

П. С. Александров

Энциклопедия элементарной математики

Том 5. Геометрия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 37-053.2
ББК 74.27я7
П11

П11 **П. С. Александров**
Энциклопедия элементарной математики: Том 5. Геометрия / П. С. Александров – М.: Книга по Требованию, 2024. – 624 с.

ISBN 978-5-458-25954-5

Энциклопедия элементарной математики в 5 томах. Том 5. Геометрия.

ISBN 978-5-458-25954-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение: что такое площадь?	7
1.1. Основные свойства площади	7
1.2. Квадрируемые фигуры	8
1.3. Аксиоматическое определение площади	9
1.4. Проблема существования площади	10
1.5. Конструктивные определения площади	10
1.6. Сравнение площади с элементарными функциями действительного переменного	12
1.7. Итоги	12
§ 2. Класс многоугольных фигур	13
2.1. Внутренние, внешние и граничные точки	13
2.2. Открытые и замкнутые множества	15
2.3. Выпуклые многоугольники	16
2.4. Многоугольные фигуры	17
2.5. Операции над многоугольными фигурами	18
§ 3. Площадь на классе многоугольных фигур	21
3.1. Определение площади	21
3.2. Простейшие следствия определения	21
3.3. Вычисление площади прямоугольника	22
3.4. Вычисление площади треугольника и трапеции	23
3.5. Вычисление площади произвольной многоугольной фигуры	23
3.6. Строгая монотонность	24
3.7. Теорема существования и единственности	24
3.8. Поведение площади при преобразовании подобия	29
3.9. Поведение площади при ортогональном проектировании	29
3.10. Поведение площади при аффинном преобразовании	30
§ 4. Класс квадрируемых фигур	33
4.1. Определение квадрируемой фигуры	33
4.2. Замечание о выборе фигур P и Q	33
4.3. Нуль-множества	34
4.4. Лемма о граничной точке	35
4.5. Критерий квадрируемости	35
4.6. Операции над квадрируемыми фигурами	36
4.7. Линии	36
4.8. Квадрируемость классических фигур	40
4.9. Круг	41
4.10. Примеры неквадрируемых множеств	41
§ 5. Площадь на классе квадрируемых фигур	44
5.1. Определение площади	44
5.2. Простейшие следствия определения	44
5.3. Площадь как точная грань	45
5.4. Площадь как предел	46

5.5. Теорема существования и единственности	47
5.6. Нуль-множества	48
5.7. Полнота класса квадратуемых фигур	48
5.8. Поведение площади при аффинном преобразовании	49
5.9. Вычисление площади	50
5.10. Площадь на классе квадратуемых замкнутых областей	54
§ 6. Другое построение теории площадей	56
6.1. Введение	56
6.2. Площадь относительно сетки	57
6.3. Критерий квадратуемости	59
6.4. Операции над квадратуемыми фигурами	60
6.5. Основные свойства площади	61
6.6. Теорема единственности	63
6.7. Инвариантность площади	64
6.8. Эквивалентность двух определений площади	64
§ 7. Объем	65
7.1. Введение	65
7.2. Класс многогранных тел	66
7.3. Определение объема на классе многогранных тел	68
7.4. Вычисление объема на классе многогранных тел	68
7.5. Существование и единственность объема на классе многогранных тел	72
7.6. Поведение объема многогранного тела при геометрических преобразованиях	75
7.7. Класс кубуемых тел	75
7.8. Объем на классе кубуемых тел	76
7.9. Цилиндры и конусы	77
7.10. Шар	78
7.11. Тела вращения	80
7.12. Другое построение теории объемов	81
Добавление. Площадь и объем в геометрии подобия	81
1. Метрическая геометрия и геометрия подобия	81
2. Преобразование площади и объема при замене единичного отрезка	83
3. Переход к геометрии подобия	84
4. Единицы длины, площади и объема	85
Литература	86

Эта статья посвящена основным вопросам теории площадей и объемов — их определению, свойствам и вычислению. Площадь изучается только на плоскости. Определение площади кривой поверхности требует совсем других средств¹⁾.

Предполагается, что читатель знаком с теорией длин прямолинейных отрезков (см. стр. 89—94). Напомним, что в основе этой теории лежит выбор единичного отрезка. Если единичный отрезок заменяется другим отрезком, то длины всех отрезков делятся на старую длину нового единичного отрезка. Площади и объемы тоже зависят от выбора единичного отрезка. Эта зависимость изучается в специ-

¹⁾ См. статью «Длина кривой и площадь поверхности» в этом томе ЭМ. (Прим. ред.)

альном добавлении, помещенном после статьи. *В самой статье единственный отрезок считается фиксированным раз и навсегда.*

Требования к общей подготовке читателя почти всюду ограничиваются самыми начальными сведениями о множествах, функциях и последовательностях (свойства сложения, вычитания и пересечения множеств; общее понятие числовой функции; границы числовых множеств; предел последовательности). Немногие менее элементарные пункты отмечены звездочкой и могут быть пропущены без ущерба для понимания остального.

Наименее элементарной проблемой теории площадей и объемов является их вычисление: сколько-нибудь полное рассмотрение этой проблемы требует интегрального исчисления, притом привлечения не только простых, но и кратных интегралов, включая переход к криволинейным координатам. Понятно, что такие сложные вещи не могут излагаться в элементарной статье. Приходится ограничиться несколькими формулами, выражающими площади и объемы через простые интегралы.

§ 1. Введение: что такое площадь?

1.1. Основные свойства площади. Площадь принадлежит к числу наиболее широко известных математических понятий — тех, с которыми все мы встречаемся в практической жизни. Практическое знакомство с площадями делает это понятие чрезвычайно надежным в наших глазах. Площадь представляется нам физической реальностью, такой же несомненной, как окружающие нас предметы.

Значительно менее известен тот факт, что площадь — очень не простое понятие. Точное определение площади представляет значительные логические трудности и почти неизвестно за пределами узкого круга профессиональных математиков. Многим самый вопрос покажется искусственным: они скажут, что площадь — *первичное* понятие, не подлежащее определению.

Взгляд на площадь как на первичное понятие сложился еще в древности. До сравнительно недавнего времени этого взгляда придерживались и математики. На протяжении многих столетий они видели свою задачу в *вычислении* площадей; им не приходило в голову, что площадь нуждается в специальном определении.

Между тем их вычисления должны были на чем-то основываться — если не на прямом определении, то на чем-то, его заменяющем, на каких-то принципах, которые позволяли им всякий раз получать в качестве площади определенное число. И такие принципы, конечно, существовали, хотя обычно не формулировались. Это — *основные свойства* площади. Они широко известны, потому что служат основой всех применений — теории площадей. Мы выскажем их в следующей форме, наиболее удобной для наших целей.

(α) *Площадь фигуры есть неотрицательное число.*

(β) *Площадь фигуры, составленной из нескольких фигур без общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.*

(γ) *Равные фигуры имеют равные площади.*

(δ) *Площадь единичного квадрата равна единице.*

Свойство (α) называется *положительностью*, (β) — *аддитивностью*, (γ) — *инвариантностью*, (δ) — *нормированностью*. Под единичным квадратом понимается квадрат, построенный на единичном отрезке. Подчеркнем, что в этой статье речь идет исключительно о площадях *плоских* фигур.

Конечно, в действительности четыре свойства не были единственными, которыми математики пользовались при вычислении площадей. Но все другие свойства площади, которые они явно или неявно использовали, оказались следствиями этих четырех. В качестве примера укажем на широко известное свойство, называемое *монотонностью*: *площадь части фигуры не превышает площади всей фигуры*. Монотонность есть следствие положительности и аддитивности. Действительно, пусть F — фигура и G — ее часть. Обозначим через G' дополнительную часть. Так как G и G' вместе составляют фигуру F и не имеют общих внутренних точек, то $\text{пл. } F = \text{пл. } G + \text{пл. } G'$, а так как $\text{пл. } G' \geq 0$, то $\text{пл. } F \geq \text{пл. } G$.

1.2. Квадрируемые фигуры. Методы, позволяющие вычислять площади на основании свойств (α) — (δ), в своих наиболее общих чертах также были созданы еще в древности.

Сначала математики научились вычислять площади многоугольных фигур. Было установлено, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту и что для вычисления площади произвольной многоугольной фигуры достаточно разбить ее на треугольники без общих внутренних точек и сложить площади этих треугольников.

Перейдя к фигурам, ограниченным кривыми линиями, математики стали приближать их многоугольными фигурами. Пусть F — фигура, площадь которой должна быть вычислена. Рассмотрим, с одной стороны, всевозможные многоугольные фигуры, содержащиеся в F , с другой стороны, — всевозможные многоугольные фигуры, содержащие F . Первые называются *входящими* в F , вторые — *объемлющими* F . В силу монотонности площади, для любой входящей многоугольной фигуры P и любой объемлющей многоугольной фигуры Q справедливо неравенство

$$\text{пл. } P \leq \text{пл. } F \leq \text{пл. } Q.$$

Таким образом, площади фигур P и Q служат приближенными значениями площади фигуры F с недостатком и с избытком. Погрешности обоих приближений, т. е. разности $\text{пл. } F - \text{пл. } P$ и $\text{пл. } Q - \text{пл. } F$, не превышают разности $\text{пл. } Q - \text{пл. } P$. Предположим,

что путем надлежащего выбора многоугольных фигур P и Q мы можем сделать последнюю разность сколь угодно малой. Тогда и погрешности наших приближений могут быть сделаны сколь угодно малыми. Это значит, что площадь фигуры F может быть вычислена с произвольной степенью точности.

Ясно, что этот метод применим только к таким фигурам F , для которых существуют входящие многоугольные фигуры P и объемлющие многоугольные фигуры Q со сколь угодно малыми разностями пл. Q — пл. P . Такие фигуры F называются *квадрируемыми*. Например, круг — квадрируемая фигура. Для него в качестве P и Q могут быть взяты правильные 2^n -угольники — вписанный и описанный. Известно, что разность площадей этих 2^n -угольников стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Класс квадрируемых фигур очень широк. Только с квадрируемыми фигурами и имеет дело теория площадей, которой мы будем заниматься.

1.3. Аксиоматическое определение площади. Оказывается, что сведений, которыми мы уже располагаем, достаточно для определения площади. Нужно лишь взглянуть на них с новой точки зрения.

Отделим прежде всего чисто математические сведения о площади, содержащиеся в пп. 1.1 и 1.2, от исторических и иных соображений. Эти сведения сводятся к трем положениям: (1) Каждой квадрируемой фигуре отвечает определенное число — ее площадь. (2) Эти числа-площади обладают свойствами (α) — (δ) . (3) Площадь любой квадрируемой фигуры можно вычислить с произвольной степенью точности на основании свойств (α) — (δ) . Первое положение означает, что площадь есть функция, определенная на классе квадрируемых фигур. Согласно второму эта функция обладает свойствами (α) — (δ) . Третье положение показывает, что на классе квадрируемых фигур не существует другой функции со свойствами (α) — (δ) . Следовательно, *площадь может быть определена как функция квадрируемой фигуры, обладающая свойствами (α) — (δ) .*

К сожалению, эта краткая формулировка не безупречна: она предполагает, что класс квадрируемых фигур уже определен, тогда как определение этого класса само опирается на понятие площади, правда, только на понятие площади многоугольной фигуры. Чтобы устранить это затруднение, достаточно предварительно, с помощью тех же условий (α) — (δ) , определить площадь на классе многоугольных фигур. Полная формулировка определения площади состоит, таким образом, из трех частей: сначала площадь определяется как функция со свойствами (α) — (δ) на классе многоугольных фигур; затем определяется класс квадрируемых фигур; наконец, площадь определяется как функция со свойствами (α) — (δ) на классе квадрируемых фигур.

Как видно из предыдущего, это определение представляет собой лишь перевод на современный математический язык тех представлений о площади, которые достались нам в наследство от математиков прошлого. Конечно, такой перевод не мог обойтись без уточнений. Наиболее заметное уточнение касается класса фигур, которым приписывается площадь. Мы должны были точно указать этот класс, тогда как прежде математики не ставили перед собой такой задачи.

Нетрудно заметить, что свойства $(\alpha) - (\delta)$ играют в изложенном определении площади роль аксиом. Иногда их называют *аксиомами площади*, а само определение называют *аксиоматическим*.

1.4. Проблема существования площади. Вернемся к трем положениям, сформулированным в начале предыдущего пункта. Положения (1) и (2) были приняты нами как очевидные; положение (3), согласно пп. 1.1 и 1.2, представляет собой теорему, которая может быть доказана. Из положения (3) вытекает, что на классе квадратируемых фигур не может быть двух различных функций со свойствами $(\alpha) - (\delta)$; утверждение, содержащееся в положениях (1) и (2), состоит, очевидно, в том, что *по крайней мере одна такая функция существует*.

Поскольку положение (3) может быть доказано, единственность нашей функции не вызывает сомнений. Но так ли уж очевидны положения (1) и (2)? Разве в действительности очевидно, что на классе квадратируемых фигур, или хотя бы на классе многоугольных фигур, существует функция со свойствами $(\alpha) - (\delta)$?

Конечно, это вовсе не очевидно. До сих пор положения (1) и (2) представлялись нам очевидными просто потому, что мы исходили из старого взгляда на площадь как на нечто данное. В действительности существование функции со свойствами $(\alpha) - (\delta)$ требует доказательства. Сначала должны быть доказаны существование и единственность такой функции на классе многоугольных фигур, затем должен быть определен класс квадратируемых фигур и, наконец, должны быть доказаны существование и единственность такой функции на классе квадратируемых фигур. Только после того как все это сделано, слова «площадь есть функция квадратируемой фигуры, обладающая свойствами $(\alpha) - (\delta)$ », становятся полноценным определением.

1.5. Конструктивные определения площади. Все известные доказательства существования функции со свойствами $(\alpha) - (\delta)$ заключаются в прямом построении этой функции, т. е. в описании процесса, позволяющего по фигуре F найти число пл. F . После того как функция построена, устанавливается, что она обладает свойствами $(\alpha) - (\delta)$. Разные доказательства отличаются друг от друга, конечно, не тем, что приводят к различным функциям, — функция всегда одна и та же, — а тем, что в них по-разному строится эта функция.

Одно из возможных прямых построений функции со свойствами $(\alpha) - (\delta)$ на классе многоугольных фигур фактически было описано в п. 1.2: заданная многоугольная фигура разбивается на треугольники без общих внутренних точек, затем для каждого треугольника составляется половина произведения какой-нибудь стороны на соответствующую высоту и результаты складываются. Тот факт, что этим путем действительно получается функция многоугольной фигуры со свойствами $(\alpha) - (\delta)$, требует, конечно, доказательства.

После того как площадь построена на классе многоугольных фигур, ее уже сравнительно нетрудно продолжить на класс квадратуемых фигур. Способ продолжения опять-таки был фактически описан в п. 1.2: за площадь квадратуемой фигуры принимается то единственное число, для которого площади входящих многоугольных фигур служат приближениями с недостатком, а площади объемлющих многоугольных фигур — приближениями с избытком. Свойства $(\alpha) - (\delta)$ для продолженной функции выводятся из ее уже установленных свойств на классе многоугольных фигур.

Всякое прямое построение функции со свойствами $(\alpha) - (\delta)$ само, очевидно, может служить определением площади. Такие определения называются *конструктивными*, и любое из них может быть положено в основу теории площадей. Если при аксиоматическом определении площади должны быть доказаны ее существование и единственность, то при конструктивном определении становятся теоремами и подлежат доказательству свойства $(\alpha) - (\delta)$. С логической точки зрения конструктивное построение теории площадей эквивалентно аксиоматическому и в конечном счете отличается от него лишь порядком изложения. Методически каждое построение имеет свои достоинства и свои недостатки.

Для начинающего очевидным недостатком намеченного выше конструктивного определения площади является его психологическая неубедительность: площадь треугольника *по определению* объявляется равной половине произведения основания на высоту. Более естественным является конструктивный подход к понятию площади, содержащийся в широко известной наивной формулировке: *площадь фигуры есть число единиц площади, заключенных в этой фигуре*. Этой формулировке можно следующим образом придать точный смысл. Разобьем плоскость горизонталями и вертикалями на квадраты со стороной 1, затем каждый из них на 100 квадратов со стороной $1/10$, затем каждый из полученных квадратов — на 100 квадратов со стороной $1/100$, и т. д. Пусть α_n — число квадратов со стороной $1/10^n$, целиком содержащихся в заданной фигуре F , и α'_n — число квадратов со стороной $1/10^n$, пересекающихся с этой фигурой (см. рис. 19 на стр. 57). Положим $s_n = \alpha_n / 100^n$ и $s'_n = \alpha'_n / 100^n$. С наивной точки зрения s_n есть «число единиц площади, заключенных в F », взятое с недостатком, а s'_n — «число единиц площади,

заключенных в F », взятое с избытком. Если существует единственное число, заключенное между всеми числами s_n и всеми числами s'_n , то фигура F называется *квадрируемой* и указанное число называется *площадью* фигуры F . Доказывается, что эта площадь обладает свойствами (α)—(δ) и что это второе определение квадрируемости эквивалентно определению п. 1.2.

1.6. Сравнение площади с элементарными функциями действительного переменного. Логическая ситуация, с которой мы имели дело в предыдущих пунктах, встречается в математике довольно часто. Многие известные функции могут быть определены как своими свойствами («аксиоматически»), так и прямым построением («конструктивно»). Геометрическими примерами могут служить, наряду с площадью, длина и объем. Не лишним будет и пример из другой области.

Рассмотрим показательную функцию $f(x) = a^x$ ($a > 0$). Хотя с ее точным определением знакомы лишь немногие, ее основные свойства широко известны. Мы выберем следующие три свойства:

(а) Если $x < y$, то $f(x) \leq f(y)$ при $a \geq 1$ и $f(x) \geq f(y)$ при $a \leq 1$. (б) $f(x+y) = f(x)f(y)$. (с) $f(1) = a$.

Можно показать, что эти три свойства позволяют с произвольной степенью точности вычислить значение функции a^x при любом действительном значении x . Следовательно, на множестве действительных чисел не существует двух различных функций с этими свойствами. Иными словами, a^x можно аксиоматически определить как функцию действительного числа, обладающую свойствами (а), (б), (с).

Доказательство существования такой функции состоит в ее прямом построении. Сначала ее значения определяются для целых, затем для дробно-рациональных и, наконец, для иррациональных значений x . Это построение, правда лишь в самых общих чертах, излагается в школе. Оно представляет собой не что иное, как конструктивное определение функции a^x .

Аналогично могут быть определены и другие основные элементарные функции: логарифмические, степенные, тригонометрические и обратные тригонометрические. Например, $\log_a x$ можно определить как функцию положительного числа, обладающую тремя свойствами: (а) если $x < y$, то $f(x) < f(y)$ при $a > 1$ и $f(x) > f(y)$ при $a < 1$; (б) $f(xy) = f(x) + f(y)$; (с) $f(a) = 1$.

1.7. Итоги. Главный итог состоит в том, что площадь, которую прежде математики считали первичным понятием, может быть определена через более простые понятия и в конечном счете сведена к основным понятиям геометрии и арифметики. Это сведение не просто и добавляет к проблеме вычисления площади, которая раньше была единственной в теории площадей, ряд новых проблем логического характера.

Без сомнения, эти новые проблемы представляют для начинающего известные трудности. Задача настоящего введения — помочь читателю преодолеть их. Построение теории площадей, намеченное в предыдущих пунктах, будет подробно развито в дальнейшем. Систематическое изложение начнется со следующего параграфа.

§ 2. Класс многоугольных фигур

2.1. Внутренние, внешние и граничные точки. Пусть M — произвольное множество точек плоскости. Точка плоскости называется *внутренней* по отношению к M , если существует круг с центром в этой точке, целиком лежащий в M . Точка плоскости называется *внешней* по отношению к M , если существует круг с центром в этой точке, не имеющий с M общих точек. Точка плоскости называется *граничной* по отношению к M , если всякий круг с центром в этой точке содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую множеству M , и по крайней мере одну точку, не принадлежащую множеству M . Ясно, что каждая точка плоскости является по отношению к M либо внутренней, либо внешней, либо граничной. Точки всех трех типов показаны на рис. 1.

Всякая точка, внутренняя по отношению к M , принадлежит множеству M . Совокупность всех внутренних точек называется *внутренней частью* множества M . Ни одна точка, внешняя по отношению к M , не принадлежит множеству M . Что касается граничных точек, то они могут принадлежать и могут не принадлежать множеству M . Совокупность всех граничных точек (как принадлежащих, так и не принадлежащих множеству M) называется *границей* множества M .

Сумма внутренней части множества M и его границы называется *замыканием* множества M . Нетрудно дать и прямое определение замыкания: точка плоскости в том и только в том случае принадлежит замыканию множества M , если всякий круг с центром в этой точке содержит по крайней мере одну точку множества M .

Примеры. 1. M — круг радиуса r с центром в точке A , т. е. множество тех точек B , для которых расстояние $\rho(A, B)$ не превышает r . Пусть, далее, C — произвольная точка плоскости. Точка C является внутренней, если $\rho(A, C) < r$, внешней, если $\rho(A, C) > r$, и граничной, если $\rho(A, C) = r$. Таким образом, граница круга есть окружность с тем же центром и радиусом.

2. M — полуплоскость, т. е. множество, состоящее из точек некоторой прямой L и всех точек плоскости, лежащих от L по ту же

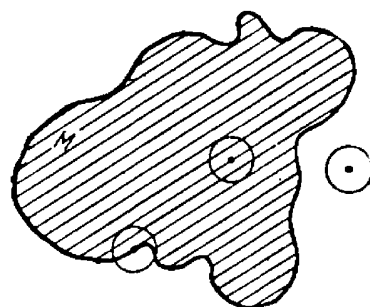


Рис. 1. Внутренние, внешние и граничные точки.

сторону, что и некоторая заданная точка. Границей полуплоскости M является прямая L .

3. Прямая, отрезок, ломаная, окружность вовсе не имеют внутренних точек. Все их точки являются по отношению к ним граничными, а все остальные точки плоскости — внешними. В частности, точки, лежащие внутри окружности, являются по отношению к ней внешними, — обстоятельство, указывающее на несовершенство нашей терминологии.

Внутренняя часть множества M будет обозначаться через $M_{\text{в}}$, граница — через $M_{\text{г}}$, замыкание — через $M_{\text{з}}$. Согласно изложенному выше ¹⁾, $M_{\text{в}} \subset M \subset M_{\text{з}}$, $M_{\text{з}} = M_{\text{в}} + M_{\text{г}} = M + M_{\text{г}}$.

Ясно, что если $M \subset N$, то $M_{\text{в}} \subset N_{\text{в}}$ и $M_{\text{з}} \subset N_{\text{з}}$. Покажем, что для любых двух множеств M и N

$$(MN)_{\text{в}} = M_{\text{в}}N_{\text{в}}, \quad (1)$$

$$(M + N)_{\text{з}} = M_{\text{з}} + N_{\text{з}}, \quad (2)$$

$$(M + N)_{\text{г}} \subset M_{\text{г}} + N_{\text{г}}, \quad (MN)_{\text{г}} \subset M_{\text{г}} + N_{\text{г}}, \quad (3)$$

$$(M - N)_{\text{г}} \subset M_{\text{г}} + N_{\text{г}}. \quad (4)$$

Доказательство формулы (1). Если $A \in (MN)_{\text{в}}$, то существует круг с центром в точке A , лежащий в MN , т. е. лежащий в M и в N . Тогда $A \in M_{\text{в}}$ и $A \in N_{\text{в}}$, т. е. $A \in M_{\text{в}}N_{\text{в}}$. Следовательно, $(MN)_{\text{в}} \subset M_{\text{в}}N_{\text{в}}$. Если $A \in M_{\text{в}}N_{\text{в}}$, то $A \in M_{\text{в}}$ и $A \in N_{\text{в}}$, т. е. существует круг с центром в точке A , лежащий в M , и существует круг с центром в точке A , лежащий в N . Меньший из этих двух кругов есть круг с центром в точке A , лежащий в MN , так что $A \in (MN)_{\text{в}}$. Следовательно, $M_{\text{в}}N_{\text{в}} \subset (MN)_{\text{в}}$.

Для доказательства формул (2), (3) и (4) мы воспользуемся операцией образования *дополнения* множества. Через доп. M будем обозначать дополнение множества M , т. е. совокупность всех точек плоскости, не принадлежащих к M ²⁾. Ясно, что точки, внешние по отношению к M , являются внутренними по отношению к доп. M и

¹⁾ Через $M + N$ в дальнейшем будет обозначаться *сумма* (или, иначе, *объединение*) множеств M и N , т. е. множество, состоящее из всех тех точек, которые принадлежат хотя бы одному из множеств M , N ; через MN будет обозначаться *пересечение* множеств M и N , т. е. множество, состоящее из всех тех точек, которые принадлежат обоим множествам M , N ; наконец, через $M - N$ будет обозначаться *разность* множеств M и N , т. е. множество, состоящее из всех тех точек, которые принадлежат множеству M , но не принадлежат N . (Сумма, пересечение и разность множеств M и N обозначаются также через $M \cup N$, $M \cap N$ и $M \setminus N$.) Запись $A \in M$ выражает тот факт, что точка A принадлежит множеству M ; запись $M \subset N$ означает, что множество M содержится в множестве N (и, может быть, совпадает с ним). (Прим. ред.)

²⁾ Дополнение множества M часто обозначают также через $\bar{M}$. (Прим. ред.)