

**Л. А. Люстерник**

**Основы вариационного исчисления. Том 1.  
Часть 2**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Л11

Л11 **Л. А. Люстерник**  
Основы вариационного исчисления. Том 1. Часть 2 / Л. А. Люстерник – М.: Книга по Требованию, 2013. – 400 с.

**ISBN 978-5-458-26194-4**

анализу общих задач вариационного исчисления теоретико-функциональными методами (вопросам существования, аппроксимативным методам) и топологическим методам. (предисловие ко II части).

**ISBN 978-5-458-26194-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второй части . . . . .	3
---------------------------------------	---

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

#### Глава V. *Переход от экстремумов функций многих переменных к вариационным задачам*

27. Функционал . . . . .	9
28. Элементарное решение некоторых вариационных задач . . . . .	13
29. Принцип Мопертюи-Эйлера. Аналогия между оптикой и механикой . . . . .	17
30. Элементарное решение некоторых изопериметрических задач . . . . .	25
31. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера . . . . .	29
32. Приложения . . . . .	39
33. Метод счетного множества переменных . . . . .	45

#### Глава VI. *Обобщение основных понятий анализа*

34. Дополнительные замечания об экстремумах функционалов . . . . .	52
35. Абсолютный и относительный экстремум . . . . .	54
36. Окрестности кривых. Сильный и слабый экстремум . . . . .	56
37. Абстрактные пространства . . . . .	59
38. Предельные соотношения в абстрактном пространстве . . . . .	64
39. Функция точки абстрактного пространства . . . . .	67
40. Линейные пространства . . . . .	69
41. Дифференциал функции на линейном пространстве . . . . .	74
42. Экстремум функции точки линейного пространства . . . . .	76

#### Глава VII. *Функционалы и вариация*

43. Функциональные пространства . . . . .	78
44. Компактность в функциональных пространствах . . . . .	82
45. Линейные функционалы и вариации . . . . .	91
46. Вариации для простейшего функционала . . . . .	92
47. Основные леммы вариационного исчисления . . . . .	95
48. Вариация в точке. Инвариантность уравнения Эйлера . . . . .	98
49. Вторая вариация и условие Лежандра . . . . .	104

### ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ВАРИАЦИЙ

#### Глава VIII. *Непосредственные обобщения простейшей задачи вариационного исчисления*

50. Пространственная задача . . . . .	109
51. Вариация в точке в данном направлении. Принцип Гамильтона . . . . .	112
52. Вторая вариация. Условия Лежандра . . . . .	116
53. Свободные концы. Случай конца, перемещающегося по ординате . . . . .	118
54. Условие трансверсальности . . . . .	123

55. Дифференциал в нелинейном метрическом пространстве . . . . .	127
56. Вариация интегралов от экстремалей . . . . .	129
57. Случай свободных концов в пространственной задаче . . . . .	132
58. Случай производных высшего порядка . . . . .	136
59. Случай функций многих переменных . . . . .	143

### Глава IX. Условный экстремум

60. Изопериметрическая задача . . . . .	148
61. Правило множителей Эйлера-Лагранжа . . . . .	160
62. Условие Лежандра . . . . .	166
63. Условный экстремум . . . . .	169
64. Трансверсальность . . . . .	173
65. Применение к теории геодезических . . . . .	175
66. Условный экстремум (неголономные связи) . . . . .	180

### Глава X. Вариационные задачи в параметрической форме

67. Параметрическая форма задания кривых . . . . .	188
68. Условия однородности . . . . .	189
69. Экстремумы функций от линии . . . . .	193
70. Обобщения и приложения . . . . .	200
71. Замкнутые экстремали. Метод нормальных вариаций . . . . .	204
72. Приложения к теории геодезических . . . . .	211

### Глава XI. Разрывные задачи

73. Ломаные экстремали . . . . .	215
74. Преломление экстремалей . . . . .	219
75. Отражение экстремалей . . . . .	223
76. Случай свободных концов . . . . .	225

### Глава XII. Односторонние вариации

77. Односторонние вариации для простейшей задачи . . . . .	231
78. Задача Ньютона (поверхность вращения наименьшего сопротивления) . . . . .	238
79. Пространственная задача . . . . .	244

## СЕМЕЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЕЙ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

### Глава XIII. Вторая вариация и линейные вариационные задачи

80. Предварительные замечания . . . . .	252
81. Существование минимума квадратических функционалов . . . . .	254
82. Уравнение Штурма-Лиувилля . . . . .	260
83. Условия положительности формы . . . . .	264
84. Слабый экстремум . . . . .	269
85. Уравнения в вариациях . . . . .	270
86. Геометрическая теория сопряженных точек . . . . .	272
87. Экстремальная теория собственных значений . . . . .	275
88. Минимаксные экстремали . . . . .	281
89. Теория Лежандра-Якоби квадратических функционалов . . . . .	285
90. Квадратический функционал $J_{ab}$ как предел конечных квадратических форм . . . . .	286
91. Вторая вариация для изопериметрической задачи . . . . .	290
92. Уравнение в вариациях и сопряженные точки для изопериметрической задачи . . . . .	304

Глава XIV. Теория поля и достаточные условия сильного экстремума

93. Геометрия экстремалей . . . . .	309
94. Поле экстремалей и трансверсали . . . . .	311
95. Теория Кнезера . . . . .	318
96. Условия Якоби . . . . .	320
97. Геодезические эллипс и гипербола . . . . .	324
98. Метод интегрирования Якоби . . . . .	327
99. Функция Вейерштрасса . . . . .	332
100. Необходимые условия Вейерштрасса . . . . .	337
101. Достаточные условия сильного экстремума . . . . .	339
102. Теорема Осгуда . . . . .	345

Дополнение I. Экстремальные свойства выпуклых тел

1. Общие замечания . . . . .	351
2. Выпуклое симметрическое тело в целочисленной сети . . . . .	353
3. Экстремальные свойства треугольника . . . . .	357
4. Об экстремуме отношения объемов выпуклого тела и заключенного в нем центральносимметрического тела . . . . .	359

Дополнение II. О некоторых экстремальных задачах теории конформных отображений

Примеры функционалов . . . . .	367
Качественные принципы . . . . .	369
Бесконечно малые вариации . . . . .	370
Специальная вариация границы . . . . .	372
Максимальное растяжение . . . . .	374
Проблема коэффициентов . . . . .	379

Дополнение III. Применение метода Ритца к доказательству существования решений уравнения Штурма-Лиувилля

Указатель . . . . .	395
---------------------	-----



# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## ГЛАВА V

### ПЕРЕХОД ОТ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ К ВАРИАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

#### § 27. Функционал

**Общие понятия.** Исследуем такую величину, как длина кривой. Длина кривой есть переменная величина, она меняется вместе с кривой. Мы имеем здесь аналогию с функцией одного или нескольких переменных. Длина есть также зависящая переменная величина, но она зависит не от числовой переменной, а от кривой.

Пусть нам даны кривые, уравнения которых имеют вид:

$$y = y(x), \quad (1)$$

причем абсцисса  $x$  меняется в промежутке  $a \leq x \leq b$ , а функция  $y(x)$  обладает непрерывной производной  $y'(x)$  при  $a \leq x \leq b$ . Тогда длина  $J$  каждой такой кривой имеет вид:

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

С изменением функций  $y(x)$  меняется и кривая, изображающая эту функцию, меняется и величина  $J$  — длина кривой (1).  $J$  зависит от вида функции  $y(x)$ : различным функциям  $y(x)$  отвечают различные значения  $J$  (различные длины). Мы будем писать:

$$J = J[y(x)].$$

Эта запись показывает, что  $J$  зависит от функции  $y(x)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть дан некоторый класс функций  $y(x)$ . Мы скажем:  $J[y(x)]$  есть *функционал* от функции  $y(x)$  нашего класса, если каждой функции  $y(x)$  отвечает некоторое значение  $J[y(x)]$ .

Поскольку геометрически функции одного переменного изображаются линиями, то функционал от них иногда называется *функцией линии*.

**Пример 1.** Рассмотрим совокупность всех непрерывных функций  $y(x)$ , заданных на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x) dx \quad (2)$$

есть функционал от  $y(x)$ ; каждой функции  $y(x)$  отвечает определенное значение  $J[y(x)]$ . Этот функционал геометрически означает площадь, ограниченную кривой  $y = y(x)$ , осью  $Ox$  и ординатами  $x = a$ ,  $x = b$ .

Подставляя в равенство (2) вместо  $y(x)$  конкретные функции, мы будем получать соответственные значения  $J[y(x)]$ . Положим для определенности  $a = 0$ ,  $b = 1$ :

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx.$$

Если  $y(x) = x$ , то  $J[y(x)] = J[x] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ ;

если  $y(x) = x^2$ , то  $J[y(x)] = J[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ;

если  $y(x) = \frac{1}{x+1}$ , то  $J\left[\frac{1}{x+1}\right] = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2$ ;

если  $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , то  $J\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ .

**Пример 2.** Другим примером функционала является длина кривой  $y = y(x)$ . Будем попрежнему считать  $a = 0$ ,  $b = 1$ ; рассмотрим совокупность всех непрерывных функций  $y(x)$ , обладающих непрерывной первой производной. Подставляя в выражение

$$J[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx$$

вместо  $y(x)$  определенные функции, получим определенные числовые значения для  $J[y(x)]$ .

Например, если  $y(x) = x$ ,  $y'(x) = 1$ .

$$J[y(x)] = J[x] = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

Если  $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  (цепная линия), то

$$\begin{aligned} J\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x + e^{-x})'^2}{2}} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{2}} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Можно было бы привести целый ряд других примеров функционалов.

В настоящей главе, когда мы будем говорить о „всех кривых“, мы безоговорочно предполагаем, что мы ограничиваемся кривыми, аналитически выражаемыми уравнениями:

$$y = y(x),$$

где  $x$  изменяется на некотором промежутке  $a \leq x \leq b$ , а  $y(x)$ , обладает непрерывной первой производной.

**Экстремум функционалов.** Уже с самого начала возникновения анализа бесконечно малых наряду с задачами об экстремумах функций  $n$  переменных появился целый ряд геометрических, механических и физических задач на отыскание экстремумов функционалов. Рассмотрим, например, следующую задачу: *среди всех плоских кривых, соединяющих две заданные точки  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ , найти ту, для которой длина принимает наименьшее значение.*

Аналитически эта задача гласит: среди всех функций  $y = y(x)$ , таких, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

найти ту, для которой

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

принимает наименьшее значение.

Мы знаем, что искомая кривая, дающая минимум длины, есть прямолинейный отрезок, соединяющий точки  $A$  и  $B$  или, переводя на ана-

литический язык:  $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$  достигает минимального

значения, если функция  $y(x)$  есть  $y(x) = y_0 + k(x - x_0)$ , где  $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ .

**Задача о брахистохроне.** Исторически первой задачей, возбуждившей к себе общий интерес среди математиков, была задача о *брахистохоне*, поставленная Иваном Бернулли: *среди всех кривых, соединяющих две данные точки  $A$  и  $B$ , найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь из точки  $A$ , под влиянием силы тяжести попадет в кратчайший срок в точку  $B$ <sup>1)</sup>.*

Проведя вертикальную плоскость, проходящую через точки  $A$  и  $B$ , ограничимся плоскими дугами, соединяющими эти точки. Примем за ось  $Ox$  горизонтальную прямую, а ось  $Oy$  направим вертикально вниз. Тогда точки  $A$  и  $B$  будут иметь соответственно координаты  $(a, 0)$  и  $(b, y_1)$ . Если тяжелая точка движется из  $A$  без начальной скорости, то ее скорость  $v$  связана с ее ординатой  $y$  следующим соотношением:

$$v^2 = 2gy,$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести, или

$$v = \sqrt{2gy}.$$

<sup>1)</sup> Мы здесь естественно предполагаем, что  $A$  и  $B$  не лежат на одной вертикальной прямой. Если бы  $A$  и  $B$  лежали на одной вертикальной прямой, то решением задачи являлась бы эта прямая.

Пусть  $y = y(x)$  есть уравнение кривой, по которой движется точка из  $A$  в  $B$ . Скорость движения точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{dt},$$

где  $dt$  — элемент времени. Отсюда:

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (3)$$

Интегрируя (3), получим время  $T$ , потребное для покрытия пути из точки  $A$  до точки  $B$  по кривой  $y = y(x)$ :

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} dx. \quad (3')$$

Очевидно,  $T$  есть функционал, зависящий от функции  $y(x)$ . Требуется найти функцию  $y(x)$  [или, что то же самое, кривую  $y = y(x)$ ], для которой  $T$  принимает наименьшее значение. Решение этой задачи мы дадим в следующем параграфе.

**Принцип Ферма.** Задача о брахистохроне — аналитически родственна следующей физической задаче другой природы: *в прозрачной среде с переменной оптической плотностью даны две точки  $A$  и  $B$ , требуется определить траекторию луча света, идущего от точки  $A$  к точке  $B$ . Эта задача сводится к задаче на разыскание экстремума функционала на основании так называемого принципа Ферма: из всех кривых, соединяющих точки  $A$  и  $B$ , траектория луча света есть линия, распространяясь вдоль которой свет придет из  $A$  в  $B$  в кратчайший срок.*

Остановимся на плоском случае. Примем за плоскость распространения света плоскость  $xOy$ .

Пусть  $x_0, y_0$  и  $x_1, y_1$  суть координаты точек  $A$  и  $B$ , а  $y = y(x)$ ,  $x_0 \leq x \leq x_1$  есть некоторая кривая, соединяющая эти точки. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем примере, получим: время  $T$  распространения света вдоль кривой  $y = y(x)$  из  $A$  в  $B$  выражается интегралом:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v[x, y(x)]} dx; \quad (4)$$

этим самым задача определения траектории луча света сводится к определению линии, для которой функционал принимает наименьшее значение.

**Предмет вариационного исчисления.** Решение отдельных задач на отыскание минимума или максимума функционалов привело к созданию новой математической дисциплины — *вариационного исчисления*.

В этой главе мы покажем, каким образом, отправляясь от задач на разыскание экстремума функций многих переменных, можно предельным переходом подойти к решению задачи на разыскание экстремумов функционалов.

§ 28. Элементарное решение некоторых вариационных задач

**Распространение света.** Решим поставленную в предыдущем параграфе задачу о траектории луча света, распространяющегося в плоскости  $xOy$  и идущего от точки  $A(x_0, y_0)$  к точке  $B(x_1, y_1)$ . Ограничимся пока случаем, когда скорость  $v$  непрерывно зависит от  $y$ :  $v = v(y)$ . Будем обозначать через  $S$  нашу плоскую среду распространения света. Построим в плоскости  $xOy$  горизонтальную полосу ширины  $y_1 - y_0 = h$ :

$$y_0 \leq y \leq y_0 + h = y_1; \tag{5}$$

эта полоса ограничена прямыми, параллельными оси  $Ox$  и проходящими через точки  $A$  и  $B$ . Разобьем прямыми

$$y = y_0 + i \frac{h}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

нашу полосу (5) на  $n$  горизонтальных полосок (черт. 1):

$$y_0 + i \frac{h}{n} < y < y_0 + \frac{(i+1)h}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \tag{5'}$$

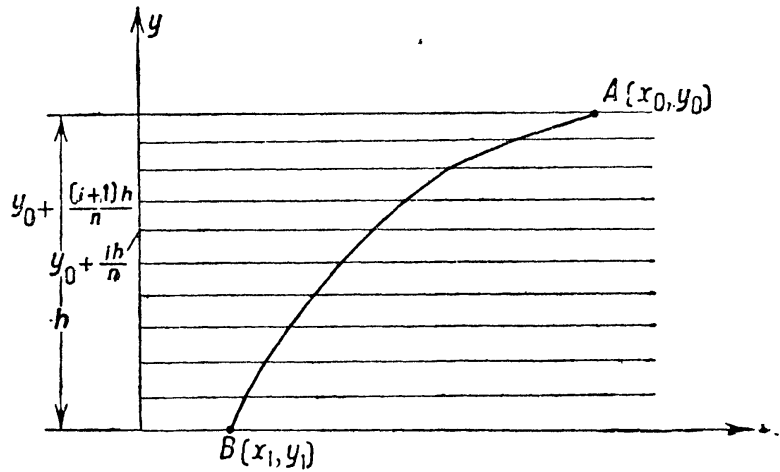
Заменим мысленно данную среду распространения света, с непрерывным изменением скорости света, средой  $S_n$  со скачкообразным изменением скорости света, именно: в пределах  $i$ -й плоскости (5'),  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , скорость света  $v_i$  будем считать постоянной и равной

$$v_i = v \left( y_0 + \frac{ih}{n} \right).$$

Задачу распространения света в среде  $S$  мы будем рассматривать как предельную задачу распространения света в среде  $S_n$ ,

когда  $n$  неограниченно растет. Задача распространения света в среде  $S_n$  есть задача на разыскание минимума функции  $(n-1)$ -го переменного; эта задача была нами решена в § 15, пример 4.

В примере 4 § 15 мы уже определили путь луча света в среде, в которой оптическая плотность, а следовательно и скорость, менялись только скачками. В основу решения был как раз положен принцип Ферма. Мы нашли, что в этом случае луч света представляет собою полигон. Разобранная задача, однако, не исчерпывает задач, встречающихся в физике и астрономии на определение пути луча света. Часто приходится иметь дело с средами с непрерывно меняющейся плотностью. В этом случае путь луча будет кривая с непрерывно вра-



Черт. 1.

щающейся касательной. Примером такой задачи может служить задача определения пути, который проходит луч света от светящейся точки, например звезды, до нашего глаза. Этот путь будет криволинейен, ибо плотность атмосферы меняется непрерывно с высотой. Для большей простоты примем, что поверхность земли есть плоскость (кривизна земли мала по сравнению с толщиной атмосферы). Введем систему координат. За начало координат примем положение глаза. Светящаяся точка пусть расположена в плоскости  $xOy$ , ось  $Oy$  направим вертикально вверх, ординату светящейся точки обозначим через  $h$ .

Пусть теперь  $v(x, y)$  есть скорость распространения света в точке с координатами  $x, y$ . Эту скорость будем считать заданной функцией от  $x$  и  $y$ , причем будем предполагать, что  $v(x, y)$  есть непрерывная функция от  $x$  и  $y$ .

По принципу Ферма траектория луча света в  $S_n$  есть полигон, двигаясь по которому луч, исходящий из точки  $A$ , достигнет в кратчайший срок точки  $B$ . Стороны полигона соединяют прямые  $y = y_0 + \frac{ih}{n}$  и  $y = y_0 + \frac{(i+1)h}{n}$ . Обозначим через  $x_i$  абсциссу  $i$ -й вершины этого полигона (с ординатой  $y_0 + \frac{ih}{n}$ ), получим для времени  $T_n$  движения света по полигону выражение:

$$T_n = \sum \frac{1}{v_i} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2}. \quad (6)$$

Условие минимума  $T_n$  (см. § 15):

$$\frac{\cos \varphi_i}{v_i} = k, \quad (7)$$

где  $\varphi_i$  — угол наклона  $i$ -й стороны полигона к оси  $Ox$ ;  $k$  не зависит от  $i$ . Условие (7) определяет полигональную траекторию светового луча.

Перейдем теперь к пределу, когда  $n \rightarrow \infty$ . От скачкообразного распределения плотностей и скоростей света мы перейдем к непрерывному их распределению; полигональные траектории перейдут в криволинейные, выражаемые уравнениями  $y = y(x)$ ; время  $T$  движения света по траектории выразится вместо суммы (6) интегралом:

$$T = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y)} dx;$$

$T$  есть предел соответственных  $T_n$ . Будем считать, что при этом предельном переходе полигональная траектория среды  $S_n$ , дающая минимум  $T_n$ , переходит в криволинейную траекторию среды  $S$ , дающую минимум  $T$ ; при этом направления сторон полигональной траектории переходят в направления касательных к криволинейной траектории. При этих гипотезах условие минимума (7) для  $T_n$  перейдет в условие минимума для  $T$ :

$$\frac{\cos \varphi}{v(y)} = k = \text{const.}$$