения следующих функций тупых углов:

9. $\sin 105^\circ$; $\sin 172^\circ 8'$; $\sin 140^\circ 15'$; $\sin 115^\circ 22'$
10. $\cos 118^\circ$; $\cos 156^\circ 30'$; $\cos 98^\circ 42'$; $\cos 169^\circ 17'$
11. $\operatorname{tg} 121^\circ$; $\operatorname{tg} 160^\circ 24'$; $\operatorname{tg} 101^\circ 41'$; $\operatorname{tg} 147^\circ 39'$
12. $\operatorname{ctg} 175^\circ$; $\operatorname{ctg} 121^\circ 30'$; $\operatorname{ctg} 171^\circ 13'$; $\operatorname{ctg} 111^\circ 11'$

§ 6. Решение прямоугольных треугольников.

Обозначения. В прямоугольном треугольнике ABC угол $A = \alpha$, угол $B = \beta$, угол $C = 90^\circ$, катет $BC = a$, катет $AC = b$ и гипотенуза $AB = c$.

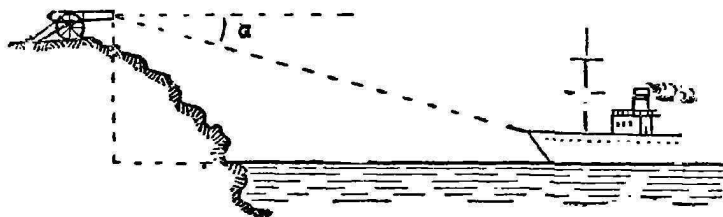
1. Дан прямоугольный треугольник ABC . Определить: 1) $\sin \alpha$ и $\tg \alpha$, если $a = 48$ см и $c = 50$ см; 2) $\tg \alpha$ и $\cos \alpha$, если $a = 15$ м и $b = 20$ м; 3) $\tg \beta$ и $\cos \beta$, если $b = 8,4$ см и $c = 8,5$ см.

2. Длины сторон прямоугольного треугольника ABC в сантиметрах выражаются числами $a = 7\frac{1}{5}$ и $c = 17$. Определить все функции угла β .

3. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить: 1) катет a по гипотенузе $c = 30,6$ см и $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; 2) c по $a = 51$ см и $\sin \alpha = 0,75$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить катет a , если: 1) $b = 14$ м и $\tg \alpha = 0,72$; 2) $b = 20,4$ дм и $\tg \alpha = 1,5$.

5. Дирижабль попал в полосу света прожектора, когда ось прожектора составляла с горизонтом угол в 47° . В то же время расстояние по прямой от прожектора до дирижабля было равно $3,5$ км. Вычислить: 1) высоту подъема дирижабля, 2) горизонтальное расстояние дирижабля от прожектора.



Черт. 2.

6. Батарея помещена на утесе высотой в 150 м. Угол понижения мишени (черт. 2), плавающей в море, определен с батареи в 9° . Чему равно расстояние (по горизонтальному направлению) от мишени до батареи?

7. Перископ подводной лодки виден на расстоянии 1500 м от форта, орудия которого помещены на высоте 330 м от поверхности воды. Определить угол, на который нужно опустить орудия, чтобы они были направлены на лодку.

8. Аэроплан сигнализирует на батарею, что он находится как раз над мишенью на высоте 1700 м (черт. 3); в тот же момент

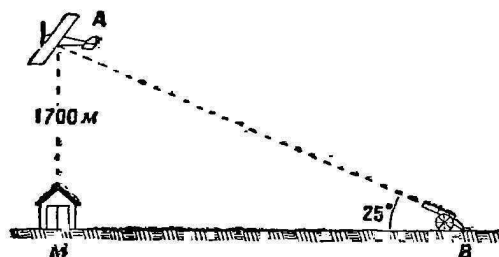
наблюдатель на батарее находит, что угол высоты самолета равен 25° . Вычислить расстояние (по горизонтали) батареи от мишени.

9. Чтобы определить ширину реки, проводят на одном берегу ее, непосредственно у воды, базис AB , равный a метрам; из конца A базиса, по перпендикулярному к нему направлению, на противоположном берегу у самой воды видно дерево C ; из другого же конца B базиса это дерево видно под углом β к нему. Вычислить ширину реки, если $a = 42$ м и $\beta = 25^\circ 28'$.

10. Из точки, отстоящей на расстоянии a метров от центра основания башни, верхушка башни видна под углом высоты α . Определить высоту башни ($a = 86,6$; $\alpha = 22^\circ 17'$).

11. Из окна на высоте $h = 12$ м берега реки видны под углами наклона $\alpha_1 = 17^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$. Определить ширину реки.

12. Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Найти угол подъема.



Черт. 3.

13. Человек, пройдя по склону холма 1050 м, поднялся на 90 м над плоскостью основания холма. Определить (в среднем) угол наклона холма.

14. При съемке равномерно поднимающейся улицы длиной в

728 м установлена разница высот ее концов в 37,4 м. Определить угол подъема и горизонтальную проекцию улицы.

15. На горке стоит шест длиной a метров. Из некоторой точки, находящейся на горизонтальной плоскости основания горки и отстоящей от верхнего конца шеста на расстоянии b метров, этот конец виден под углом α . Определить высоту горки ($a = 2$; $b = 14$; $\alpha = 63^\circ 18'$).

16. Если на горизонтальной поверхности земли предполагается рассаживать деревья на расстоянии a метров одно от другого, то на каком расстоянии одну от другой, соответственно с этим, следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма (черт. 4), имеющему наклон к горизонту α ($a = 3,5$; $\alpha = 25^\circ 18'$)?

17. На прямой MA' взята точка A , и из нее под острым углом α к прямой MN проведен отрезок AB длиной a метров; определить проекцию (x) отрезка AB на прямую MN и проследить изменение этой проекции при изменении угла α от 60° до 0° и обратно: от 0° до 90° .

18. Строение, имеющее 30 м высоты, бросает тень длиною в 45 м. Определить высоту солнца.

19. В полдень при высоте солнца в 28° фабричная труба бросает тень длиною в 76 м. Определить высоту трубы.

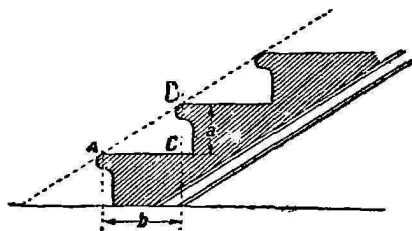
20. Какова высота солнца в то время, 1) когда длина тени от стоящего человека равна половине его роста; 2) когда она вдвое больше его роста

3) когда она в $2\frac{1}{2}$ раза больше его роста?

21. Тень от вертикального шеста короче его самого на $\frac{1}{n}$ его длины. Какова высота солнца ($n=10,5$)?

22. Гаубица H , стреляющая по мишени T с расстояния 2500 м, получила приказание перебросить огонь на другую мишень S , находящуюся на расстоянии 1500 м от T . На какой угол нужно повернуть орудие, если ST перпендикулярно к HT ?

23. Две точки движутся равномерно из вершины прямого угла, одна по одной, а другая по другой стороне этого угла; первая проходит по a метров, а вторая по b метров в секунду. Под каким углом φ к направлению движения первой точки видна из нее вторая точка?

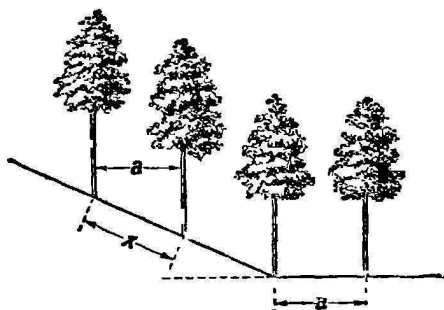


Черт. 5.

24. Каменная домовая лестница (черт. 5) имеет в каждом марше (т. е. между каждыми двумя поворотными площадками) по 15 ступенек, причем полезная ширина каждой ступеньки (так называемая проступь) равна $b=27$ см, а высота ступеньки $a=18$ см. Определить угол подъема этой лестницы.

25. Ширина каждой ступеньки домовой лестницы равна 25 см. Какова должна быть высота ступеньки для того, чтобы угол подъема лестницы был равен 40° ?

26. Две прямые улицы пересекаются под углом в $51^\circ 50'$. Одна из них на расстоянии 1625 м от места пересечения должна быть соединена кратчайшим путем со второй. Найти длину этого кратчайшего переулочка.



Черт. 4.

27. Прямая AO , соединяющая некоторую внешнюю точку A с центром O данного круга, имеет длину $c=2,53$ м. Из точки A проведена к кругу касательная AC , образующая с прямою AO угол $\alpha=38^\circ 46'$. Определить длины радиуса (r) и касательной (x).

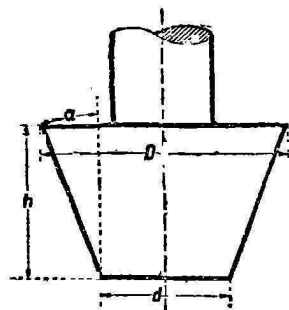
28. Определить радиус круга, описанного около прямоугольного треугольника, у которого катет равен a дециметрам, а прилежащий к нему острый угол равен β .

Задачи, приводящиеся к решению прямоугольных треугольников.

29. Образующая изображенной на чертеже 6 конической части вала имеет подъем в 12% , т. е. на каждые 100 мм высоты радиус увеличивается на 12 мм. Найти угол подъема α и диаметр D .

30. В усеченном конусе, данном на чертеже 6, известны оба диаметра d и D . Образующая конуса имеет подъем $1:n$. Найти расстояние h между начальной и конечной плоскостями и угол подъема α .

31. Железнодорожная насыпь высотой в 120 м имеет 360 м ширины при основании и 60 м ширины при вершине. Вычислить угол наклона откоса к горизонту.



Черт. 6.

32. Железнодорожная насыпь имеет сверху ширину в 60 м, а снизу 240 м. Боковые стороны насыпи наклонены к горизонту под углом 35° . Определить высоту насыпи.

33. Поперечный разрез насыпи, при постройке которой был применен наибольший возможный откос $\varphi=39^\circ$, представляет равнобедренную трапецию. Нижнее основание трапеции $a=10$ м, высота $h=3$ м. Определить верхнее основание трапеции.

34. По основанию b и боковой стороне a равнобедренного треугольника определить угол при основании ($b=28,13$; $a=17,53$).

35. По основанию b и по высоте h равнобедренного треугольника определить угол при его вершине ($b=31,23$ и $h=20,75$).

36. В круге радиуса R определить длину хорды, стягивающей дугу в α градусов ($R=4,175$; $\alpha=37^\circ 42'$).

37. В круге радиуса $R=35,8$ дм проведена хорда длиной в $a=28,7$ дм. Найти дугу, стягиваемую хордой, и расстояние хорды от центра.

38. Хорда равна $\frac{3}{4}$ диаметра круга. Определить число градусов и минут в дуге, которая стягивается этой хордой.