Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 10

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.Н. Бончковский

Р11 Математическое просвещение. Выпуск 10 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 74 с.

ISBN 978-5-458-27045-8

В сборниках помещены задачи и решения, а также указатель математической литературы

ISBN 978-5-458-27045-8

О ТРЕУГОЛЬНИКЕ МИНИМАЛЬНОГО ПЕРИМЕТРА, ВПИСАННОМ В ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Н. А. Извольский (Москва — Ярославль)

В недавно вышедшей в русском переводе книге Г. Радемахера и О. Теплица „Числа и фигуры“ имеются два доказательства (одно из них проф. Г. Шварца, другое — Л. Фейера) того, что **таким треугольником служит тот, вершины которого суть основания высот данного**. Мы будем в дальнейшем называть этот треугольник **ортоцентрическим** по отношению к данному.

Целью настоящей работы является: 1) дать новое, с моей точки зрения более простое, доказательство этого положения и 2) попутно дать ряд интересных соотношений для ортоцентрического и данного треугольников.

Замечу, что во время работы над этими вопросами я не имел еще 7-го выпуска „Математического просвещения“, где напечатана работа С. И. Зетеля, посвященная также ортоцентрическому треугольнику. Оказалось, что некоторые результаты, полученные мною, совпадают с тем, что дано в работе С. И. Зетеля, но: 1) методы их получения иные и 2) С. И. Зетель не разбирает основного вопроса, вопроса о периметрах вписанных треугольников.

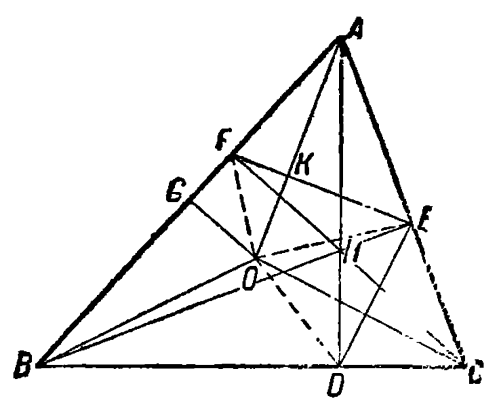
Известна теорема Нагеля: *прямая, соединяющая основания двух высот треугольника, перпендикулярна к радиусу описанного около треугольника круга, идущему в третью вершину*.

Вот ее доказательство.

Пусть AD, BE и CF (фиг. 1) — высоты треугольника ABC, точка O — центр описанного круга; надо доказать, что, например, $EF \perp OA$.

Соединим O с A и с B и построим $OG \perp AB$. Тогда $\angle AOB$ будет центральным для круга O, а $\angle C$ — вписанным, опирающимся на ту же дугу. Следовательно,

$$\angle AOG = \angle C.$$



Фиг. 1.

Далее имеем:

$$\angle AOG + \angle GAO = \frac{\pi}{2};$$

$$\angle C + \angle DAC = \frac{\pi}{2},$$

откуда получаем, что $\angle GAO = \angle DAC$, т. е. прямые AO и AH (точка H есть точка пересечения высот или ортоцентр треугольника ABC) равно наклонены к сторонам треугольника. Отсюда еще вытекает:

$$\angle GAD = \angle OAC.$$

Пусть K есть точка пересечения прямых OA и EF. Тогда в силу равенств $\angle KAE = \angle BAD$ и $\angle KEA = \angle B$ (это потому что точки B, C, E и F лежат на одном круге) следует, что и третьи углы треугольников KAE и BAD равны, т. е. $\angle AKE = \angle ADB = \frac{\pi}{2}$, или $OA \perp EF$.

Ясно. что это справедливо и для тупоугольного треугольника.

Соединив точки D, E и F, получим треугольник DEF, ортоцентрический для данного треугольника ABC, который считаем остроугольным.

Условимся в обозначениях.

Стороны и углы данного треугольника ABC будем, как обычно, обозначать через a, b, c, A, B и C; его периметр через $2p$, площадь через Δ и радиус описанного круга через R; стороны EF, FD и DE ортоцентрического треугольника DEF соответственно через a_1 b_1 и c_1; его периметр через $2p_1$.

Соединим точку O с D, E и F. Мы легко видим, что

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } OEAF + \text{пл. } OFBD + \text{пл. } ODCE.$$

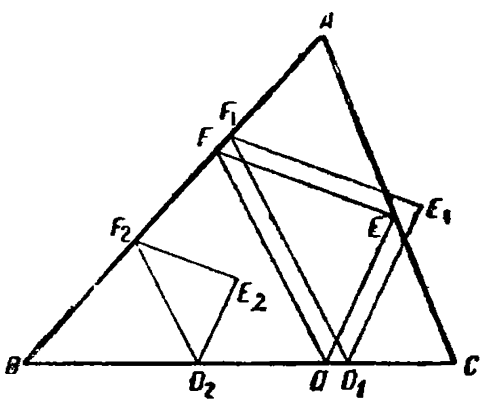
Далее получаем:

$$\text{пл. } OEAF = \text{пл. } OEA + \text{пл. } OAF = \frac{EF \cdot R}{2};$$

также

$$\text{пл. } OFBD = \frac{FD \cdot R}{2} \text{ и пл. } ODCE = \frac{DE \cdot R}{2}.$$

Подставив это в найденное выше равенство, получим:



Фиг. 2.

$$\Delta = \frac{EF \cdot R}{2} + \frac{FD \cdot R}{2} + \frac{DE \cdot R}{2}.$$

Отсюда согласно приведенному выше обозначению получаем:

$$2p_1 = \frac{2\Delta}{R}. \qquad (1)$$

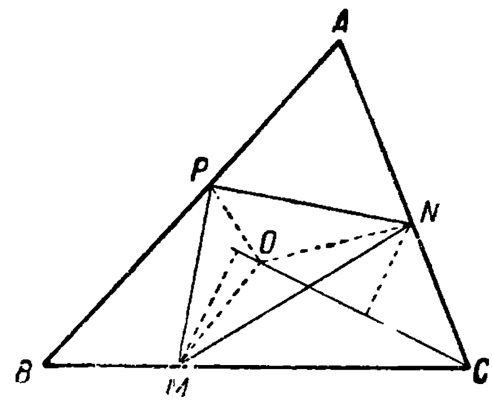
Таким образом имеем: **периметр ортоцентрического треугольника равен удвоенной площади данного, разделенной на радиус описанного круга.**

Перейдем теперь к любому не ортоцентрическому треугольнику, вписанному в данный остроугольный треугольник ABC. Ясно, что по крайней мере одна из сторон такого треугольника не перпендикулярна к радиусу описанного около ABC круга, идущему в соответствующую вершину треугольника ABC. Это ясно на фиг. 2: если стороны треугольника $D_1E_1F_1$ или треугольника $D_2E_2F_2$ все три параллельны сторонам ортоцентрического треугольника DEF, то одна из вершин, E_1 или E_2, должна лежать или вне, или внутри треугольника ABC.

Итак, у всякого не ортоцентрического треугольника, вписанного в данный остроугольный, по крайней мере одна из сторон не параллельна соответствующей стороне ортоцентрического треугольника, а следовательно, и не перпендикулярна к соответствующему радиусу описанного круга.

Пусть теперь $\triangle MNP$ (фиг. 3) есть не ортоцентрический вписанный в данный остроугольный $\triangle ABC$ и пусть его сторона MN не перпендикулярна к радиусу OC описанного круга. Тогда попрежнему имеем:

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } ONAP + \text{пл. } OPBM + \text{пл. } OMCN.$$



Фиг. 3.

Так как MN не перпендикулярна к OC, то сумма высот треугольников OMC и OCN, если их общую сторону OC принять за основание, меньше отрезка MN. Поэтому пл. $OMCN < \frac{MN \cdot R}{2}$. Что касается площадей $ONAP$ и $OPBM$, то они могут быть или также соответственно меньше $\frac{NP \cdot R}{2}$ и $\frac{PM \cdot R}{2}$, или равны этим выражениям. Во всяком случае из предыдущего имеем:

$$\Delta < \frac{NP \cdot R}{2} + \frac{PM \cdot R}{2} + \frac{MN \cdot R}{2},$$

или

$$2\Delta < 2p_2 R,$$

где $2p_2 = NP + PM + MN$. Отсюда получаем:

$$2p_2 > \frac{2\Delta}{R}.$$

Это неравенство, если его сравнить с равенством (1), дает

$$2p_2 > 2p_1,$$

т. е. периметр ортоцентрического к $\triangle ABC$ треугольника меньше периметра всякого другого вписанного в $\triangle ABC$ треугольника.

Перейдем теперь к другим выражениям для периметра ортоцентрического треугольника. Можно было бы их получить из равенства (1), но, думается, интереснее воспользоваться иным методом.

Из полученных нами ранее равенств $\angle FAK = \angle DAC$, $\angle FAH = \angle KAC$ (фиг. 1) и из того, что $OA \perp EF$, следует, что $\triangle AKF \backsim \triangle ADC$ и $\triangle AKE \backsim \triangle ADB$. Отсюда имеем:

$$\frac{FK}{DC} = \frac{AF}{AC} \quad \text{и} \quad \frac{KE}{BD} = \frac{AE}{AB}.$$

Следовательно,

$$FE = \frac{AF \cdot DC}{AC} + \frac{AE \cdot BD}{AB}.$$

Четырехугольники $AFDC$ и $AEDB$ — вписываемые; поэтому к ним применима теорема Птолемея, и мы имеем:

$$AF \cdot DC = AD \cdot CF - AC \cdot FD,$$
$$AE \cdot BD = AD \cdot BE - AB \cdot DE.$$

Подставив это в предыдущее равенство, получим:

$$FE = \frac{AD \cdot CF}{AC} - FD + \frac{AD \cdot BE}{AB} - DE.$$

Отсюда, полагая $AD = h_1$, $BE = h_2$ и $CF = h_3$, получаем:

$$2p_1 = \frac{h_1h_3}{b} + \frac{h_1h_2}{c}. \qquad (2)$$

Если числитель и знаменатель первой дроби умножим на h_2, а второй дроби на h_3, то, так как $bh_2 = ch_3 = 2\Delta$, получим:

$$2p_1 = \frac{h_1h_2h_3}{\Delta}. \qquad (3)$$

Из равенства (2) еще получим:

$$2p_1 = \frac{h_1h_3c + h_1h_2b}{bc} = \frac{h_1 \cdot 4\Delta}{bc} = \frac{4\Delta h_1 \sin A}{2\Delta} = 2h_1 \sin A$$

(так как $bc \sin A = 2\Delta$). Аналогично имеем:

$$2p_1 = 2h_1 \sin A = 2h_2 \sin B = 2h_3 \sin C. \qquad (4)$$

Из равенства (1) имеем:

$$2\Delta = 2p_1R.$$

Пусть $2p$ есть периметр треугольника ABC и r — радиус круга, вписанного в треугольник ABC. Тогда

$$2\Delta = 2pr.$$

Сопоставляя эти равенства, имеем:

$$\frac{2p_1}{2p} = \frac{r}{R},$$

т. е. отношение периметров ортоцентрического и данного треугольников равно отношению радиусов кругов: вписанного в данный треугольник и описанного около него.

Мы выше получили $\angle AEK = \angle B$; также $\angle DEC = \angle B$. Следовательно, $\angle DEF = \pi - 2B$; также $\angle FDE = \pi - 2A$ и $\angle DFE = \pi - 2C$.

Известно, что основания высот D, E и F расположены на круге девяти точек, радиус которого равен $\frac{R}{2}$ [1]).

[1]) См., например, Б. Делоне и О. Житомирский, Задачник по геометрии, задача № 68. (*Прим. ред.*)

Поэтому

$$\frac{EF}{\sin FDE}=\frac{FD}{\sin DEF}=\frac{DE}{\sin EFD}=R,$$

или

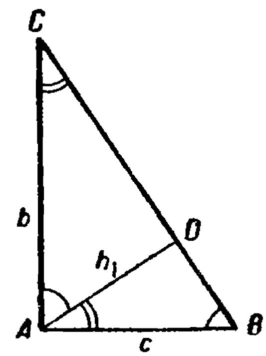
$$\frac{a_1}{\sin 2A}=\frac{b_1}{\sin 2B}=\frac{c_1}{\sin 2C}=R. \qquad (5)$$

Отсюда получим:

$$2p_1=a_1+b_1+c_1=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4R\sin A\sin B\sin C.$$

Для основного треугольника ABC имеем:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



Фиг. 4.

Сопоставляя это с (5), легко получим:

$$a_1=a\cos A;\quad b_1=b\cos B;\quad c_1=c\cos C,$$

и отсюда

$$2p_1=a\cos A+b\cos B+c\cos C.$$

Если угол A стремится, увеличиваясь, к прямому углу, то в пределе получаем: $\angle A=\frac{\pi}{2}$, $\cos A=0$, $a_1=0$ и $2p_1=b\cos B+c\cos C$ или $2p_1=2h_1$, так как, как то видно на фиг. 4, $h_1=b\cos B=c\cos C$. Впрочем, это ясно и непосредственно: в этом случае точки E и F сливаются с точкою A и периметр ортоцентрического треугольника делается равным удвоенной высоте, опущенной из вершины прямого угла.

Замечу в заключение, что попытка видоизменить постановку вопроса о вписанном треугольнике с минимальным периметром так, чтобы возможно было применить его и к тупоугольному треугольнику, не увенчалась успехом. Даю один небезынтересный результат.

Пусть угол A в треугольнике ABC — тупой (фиг. 5) и точка O — центр описанного круга. Построим ортоцентрический треугольник DEF и прямые OD OE и OF. Тогда увидим:

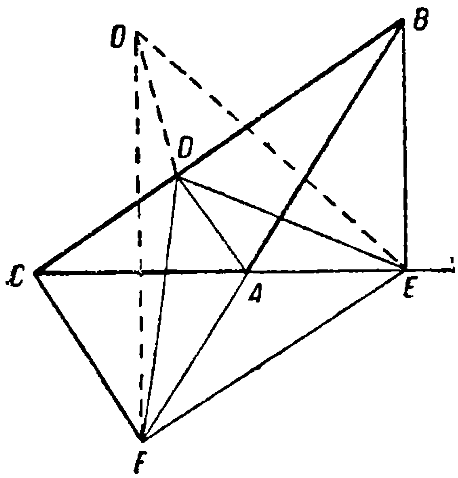
$$\text{пл. } ABC=\text{пл. } OFBDO+\text{пл. } ODCEO-\text{пл. } OFAEO.$$

(Здесь, при обходе каждой площади согласно порядку букв, рассматриваемая площадь остается слева и считается положительною; можно предыдущее равенство записать и так:

$$\text{пл. } ABC=\text{пл. } OFBDO+\text{пл. } ODCEO+\text{пл. } OEAFO;$$

здесь площадь $OEAFO$ при обходе ее в порядке букв остается справа, и ее надо считать отрицательной.

Так как согласно теореме Нагеля $FD \perp OB$, то имеем:



Фиг. 5.

$$\text{пл. } OFBDO = \text{пл. } OFDO + \text{пл } FBDF = \frac{FD \cdot OB}{2} = \frac{FD \cdot R}{2}$$

(если FD принять за общее основание треугольников OFD и BDF, то сумма высот равна $OB = R$).

Также

$$\text{пл. } ODCEO = \frac{DE \cdot OC}{2} = \frac{DE \cdot R}{2},$$

$$\text{пл. } OFAEO = \frac{FE \cdot OA}{2} = \frac{FE \cdot R}{2},$$

и мы имеем:

$$\varDelta = \frac{FD \cdot R}{2} + \frac{DE \cdot R}{2} - \frac{FE \cdot R}{2} = (b_1 + c_1 - a_1)\frac{R}{2}.$$

Тогда равенство (1) переходит в

$$b_1 + c_1 - a_1 = \frac{2\varDelta}{R}.$$

ЦИРКУЛЬНАЯ НОМОГРАММА КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ДЕКАРТОВОЙ СЕТКЕ

П. П. Андреев (Москва)

В качестве одного из приемов, которыми приходится пользоваться при номографировании той или иной формулы, служит преобразование этой формулы к такому виду, чтобы ей соответствовал определенный геометрический образ, легко осуществляемый построением. Так, например, решив квадратное уравнение

$$x^2 + px - q = 0$$

и получив его корни

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}, \tag{1}$$

в основу построения номограммы можно положить геометрическое построение корней квадратного уравнения. В результате получится циркульная номограмма квадратного уравнения проф. Н. М. Герсеванова, полученная им как частный случай номограммы из равноудаленных точек [1]).

Можно построить в высшей степени простую циркульную

---

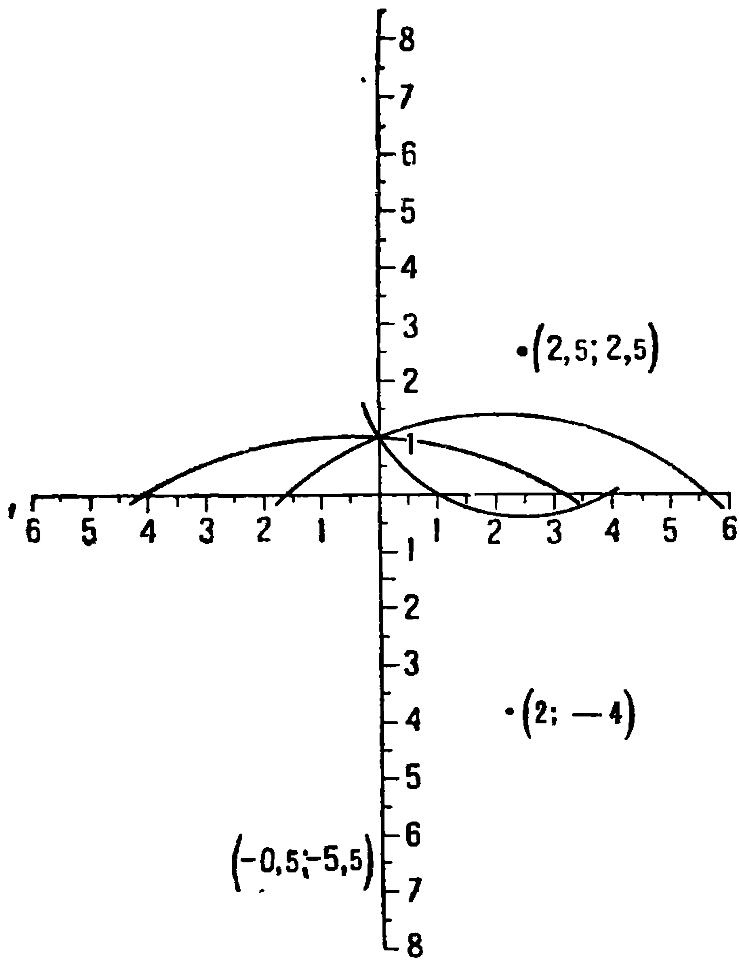
[1]) Проф. Н. М. Герсеванов, Основы номографии, ГТТИ, 1932. Построение номограммы квадратного уравнения на основе геометрического построения его корней можно найти в „Номографии для школьника“ проф. А. А. Глаголева, ОНТИ, 1935.

номограмму для решения квадратного уравнения, если рассматривать квадратное уравнение вида

$$x^2 - px + q = 0$$

как результат совместного решения уравнения окружности

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(y-\frac{q+1}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \qquad (2)$$



Фиг. 1.

и уравнения оси OX, т. е.

$$y = 0. \qquad (3)$$

В самом деле, сделаем в уравнении $x^2 - px + q = 0$ последовательно следующие преобразования:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+q=\frac{p^2}{4},$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{q^2}{4}+\frac{q}{2}+\frac{1}{4}=\frac{p^2}{4}+\frac{q^2}{4}-\frac{q}{2}+\frac{1}{4},$$

далее

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}-\frac{1}{2}\right)^2,$$

или

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(0-\frac{q+1}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{2}-1\right)^2,$$

и окончательно

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(0-\frac{q+1}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}-0\right)^2+\left(\frac{q+1}{2}-1\right)^2. \qquad (4)$$

Левая часть уравнения (4) есть результат подстановки в левую часть уравнения окружности (2) значения y из уравнения (3); правая часть есть квадрат расстояния между двумя точками $A\left(\frac{p}{2};\ \frac{q+1}{2}\right)$ и $B\,(0;\,1)$.

Уравнение (3) является результатом совместного решения уравнения окружности с центром в точке $\left(\frac{p}{2};\ \frac{q+1}{2}\right)$ и радиусом, равным расстоянию между точками A и B, и уравнения $y=0$. Следовательно, значения x, получаемые из уравнения (3), — абсциссы точек пересечения указанной окружности с осью OX.

Из сказанного очевидно, что номограммой для решения квадратного уравнения может служить обыкновенная декартова сетка. Достаточно поставить ножку циркуля в точку $\left(\frac{p}{2},\ \frac{q+1}{2}\right)$, если уравнение имеет вид x^2-px+q 0, и радиусом от этой точки до точки (0; 1) сделать на оси OX две засечки. Пометки точек, через которые пройдут засечки, и будут корнями данного квадратного уравнения.

На чертеже (фиг. 1) даны решения уравнений: $x^2-5x+4=0$ [центр окружности (2,5; 2,5); окружность пересекает ось OX в точках с пометками 4 и 1]; $x^2+x-12=0$ [центр окружности (—0,5; — 5 5); окружность пересекает ось OX в точках с пометками — 4 и 3]; $x^2-4x-9=0$ [центр окружности (2; —4); окружность пересекает ось OX в точках с пометками 5,6 и —1,6].

КВАДРАТ ЭЙЛЕРА

А. Я. Граусман (Москва)

Среди обширного математического наследства, оставленного Леонардом Эйлером, имеются задачи, поставленные и решенные великим математиком, но сообщенные им без указания на методы, при помощи которых были найдены их формулировки и решения. К числу их принадлежит следующая задача.

В каждую из 16 ячеек представленного на фиг. 1 квадрата требуется поставить различные целые числа A, B, C, D и т. д., удовлетворяющие следующим условиям:

1. Сумма квадратов чисел, взятых по любой горизонтальной или любой вертикальной строчке, а также по диагоналям квадрата, составляет одно и то же число (условие равенства сумм квадратов).

2. Если взять любую пару горизонтальных строк или любую пару вертикальных, то сумма произведений чисел одной строчки на соответствующие числа другой (например $AI + BK + CL + DM$ или $BC + FG + KL + OP$) равняется нулю (условие ортогональности).

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

Фиг. 1.

Несомненно, обладая общим решением этой задачи, Эйлер нигде в своих трудах его не дал и ограничился лишь сообщением одного частного решения в виде следующего квадрата:

+68	−29	+41	−37
−17	+31	+79	+32
+59	+28	−23	+61
−11	−77	+ 8	+49

Лежандр в своей „Теории чисел" считает эту задачу настолько трудной, что все надежды на ее разрешение возлагает на возможность найти какие-либо указания в неопубликованных бумагах Эйлера. В наше время решение задачи Эйлера дал Адольф Гурвиц, посвятив ей заключительную (12-ю) лекцию по теории кватернионов [1].

Решение, данное Гурвицем, сложно и не совсем полно. Кроме того, базируясь на теории кватернионов, оно не может претендовать на идентичность с методом, которым мог оперировать Эйлер.

Вместе с тем несомненно, что эйлерово решение должно находиться в связи с его знаменитым тождеством

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + \\ + (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)^2 + (a_1b_3 + a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2)^2 + \\ + (a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1)^2.$$

Приступая к изложению весьма простого метода, с помощью которого легко решается задача Эйлера, покажем прежде всего, как на основе элементарных геометрических представлений может быть получено указанное тождество.

Пусть некоторое число

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

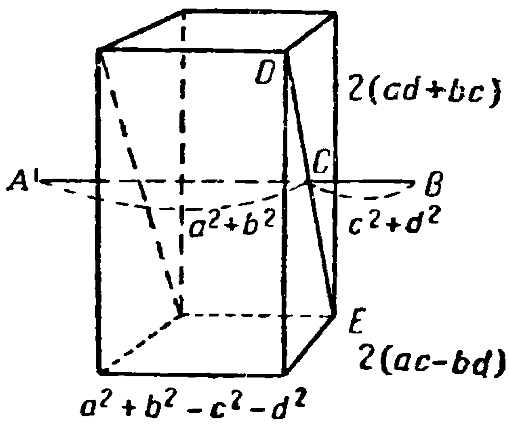
Вообразим сферу с диаметром p и проведем перпендикулярно диаметру (AB на фиг. 2) секущую плоскость через точку C, делящую AB на части

$$AC = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad BC = c^2 + d^2.$$

[1]) Adolf Hurwitz, Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen, Berlin 1919.

Плоскость рассечет сферу по кругу, диаметр которого

$$ED = 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{[2(ac \mp bd)]^2 + [2(ad \pm bc)]^2}.$$



Фиг. 2.

Таким образом в сферу диаметра p могут быть вписаны целочисленные прямоугольные параллелепипеды с ребрами

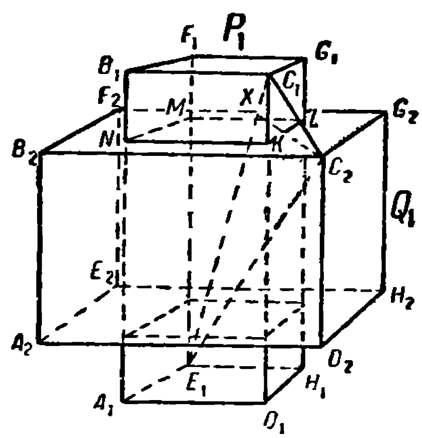
$$a^2+b^2-c^2-d^2;\ 2(ac \mp bd);$$
$$2(ad \pm bc).$$

Пусть теперь $m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ и $n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$.

Вообразим сферу с диаметром mn и впишем в нее параллелепипеды P_1 и Q_1 (фиг. 3), у которых ребра соответственно равны:

$$\left.\begin{array}{r}(a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2)\,n\\ 2(a_1a_3-a_2a_4)\,n\\ 2(a_1a_4+a_2a_3)\,n\end{array}\right\}\text{ для } P_1;\qquad \left.\begin{array}{r}(b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2)\,m\\ 2(b_1b_3-b_2b_4)\,m\\ 2(b_1b_4+b_2b_3)\,m\end{array}\right\}\text{ для } Q_1;$$

и грани соответственно параллельны.



Фиг. 3.

Можно показать, что при этом всякое сечение какой-либо диагонали одного из параллелепипедов (например P_1) плоскостью, перпендикулярной к этой диагонали и проходящей через какую-либо вершину другого параллелепипеда, делит взятую диагональ на две части, представляющие собою сумму двух квадратов, входящих в правую часть эйлерова тождества.

Так, например, перпендикуляр C_2X, опущенный из вершины C_2 параллелепипеда Q_1 на диагональ C_1E_1 параллелепипеда P_1, делит эту последнюю в точке пересечения X на части [1]):

$$C_1X = (a_1b_3 + a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2)^2 + (a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1)^2,$$
$$EX = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_1)^2.$$

---

[1]) Чтобы получить, например, первую из нижеследующих формул, достаточно заметить, что C_1C_2 есть диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого служат полуразности ребер двух ранее построенных параллелепипедов. Следовательно,

$$4C_1C_2^2 = [(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)\,n - (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2)\,m]^2 +$$
$$+ 4[(a_1a_3 - a_2a_4)\,n - (b_1b_3 - b_2b_4)\,m]^2 + 4[(a_1a_4 + a_2a_3)\,n - (b_1b_4 + b_2b_3)\,m]^2.$$

Внеся это выражение в равенство $C_1X = \dfrac{C_1C_2^2}{mn}$, после надлежащих преобразований получим искомое равенство. (*Прим. ред.*)