М. К. Куренский

Дифференциальные уравнения. Книга 1

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. К. Куренский

М11 Дифференциальные уравнения. Книга 1: Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. К. Куренский – М.: Книга по Требованию, 2021. – 318 с.

ISBN 978-5-458-26164-7

Настоящая работа посвящена обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям с частными производными.

ISBN 978-5-458-26164-7

ПАМЯТИ

студента

Зиновия Каллинниковича

Куренского

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот курс дифференциальных уравнений представляет собой один из томов моего *курса математики*. Он подготовлен к печати в течение летних месяцев этого года, и появился в итоге моего довольно продолжительного изучения теории интегрирования дифференциальных уравнений, попыток ее дальнейшей разработки и стремления применить и известные, и полученные мною результаты к решению некоторых задач из области чистой и прикладной математики, а также из области инженерно-технических наук. Только некоторые первые параграфы из первых глав этой книги представляют собой обработанный для печати материал из моих лекций студентам различных киевских институтов, так как я меньше всего занимался преподаванием как раз именно теории дифференциальных уравнений; некоторые главы из середины книги отчасти являются переработкой того, что излагалось мною на лекциях аспирантам Научно-исследовательской кафедры математики в Киеве в 1928—1930 годах и аспирантам при Артиллерийской Академии РККА в Ленинграде в 1933 г

Несмотря на сравнительно небольшой объем, две книги моего курса дифференциальных уравнений содержат много материала: значительно больше того, какой обычно охватывается преподаванием в высших технических учебных заведениях. Тем не менее эти книги представляют элементарный курс интегрирования дифференциальных уравнений, знание которого, за исключением 2—3 глав, на мой взгляд, не только обязательно для работающего в области точных наук аспиранта ВТУЗа, но полезно было бы и для всякого инженера, окончившего как военный, так и гражданский ВТУЗ. Специально же для аспирантов и студентов математического отделения университетов к этим двум книгам надо было бы сделать некоторые дополнения, относящиеся к отдельным вопросам.

Некоторые мои результаты находятся в главах II, III, IV, VIII, IX, X и XII; №№ соответствующих параграфов указаны во вступлениях к каждой главе, где вкратце излагается содержание главы, даются некоторые методические указания и рекомендуется литература, главным образом для тех читателей, которые хотели бы углубиться в изучение предмета, рассматриваемого в соответствующей главе. Глава X почти целиком представляет краткое изложение моих исследований, относящихся к изучаемым в ней вопросам. Основные мои статьи для всех этих параграфов можно найти по указаниям литературы в каждой главе, кроме нескольких из последних параграфов главы X и кроме § 23 главы II и отчасти § 41 главы IV. Содержание этих 2 параграфов частично представляет изложение некоторых пунктов моего отчета Научно-исследовательскому институту математики и механики при Ленинградском Университете о работе в этом Институте в 1933 году.

При изложении рассматриваемого в этом курсе труднейшего и в то же время важнейшего из отделов математики, я пользовался, по мере возможности, указаниями и правилами великих учителей лучших математиков: Ньютона, говорившего о том, что „при изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила“; Эйлера, начинавшего, при изложении различных вопросов, с разбора простых частных случаев, чтобы на них наглядно выяснить сущность дела; Римана, снабжавшего свои прекрасные краткие лекции об уравнениях математической физики многочисленными примерами; акад. П. Л. Чебышева, настаивавшего на тесной связи теории с практикой. Я обращал особенное внимание на пояснение теории разнообразными как практическими, так и теоретическими примерами и задачами, встречаясь с которыми читатель, надеюсь, не ограничится только лишь беглым просмотром, а проделает их с карандашом в руках. Для задач не только уделено место в тексте, петитом, и в достаточном количестве в конце каждой главы, чтобы читателю совсем не пришлось прибегать к специальным задачникам, но выделены и целые параграфы, касающиеся применения теории в различных областях чистой и прикладной математики.

Дело применения теории на практике не всегда легко, и на это обстоятельство следует обратить должное внимание. Насколько трудно бывает даже подобрать соответствующий пример при рассмотрении не сложной порою теории, показывает хотя бы то, что для пояснения хорошо разработанной теории интегрирования системы 2 нелинейных уравнений с частными производными 1 го порядка одной неизвестной функции, один и тот же пример приведен почти во всех курсах: В. Г. Имшенецкого, М. А. Тихомандрицкого, В. А. Стеклова, Гурса, Форзайса; читатель найдет его в § 67 главы VIII.

В некоторых случаях, принимая во внимание небольшой объем этих книг, мне приходилось приводить только лишь схему доказательств различных положений и даже давать окончательные выводы без доказательств. В таких случаях читатель может найти в книге соответствующие литературные указания.

Уделяя достаточно внимания примерам, останавливаясь часто на рассмотрении различных частных случаев и стремясь в то же время к краткости курса и к ясности изложения, я далек был однако от мысли о том, чтобы следовать по пути авторов рекомендуемых у нас иногда руководств по математике для ВТУЗов—руководств, в которых можно найти полное пренебрежение общими идеями и, вследствие стремления быть как можно более понятным для мало подготовленного читателя, можно встретиться в некоторых случаях только с тем материалом, который известен был лет 200 тому назад и который далеко не достаточен для возможности применения математического анализа к решению задач современной техники.

В курсе я избегал „упрощенчества“ и заботился о том, чтобы читатель нашел в нем основные сведения о различных методах в теории дифференциальных уравнений и о главнейшей математической литературе до 1933 года включительно.

М. Куренский.

Ленинград, 18/V—31/VIII 1933.

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ОБ ИХ ИНТЕГРАЛАХ

В этой вступительной главе даны общие понятия об обыкновенных дифференциальных уравнениях и об уравнениях с частными производными; об интегралах общем, частном, полном и особенном для всех этих уравнений; рассказано о том, как получаются дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными в результате исключения произвольных элементов из конечных уравнений; как составляются дифференциальные уравнения в результате применения различных законов механики, физики, химии, инженерных и других прикладных наук; представлено доказательство существования интеграла для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка и приведена теорема о существовании интеграла для нормальной системы уравнений с частными производными 1-го порядка при нескольких неизвестных функциях; формулировано, наконец, положение о том, в чем состоит общая задача интегрирования дифференциальных уравнений, даны краткие указания на достигнутые в решении этой задачи успехи и на те трудности, с какими приходится иметь дело в этой задаче.

Хотя материал этой главы довольно широк и может вызвать в некоторых частях затруднения для его усвоения, однако знакомство с ним, по крайней мере беглое, необходимо перед тем, как приступать к самому интегрированию уравнений и к изучению этого наиболее важного и вместе с тем — наиболее трудного из всех отделов математики. Полезно заранее иметь представление о том материале, какой подлежит изучению в дальнейшем.

Более трудные места этой главы, например, §§ 5, 6 и 2-ю половину § 7, отметивши неясности при первом чтении книги, можно усвоить в дальнейшем, после изучения главы IV и даже—при повторном чтении книги. Полный пропуск отмеченных параграфов никаких затруднений для изучения материала до главы V не вызовет. Полезно будет решить хотя половину задач, помещенных в конце этой главы.

Литература:

Торнтон Фрай — Элементарный курс дифференциальных уравнений, ГТТИ. 1933, гл. I—III, V—VI (Перевод с английского, London, 1929). — как вступление в теорию диф. ур.

Д. М. Синцов — Елементарний курс інтегрування диференціяльних рівнань. ДВУ. Харків, 1930; вступ, разд. I—II, X, додатки I—III.

В. А Стеклов — Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва—Ленинград, 1927.

Д. М. Синцов — Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, Харьков, 1913.

E. L. Ince — Ordinary differential equations, London, 1927, Ch. I, III.

E. Goursat — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921, Ch. I.

M. Janet — Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (Mémor des Sc. Math.) Paris, 1927.

Ch. Riquier — Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1910.

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. В чистой и в прикладной математике, а также в технических науках, основывающихся на математике, чрезвычайно важную роль играет теория так называемых дифференциальных уравнений. Механика, физика, астрономия, электротехника, сопротивление материалов, теория упругости, аэродинамика, гидродинамика, балистика,—все эти науки требуют широкого применения, а следовательно — и глубокого знания этой теории от лиц, их изучающих. Многих задач, а еще вернее сказать — значительного большинства задач, которые поставлены перед нами только что отмеченными науками, мы не умеем решить, главным образом, вследствие того, что не знаем, как решить связанные с задачами дифференциальные уравнения. Уметь решать дифференциальные уравнения — дело весьма трудное, прежде всего уже потому, что наука сделала в этом направлении еще очень незначительные успехи: мы знаем, как подойти к решению и как его выполнить до конца, только для некоторых специальных, несложных отдельных типов дифференциальных уравнений. Хотя и существуют методы для приближенных решений дифференциальных уравнений, однако они разработаны достаточно хорошо и быстро приводят к ответу лишь для некоторых из этих уравнений.

Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, в котором содержится одна или несколько производных различных порядков от одной или нескольких неизвестных функций одного или больше независимых переменных. Так как производную от функции, например, одного независимого переменного мы можем представить в виде отношения двух дифференциалов, — дифференциала функции к дифференциалу аргумента, — то дифференциальное уравнение можно было бы определить еще как такое уравнение, которое связывает дифференциалы двух или большего числа переменных величин.

В дифференциальные уравнения, кроме производных и дифференциалов, могут входить еще: неизвестные функции, аргументы, от которых зависят эти функции, и различные постоянные величины, как в численном, так и в буквенном виде, когда на них можно смотреть и как на постоянные, и как на переменные параметры.

Примеры дифференциальных уравнений:

$$1)\ 3x^2\frac{dy}{dx} - axy^2 = 0;\quad 2)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$3)\ x + 3yy' + ay''' = y'';\quad 4)\ dy = 3xydx;\quad 5)\ d^2z + xzdx^2 + aydxdy = 0$$

$$6)\ f(x_1, x_2, x_3, a)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \varphi(x_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \psi(x_2, x_3)\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_3}$$

Если дифференциальное уравнение связано с одним только независимым переменным, тогда оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Самый высший порядок производной, какой содержится в заданном уравнении, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Так, например, уравнение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

содержащее производную только первого порядка, в каких угодно степенях, под знаком каких-угодно функций — логарифмической, тригонометрических и т. д., — есть обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Уравнение, например, такого вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка одной неизвестной функции y.

Зависимость

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0$$

дает нам пример обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка двух неизвестных функций: $y(x)$ и $z(x)$.

Уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = b$$

представляет собой *обыкновенное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка*; коэффициенты его $a_0, a_1, \ldots a_n, b$ могут быть как постоянными величинами, так и определенными заданными функциями независимого переменного x. Это уравнение перестает быть линейным, если его коэффициенты зависят не только от x, но и от неизвестной функции y.

Если в обыкновенных дифференциальных уравнениях содержится две или больше неизвестных функций, входящих в уравнение либо непосредственно, либо через производные, либо и тем и другим способом, — тогда задача решения таких уравнений будет *определенной задачей* в том случае, когда нам задана будет система стольких независимых между собою дифференциальных уравнений, сколько неизвестных функций содержится в этих уравнениях.

Например, система

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^3u}{dx^3}\right) = 0 \\ F_2\left(x, y, z, u, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2z}{dx^2}, \dfrac{du}{dx}\right) = 0 \\ F_3\left(\dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^4y}{dx^4}\right) = 0 \end{cases}$$

представляет собой систему 3 дифференциальных уравнений 4-го порядка с 3 неизвестными функциями y, z, u. Задача решения этих уравнений — задача вполне определенная.

Дифференциальные уравнения, зависящие больше чем от одного независимого переменного, не будут уже обыкновенными. Производные, содержащиеся в таких уравнениях, могут быть только частными производными. Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями с частными производными.* Наивысший порядок, который имеет одна или больше производных, содержащихся в одном дифференциальном уравнении или в системе уравнений, устанавливает *порядок* одного дифференциального уравнения с частными производными или системы таких уравнений.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, когда неизвестная функция y определяется одним дифференциальным уравнением 1-го или высшего порядка, 2 функции y, z определяются двумя обыкновенными уравнениями и т. д.; в дифференциальных уравнениях с частными производными одна неизвестная функция z может определяться одним или несколькими уравнениями с частными производными 1-го или высшего порядка; две неизвестные функции z, u могут определяться системой двух или большего числа уравнений, с частными производными 1-го или высшего порядка, и т. д.

Например, уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

представляет дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции z от двух аргументов x, y.

Далее,

$$\begin{cases} + x_2 \quad + \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} \\ x_1 x_2 + \dfrac{\partial z}{\partial x_3} \quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} \end{cases}$$

есть система 2 уравнений с частными производными 3-го порядка одной функции z 3 независимых переменных x_1, x_2, x_3.

Система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 x_2 \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \quad 3x_3 \dfrac{\partial z}{\partial x_3} = f(x_1) \\ f_1(x_1, \; _2) \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + f_2(x_3) \dfrac{\partial z}{\partial x_3} \quad x_1 + 2x_2 \quad x \end{cases}$$

представляет систему 2 линейных уравнений с частными производными 1-го порядка, определяющих одну неизвестную функцию z трех независимых переменных x_1, x_2, x_3

§ 2. Происхождение и составление дифференциальных уравнений. Можно отметить два пути для возникновения и составления дифференциальных уравнений: теоретический,—когда дифференциальные уравнения получаются в результате выполнения над математическими соотношениями формальных математических операций, включая и дифференцирование функций, и практический,—когда дифференциальные уравнения и системы уравнений появляются в итоге математической формулировки различных законов физики, механики, астрономии и разнообразных технических и инженерных наук, основывающихся на математике, таких, как, скажем, теория упругости, сопротивление материалов, электротехника, внешняя и внутренняя балистика и т. д.

Теория дифференциальных уравнений имеет в виду дать способы для решения дифференциальных уравнений и для описания тех процессов и тех явлений, которые характеризуются дифференциальными уравнениями, представляющими то или иное свойство явления в его математической записи. К изложению того, что понимают под решением дифференциальных уравнений, и к изучению основных методов для нахождения решений мы и перейдем в дальнейшем, полагая, что дифференциальные уравнения или их системы либо заданы, либо правильно составлены.

Путь возникновения дифференциальных уравнений в результате выполнения математических операций над заданными недифференциальными уравнениями, связывающими переменные зависимые y, z, ... и независимые x, x_1, x_2, ..., а также параметры a, b, c,..; C_1, C_2, ... — весьма прост и не нуждается в длинных пояснениях.

Возьмем, для примера, уравнение

$$f(x, y, c) = 0,$$

связывающее независимую переменную x, функцию этого переменного y и параметр c, являющийся произвольной величиной, которой можно давать любые численные значения. Такое уравнение представляет собою *семейство кривых линий* на плоскости; отдельная линия этого семейства получится тогда, когда мы для c выберем определенное численное значение. Продифференцировавши обе части нашего уравнения семейства кривых по x-у, получим уравнение

$$\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, c)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

которое, вообще говоря, также содержит параметр c или, как мы будем говорить в дальнейшем,—*произвольную постоянную* c. *Исключивши из 2 уравнений одну величину c,* будем иметь уравнение, связывающее независимую переменную x, ее функцию y и производную этой функции $\frac{dy}{dx}$, т. е. *получим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

характеризующее общее свойство *всего* семейства кривых $f(x, y, c) = 0$; будучи справедливым для любого численного значения c, не входящего в дифференциальное уравнение, оно справедливо и для отдельно взятой кривой, с определенным численным значением для параметра c.

Для пояснения можно было бы взять, скажем, семейство парабол

$$y^2 = 2px.$$

Давая параметру p определенные численные значения, будем иметь отдельные параболы из нашего семейства бесчисленного количества всех парабол, проходящих через начало координат, симметрично оси x-ов. Исключая произвольную постоянную p из 2 уравнений

$$y^2 = 2px; \quad y\frac{dy}{dx} = p$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x},$$

представляющее собой математическую формулировку того факта, что тангенс угла между осью x—ов и касательной в любой точке всякой параболы нашего семейства составляет $\frac{1}{2}$ отношения ординаты этой точки к ее абсциссе. Предшествующее уравнение есть дифференциальное уравнение всех парабол, проходящих через начало координат и симметричных оси x—ов.

Исключивши, для примера, из уравнения семейства плоскостей, проходящих через начало координат,

$$z = ax + by, \tag{1}$$

параметры a и b, после дифференцирования этого уравнения по x и y, получим дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка, характеризующее все эти поверхности:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения с частными производными получаются также в результате исключения не только произвольных постоянных с, но и произвольных функций одного или больше аргументов.

Например, в результате исключения произвольной функции от одного аргумента $u = \frac{x}{y}$ из заданного уравнения

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

и исключения произвольной функции $\frac{d\varphi}{du}$ получаемой в результате дифференцирования по x и по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(u) - x\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{1}{x},$$

придем к знакомому уже нам дифференциальному уравнению с частными производными 1-го порядка (2). Выходит, что наше уравнение с частными производными (2) является дифференциальным уравнением не только всего семейства плоскостей (1), проходящих через начало координат, но и всех поверхностей (3), где φ обозначает любое выражение из отношения $\frac{y}{x}$ например:

$$z = x\left[1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\sqrt{\frac{y}{x}}\right]; \quad z = x\left[\sin\frac{y}{x} + C_1\frac{y}{x} + C_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + C_3\right].$$

Взявши, допустим, для функции $\varphi(u)$ выражение по формуле:

$$z = x\left(a\frac{x}{x} + b\frac{y}{x}\right),$$

по сокращении на x, будем иметь уравнение семейства наших плоскостей (1), как отдельный частный случай поверхностей (3), или иначе— как один из простых типов бесчисленного множества поверхностей (3).

Откладывая некоторые подробности, относящиеся к этому первому способу образования дифференциальных уравнений до следующих 3 параграфов, перейдем ко 2-му, более трудному и более существенному для практики способу образования дифференциальных уравнений.

Этот второй способ является результатом применения математики к изучению различных явлений реальной действительности, представляет результат математической формулировки тех процессов и тех общих свойств различных явлений природы, которые устанавливаются механикой, физикой, химией и разнообразными инженерными науками. Эти науки доставляют нам в изобилии всевозможные научные законы, относящиеся к непрестанным изменениям материи, к ее движениям в пространстве с течением времени.

Составить правильно одно уравнение или систему дифференциальных уравнений, характеризующих движение вещества в данном процессе — это значит верно записать математическими символами те законы механики, физики, химии и т. д., которые определяют соответствующий процесс при тех гипотезах, тех основных предположениях, на которых основывается наука в современном ее состоянии. Решить дифференциальное уравнение или систему уравнений, определяющих тот или иной процесс движения вещества, — это, как увидим дальше, указать те конкретные пути, те линии, те поверхности, по каким будет происходить движение с течением времени; предсказать, как будет происходить явление в заранее указанный момент времени; указать точно, где будет, например, движущаяся точка через известный промежуток времени, что с нею происходило до этого времени и что произойдет в дальнейшем в смысле ее продвижения вперед.

Первым, теоретическим способом для образования дифференциальных уравнений мы будем пользоваться для проверки решений, получаемых нами в результате применения различных методов теории дифференциальных уравнений. Второй же способ, как видим, требует и знаний механики, физики и различных прикладных математических наук, и умения применять эти знания на практике.

Дадим несколько иллюстраций этого 2-го способа составления дифференциальных уравнений.

I. Рассматривая *движение маятника,* отклоненного на острый угол φ и опущенного, вспомним из физики, что угловое ускорение $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ прямо пропорционально угловому смещению, но обратно по направлению. Обозначая постоянный коэффициент пропорциональности через α^2, так что α^2 представляет собой число положительное, и не принимая во внимание для так называемого математического маятника трения опоры и сопротивления воздуха, получим такое дифференциальное уравнение движения маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\alpha^2\varphi.$$

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, как увидим впоследствии, дают нам такую зависимость между углом φ и временем t:

$$\varphi = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t,$$

где C_1 и C_2 — это произвольные постоянные, определяемые из так называемых начальных условий, которые можно задать в различном виде. Например, если в начальный момент, для $t = 0$, будет $\varphi = \varphi_0$, т. е. задан будет угол φ_0, на который отведен был маятник от отвесного положения в начале его качания, когда угловая скорость равнялась нулю, т. е. когда для $t = 0$ было и $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, то эти 2 условия, называемые *начальными условиями,*

1) для $t = 0$ было $\varphi = \varphi_0$,

2) для $t = 0$ было $\frac{d\varphi}{dt} = 0$,

дают:

$$\varphi = C_1 \quad 1 \quad \varphi_0; \quad \frac{d\varphi}{dt} = C_2 \cdot \alpha \quad 1 = 0,$$

$$C_1 = \varphi_0, \; C_2 = 0,$$

что приводит к ответу на задачу о движении маятника: изменение угла φ будет такой периодической функцией от t, характерной для повторяющегося процесса качания:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \alpha t.$$

II. *Ход химической реакции для двух простых веществ* подчиняется закону химии, согласно которому скорость превращения простых веществ в соединение пропорциональна произведению количеств еще не соединившихся веществ. Обозначая через x количество молекул соединения за время t, через $\frac{dx}{dt}$ — скорость образования вещества, через a и b — числа молекул 1-го и 2-го вещества до соединения, а через α и β — количества молекул 1-го и 2-го вещества в одной молекуле соединения и, наконец, через k — коэффициент пропорциональности, — получим такое дифференциальное равнение, характеризующее ход химической реакции для двух веществ:

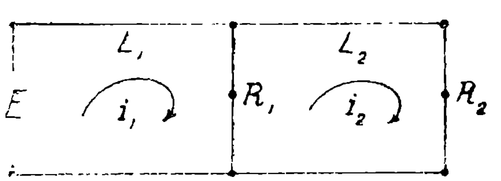
$$\frac{dx}{dt} = k(a - \alpha x)(b - \beta x).$$

III. Из механики известно, что произведение массы m тела на проекцию ускорения, равную 2-й производной от проекции пути по времени t, равно сумме проекций сил, действующих на движущееся тело. Рассматривая *движение центра тяжести снаряда в плоскости стрельбы XOY* и учитывая горизонтальную и вертикальную проекции суммы сил, действующих на снаряд, т. е. силу тяжести снаряда mg и силу сопротивления воздуха $mJ = mcH(y)F(v)$, где m — масса снаряда, c — постоянная величина, носящая название балистического коэффициента снаряда, $H(y)$ и $F(v)$ — особые функции, зависящие — одна — от высоты y снаряда над плоскостью земли, и другая — от скорости v снаряда во время полета, — будем иметь систему, после сокращении на m, таких двух дифференциальных уравнений движения центра тяжести снаряда:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -J\cos\theta; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -J\sin\theta - g.$$

Здесь $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$ обозначают соответственно горизонтальную и вертикальную проекции ускорения движения центра тяжести, а θ — угол между направлением касательной к траектории полета в ее точке $M(x, y)$ с осью x-ов. Знаки минус взяты в правых частях на том основании, что ускорение J силы сопротивления воздуха mJ направлено по касательной в сторону, противоположную направлению скорости v центра тяжести снаряда, а ускорение g силы тяжести mg направлено вертикально вниз, противоположно направлению оси y-ов. Начальные условия, которые надо принимать во внимание для решения уравнений движения в этой основной задаче внешней балистики таковы: в начале движения, при вылете снаряда из дула орудия, т. е. для $t = 0$, будет $x = 0$, $y = 0$, $v = v_0$, $\theta = \theta_0$, где v_0 — начальная скорость, с какой снаряд покидает орудие под действием пороховых газов, а θ_0 — угол бросания снаряда при выстреле.

IV. *Течение электрического тока в сети*, образованной 2 прямоугольниками, соединенными друг с другом в вершинах, определяется такими 5 законами электротехники: 1) количество электричества, втекающего в точку разветвления сети внутри этой сети равняется количеству вытекающего электричества; 2) алгебраическая сумма всех электродвижущих сил для отдельного замкнутого прямоугольника равна нулю; 3) электродвижущая сила в элементе проводника с сопротивлением R равна произведению R на силу тока i для этого элемента; 4) электродвижущая сила в элементе емкости C равна отношению заряда конденсатора и емкости C; 5) электродвижущая сила для элемента самоиндукции L равна произведению L на скорость изменения тока. Принимая во внимание эти законы и обозначая через i_1, R_1, L_1 соответственно величины силы тока, сопротивления и самоиндукции для того 1-го прямоугольника, в стороне которого включен генератор с электродвижущей силой E, дающей ток для сети, а через i_2, R_2, L_2 — те же величины для 2-го прямоугольника, — можно получить систему таких 2 дифференциальных уравнений, определяющих силы тока i_1 и i_2 как неизвестные функции времени t:



$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1(i_1 - i_2) + E = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} - R_1(i_1 - i_2) + R_2 i_2 = 0. \end{cases}$$