Л. А. Люстерник

Основы вариационного исчисления. Том 1. Часть 2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л. А. Люстерник
Л11 Основы вариационного исчисления. Том 1. Часть 2 / Л. А. Люстерник – М.: Книга по Требованию, 2013. – 400 с.

ISBN 978-5-458-26194-4

анализу общих задач вариационного исчисления теоретико-функциональными методами (вопросам существования, апроксимативным методам) и топологическим методам. (предисловие ко II части).

ISBN 978-5-458-26194-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XIV. *Теория поля и достаточные условия сильного экстремума*

Дополнение I. *Экстремальные свойства выпуклых тел*

Дополнение II. *О некоторых экстремальных задачах теории конформных отображений*

Дополнение III. *Применение метода Ритца к доказательству существования решений уравнения Штурма-Лиувилля*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА V

ПЕРЕХОД ОТ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ К ВАРИАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

§ 27. Функционал

Общие понятия. Исследуем такую величину, как длина кривой. Длина кривой есть переменная величина, она меняется вместе с кривой. Мы имеем здесь аналогию с функцией одного или нескольких переменных. Длина есть также зависимая переменная величина, но она зависит не от числовой переменной, а от кривой.

Пусть нам даны кривые, уравнения которых имеют вид:

$$y = y(x), \tag{1}$$

причем абсцисса x меняется в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, а функция $y(x)$ обладает непрерывной производной $y'(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда длина J каждой такой кривой имеет вид:

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

С изменением функций $y(x)$ меняется и кривая, изображающая эту функцию, меняется и величина J — длина кривой (1). J зависит от вида функции $y(x)$: различным функциям $y(x)$ отвечают различные значения J (различные длины). Мы будем писать:

$$J = J[y(x)].$$

Эта запись показывает, что J зависит от функции $y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дан некоторый класс функций $y(x)$. Мы скажем: $J[y(x)]$ есть *функционал* от функции $y(x)$ нашего класса, если каждой функции $y(x)$ отвечает некоторое значение $J[y(x)]$.

Поскольку геометрически функции одного переменного изображаются линиями, то функционал от них иногда называется *функцией линии*.

Пример 1. Рассмотрим совокупность всех непрерывных функций $y(x)$, заданных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)\, dx \tag{2}$$

есть функционал от $y(x)$; каждой функции $y(x)$ отвечает определенное значение $J[y(x)]$. Этот функционал геометрически означает площадь, ограниченную кривою $y = y(x)$, осью Ox и ординатами $x = a$, $x = b$.

Подставляя в равенство (2) вместо $y(x)$ конкретные функции, мы будем получать соответственные значения $J[y(x)]$. Положим для определенности $a=0$, $b=1$:

$$J[y(x)]=\int_0^1 y(x)\,dx.$$

Если $y(x)=x$, то $J[y(x)]=J[x]=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$;

если $y(x)=x^2$, то $J[y(x)]=J[x^2]=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}$;

если $y(x)=\frac{1}{x+1}$, то $J\left[\frac{1}{x+1}\right]=\int_0^1 \frac{dx}{x+1}=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$;

если $y(x)=\frac{1}{1+x^2}$, то $J\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Другим примером функционала является длина кривой $y=y(x)$. Будем попрежнему считать $a=0$, $b=1$; рассмотрим совокупность всех непрерывных функций $y(x)$, обладающих непрерывной первой производной. Подставляя в выражение

$$J[y(x)]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

вместо $y(x)$ определенные функции, получим определенные числовые значения для $J[y(x)]$.

Например, если $y(x)=x$, $y'(x)=1$.

$$J[y(x)]=J[x]=\int_0^1 \sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}.$$

Если $y(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (цепная линия,) то

$$J\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{(e^x+e^{-x})'^2}{2}}\,dx=$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{2}}\,dx=$$

$$=\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big|_0^1=\frac{e-e^{-1}}{2}.$$

Можно было бы привести целый ряд других примеров функционалов.

В настоящей главе, когда мы будем говорить о „всех кривых", мы безоговорочно предполагаем, что мы ограничиваемся кривыми, аналитически выражаемыми уравнениями:

$$y = y(x),$$

где x изменяется на некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, а $y(x)$, обладает непрерывной первой производной.

Экстремум функционалов. Уже с самого начала возникновения анализа бесконечно малых наряду с задачами об экстремумах функций n переменных появился целый ряд геометрических, механических и физических задач на отыскание экстремумов функционалов. Рассмотрим, например, следующую задачу: *среди всех плоских кривых, соединяющих две заданных точки A (x_0, y_0) и $B(x_1, y_1)$, найти ту, для которой длина принимает наименьшее значение.*

Аналитически эта задача гласит: среди всех функций $y = y(x)$, таких, что

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

найти ту, для которой

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

принимает наименьшее значение.

Мы знаем, что искомая кривая, дающая минимум длины, есть прямолинейный отрезок, соединяющий точки A и B или, переводя на аналитический язык: $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ достигает минимального значения, если функция $y(x)$ есть $y(x) = y_0 + k(x - x_0)$, где $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Задача о брахистохроне. Исторически первой задачей, возбудившей к себе общий интерес среди математиков, была задача о *брахистохоне*, поставленная Иваном Бернулли: *среди всех кривых, соединяющих две данные точки A и B, найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь из точки A, под влиянием силы тяжести попадет в кратчайший срок в точку B* [1]).

Проведя вертикальную плоскость, проходящую через точки A и B, ограничимся плоскими дугами, соединяющими эти точки. Примем за ось Ox горизонтальную прямую, а ось Oy направим вертикально вниз. Тогда точки A и B будут иметь соответственно координаты $(a, 0)$ и (b, y_1). Если тяжелая точка движется из A без начальной скорости, то ее скорость v связана с ее ординатой y следующим соотношением:

$$v^2 = 2gy,$$

где g — ускорение силы тяжести, или

$$v = \sqrt{2gy}.$$

---

[1]) Мы здесь естественно предполагаем, что A и B не лежат на одной вертикальной прямой. Если бы A и B лежали на одной вертикальной прямой, то решением задачи являлась бы эта прямая.

Пусть $y=y(x)$ есть уравнение кривой, по которой движется точка из A в B. Скорость движения точки:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{dt},$$

где dt — элемент времени. Отсюда:

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{3}$$

Интегрируя (3), получим время T, потребное для покрытия пути из точки A до точки B по кривой $y=y(x)$:

$$T=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx. \tag{3'}$$

Очевидно, T есть функционал, зависящий от функции $y(x)$. Требуется найти функцию $y(x)$ [или, что то же самое, кривую $y=y(x)$], для которой T принимает наименьшее значение. Решение этой задачи мы дадим в следующем параграфе.

Принцип Ферма. Задача о брахистохроне аналитически родственна следующей физической задаче другой природы: *в прозрачной среде с переменной оптической плотностью даны две точки A и B, требуется определить траекторию луча света, идущего от точки A к точке B.* Эта задача сводится к задаче на разыскание экстремума функционала на основании так называемого принципа Ферма: *из всех кривых, соединяющих точки A и B, траектория луча света есть линия, распространяясь вдоль которой свет придет из A в B в кратчайший срок.*

Остановимся на плоском случае. Примем за плоскость распространения света плоскость xOy.

Пусть x_0, y_0 и x_1, y_1 суть координаты точек A и B, а $y=y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ есть некоторая кривая, соединяющая эти точки. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем примере, получим: время T распространения света вдоль кривой $y=y(x)$ из A в B выражается интегралом:

$$T=\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v[x,y(x)]}\,dx; \tag{4}$$

этим самым задача определения траектории луча света сводится к определению линии, для которой функционал принимает наименьшее значение.

Предмет вариационного исчисления. Решение отдельных задач на отыскание минимума или максимума функционалов привело к созданию новой математической дисциплины — *вариационного исчисления.*

В этой главе мы покажем, каким образом, отправляясь от задач на разыскание экстремума функций многих переменных, можно предельным переходом подойти к решению задачи на разыскание экстремумов функционалов.

§ 28. Элементарное решение некоторых вариационных задач

Распространение света. Решим поставленную в предыдущем параграфе задачу о траектории луча света, распространяющегося в плоскости xOy и идущего от точки $A(x_0, y_0)$ к точке $B(x_1, y_1)$. Ограничимся пока случаем, когда скорость v непрерывно зависит от y: $v = v(y)$. Будем обозначать через S нашу плоскую среду распространения света. Построим в плоскости xOy горизонтальную полосу ширины $y_1 - y_0 = h$:

$$y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + h = y_1; \tag{5}$$

эта полоса ограничена прямыми, параллельными оси Ox и проходящими через точки A и B. Разобьем прямыми

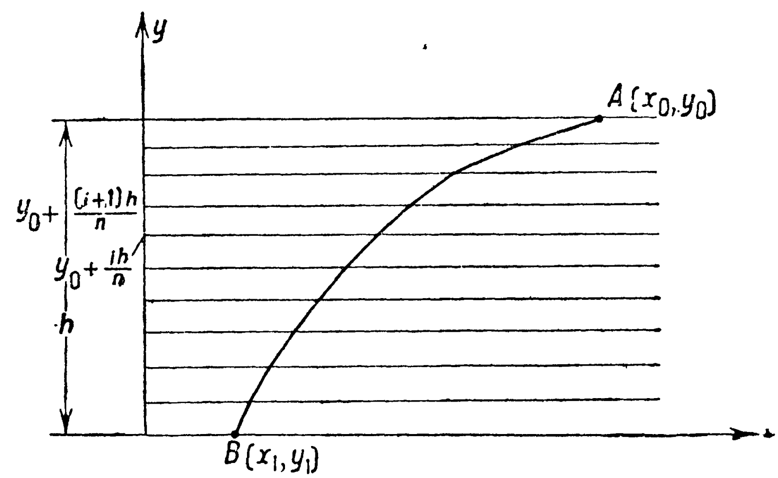
$$y = y_0 + i\frac{h}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

нашу полосу (5) на n горизонтальных полосок (черт. 1):

$$y_0 + i\frac{h}{n} < y < y_0 + \frac{(i+1)h}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{5'}$$

Заменим мысленно данную среду распространения света, с непрерывным изменением скорости света, средой S_n со скачкообразным изменением скорости света, именно: в пределах i-й плоскости (5′), $i = 0, 1 \ldots, n-1$, скорость света v_i будем считать постоянной и равной

$$v_i = v\left(y_0 + \frac{ih}{n}\right).$$



Черт. 1.

Задачу распространения света в среде S мы будем рассматривать как предельную задачу распространения света в среде S_n, когда n неограниченно растет. Задача распространения света в среде S_n есть задача на разыскание минимума функции $(n-1)$-го переменного; эта задача была нами решена в § 15, пример 4.

В примере 4 § 15 мы уже определили путь луча света в среде, в которой оптическая плотность, а следовательно и скорость, менялись только скачками. В основу решения был как раз положен принцип Ферма. Мы нашли, что в этом случае луч света представляет собою полигон. Разобранная задача, однако, не исчерпывает задач, встречающихся в физике и астрономии на определение пути луча света. Часто приходится иметь дело с средами с непрерывно меняющейся плотностью. В этом случае путь луча будет кривая с непрерывно вращающейся касательной. Примером такой задачи может служить задача определения пути, который проходит луч света от светящейся точки, например звезды, до нашего глаза. Этот путь будет криволинеен, ибо плотность атмосферы меняется непрерывно с высотой. Для большей простоты примем, что поверхность земли есть плоскость (кривизна земли мала по сравнению с толщиной атмосферы). Введем систему координат. За начало координат примем положение глаза. Светящаяся точка пусть расположена в плоскости xOy, ось Oy направим вертикально вверх, ординату светящейся точки обозначим через h.

Пусть теперь $v(x, y)$ есть скорость распространения света в точке с координатами x, y. Эту скорость будем считать заданной функцией от x и y, причем будем предполагать, что $v(x, y)$ есть непрерывная функция от x и y.

По принципу Ферма траектория луча света в S_n есть полигон, двигаясь по которому луч, исходящий из точки A, достигнет в кратчайший срок точки B. Стороны полигона соединяют прямые $y=y_0+\frac{ih}{n}$ и $y=y_0+\frac{(i+1)h}{n}$. Обозначим через x_i абсциссу i-й вершины этого полигона $\left(\text{с ординатой } y_0+\frac{ih}{n}\right)$, получим для времени T_n движения света по полигону выражение:

$$T_n=\sum\frac{1}{v_i}\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+\left(\frac{h}{n}\right)^2}. \tag{6}$$

Условие минимума T_n (см. § 15):

$$\frac{\cos\varphi_i}{v_i}=k, \tag{7}$$

где φ_i — угол наклона i-й стороны полигона к оси Ox; k не зависит от i. Условие (7) определяет полигональную траекторию светового луча.

Перейдем теперь к пределу, когда $n\to\infty$. От скачкообразного распределения плотностей и скоростей света мы перейдем к непрерывному их распределению; полигональные траектории перейдут в криволинейные, выражаемые уравнениями $y=y(x)$; время T движения света по траектории выразится вместо суммы (6) интегралом:

$$T=\int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}\,dx;$$

T есть предел соответственных T_n. Будем считать, что при этом предельном переходе полигональная траектория среды S_n, дающая минимум T_n, переходит в криволинейную траекторию среды S, дающую минимум T; при этом направления сторон полигональной траектории переходят в направления касательных к криволинейной траектории. При этих гипотезах условие минимума (7) для T_n перейдет в условие минимума для T:

$$\frac{\cos\varphi}{v(y)}=k=\text{const}.$$