Нет автора

Математический анализ и геометрия

Избранные труды семинара Н. Бурбаки

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н57

Нет автора
Н57 Математический анализ и геометрия: Избранные труды семинара Н. Бурбаки / Нет автора – М.: Книга по Требованию, 2021. – 246 с.

ISBN 978-5-458-31414-5

Николя Бурбаки (фр. Nicolas Bourbaki) — коллективный псевдоним группы французских математиков (позднее в нее вошли несколько иностранцев), созданной в 1935 году.Целью группы являлось написание серии книг, отражающих современное состояние математики. Книги Бурбаки написаны в строгой аксиоматической манере и имеют целью дать замкнутое изложение математики на основе теории множеств Цермело-Френкеля (в доработке Бернайса и Гёделя). На группу огромное влияние оказала немецкая математическая школа — Д.Гильберт, Г.Вейль, Дж. фон Нейман и особенно алгебраисты Э. Нётер, Э.Артин и Б.Л. ван дер Варден.Имея целью создать полностью самодостаточную интерпретацию математики, основанную на теории множеств, группа публикует трактат Éléments de mathématique («Элементы математики » или, более точно, «Начала математики»). Трактат состоит из двух частей. Первая часть носит название Les structures fondamentales de l'analyse.

ISBN 978-5-458-31414-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Настоящая книга — сборник переводов избранных докладов, прочитанных на знаменитом семинаре Бурбаки в Париже в 1983—1987 гг. Сборник включает доклады по математическому аналнзу и геометрии и дополняет вышедший в издательстве «Мир» в 1987 г. сборник переводов докладов, посвященных алгебре и теории чисел («Алгебра и теория чисел с приложениями»).

Научный уровень статей, как обычно, в семинаре Бурбаки очень высокий, а кроме того, эти статьи выделяются высоким качеством изложения, при котором наибольшее внимание уделяется основным идеям, а не техническим деталям. В этом смысле семинар Бурбаки по своему стилю противоположен известному трактату того же автора по элементам математики. Темы статей отражают наиболее актуальные, быстро развивающиеся области анализа и геометрии и дают ясное представление о последних достижениях в этих областях. Среди докладов, включенных в сборник, — доклад Хитчина об уравнениях Янга — Миллса и топологии, доклад Аньара о неравенствах Морса по Виттену, доклад Конна — алгебры Гекке и узлы — о построении Джонсом новых инвариантов узлов, доклад Бовилля — проблема Шотки и гипотеза Новикова — о приложении теории нелинейных дифференциальных уравнений к проблеме описания модулей римановых поверхностей. В докладе Картье обсуждаются связи поставленного в третьей проблеме Гильберта вопроса о равносоставленности многогранников с современными проблемами арифметики и алгебраической K-теории.

К сожалению, ограниченность объема сборника не позволила редактору включить в него все интересные доклады, прочитанные на семинаре Бурбаки. К радости советских математиков, издательство «Мир» планирует публикацию переводов всех докладов семинара Бурбаки, начиная с прочитанных в 1988—1989 учебном году.

При подготовке русского издания были сделаны отдельные примечания и пополнены списки литературы. В этом нам помогли А. А. Воронов, Б. А. Дубровин и А. В. Пажитнов, которым мы выражаем благодарность.

Сборник будет интересен как студентам, так и специалистам-математикам, а также механикам и физикам-теоретикам, использующим анализ и геометрию.

22 октября 1989 г. *А. Н. Варченко*

ИНДЕКСЫ ПОДФАКТОРОВ, АЛГЕБРЫ ГЕККЕ И ТЕОРИЯ УЗЛОВ (по Вогану Джонсу)[1]

А. Конн

ВВЕДЕНИЕ

В. Джонс начал с решения следующей невзрачной на вид задачи: найти подмножество Σ в $\mathbb{R}_+$, образованное значениями индекса $[M:N]$ подфактора N в факторе M типа II_1. Он показал, что

$$\Sigma=\left\{4\cos^2\frac{\pi}{n};\quad n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\right\}\cup[4,\ +\infty].$$

Можно заметить, что в его доказательстве естественно появляется возрастающая последовательность $\mathscr{H}_m(q)$, $m\in\mathbb{N}$, алгебр Гекке, ассоциированных с системами Кокстера симметрических групп и с переменной $q\in\mathbb{C}$. Далее он выводит отсюда доказательство существования замечательного следа на $\mathscr{H}_\infty(q)=\bigcup\limits_m \mathscr{H}_m(q)$. Скомбинировав эти следы с описанием узлов в $\mathbb{R}^3$ на основе группы кос B_n, принадлежащим Артину, Александеру и Маркову, он получает новый полиномиальный инвариант для узлов [21]. Затем этот инвариант был обобщен Фрейдом, Иеттером, Хостом, Ликоришем, Миллеттом и Окнеану до инвариантного полинома от двух переменных, включающего в себя как частный случай и полином Алексаидера [15].

В этом докладе мы будем довольно близко следовать пути, пройдениому Джонсом, а также присоединим замечательный результат Окнеану о классификации положительных следов на $\mathscr{H}_\infty(q)$.

I. ИНДЕКС ПОДФАКТОРА ФАКТОРА ТИПА II_1

Пусть M — фактор типа II_1, а Tr_M — единственный след на M с $\mathrm{Tr}_M(1)=1$. Пусть $L^2(M)$ — гильбертово пространство, полученное пополнением отделимого предгильбертова пространства M со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$; $\langle x,\ y\rangle=\mathrm{Tr}_M(y^*x)\ \forall x,\ y\in M$.

---

[1]) Connes A. Indice des sous facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds [D'après Vaughan Jones]. — Seminaire Bourbaki: 37e année, 1984—85, n° 647, Astérisque 133—134, 1986, p. 289—308.

Пусть λ — левое регулярное представление M в $L^2(M)$.

$$\lambda(x)\,y = xy \quad \forall x \in M, \quad y \in M.$$

Для каждого нормального представления π фактора M в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ следующие два условия эквивалентны:

a) коммутант $\pi(M)'$ группы $\pi(M)$ — фактор типа II_1;

b) π эквивалентно подпредставлению в конечной сумме копий λ.

В этом случае будем говорить, что $(\mathfrak{H}, \pi)$ — представление *конечной кратности*. Кратность $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi)$ (или, короче, $\dim_M(\mathfrak{H})$) удовлетворяет в общем случае следующим условиям:

1) $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi) \in [0, \infty[$, $\dim_M(L^2(M), \lambda) = 1$;

2) $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi) = \dim_M(\mathfrak{H}', \pi')$ тогда и только тогда, когда представления π и π' эквивалентны;

3) $\dim_M\left(\bigoplus\limits_1^\infty (\mathfrak{H}_n, \pi_n)\right) = \sum\limits_1^\infty \dim_M(\mathfrak{H}_n, \pi_n)$ $\Big($если прямая сумма $\bigoplus\limits_1^\infty (\mathfrak{H}_n, \pi_n)$ имеет конечную кратность$\Big)$;

4) если $e \in \pi(M)'$ — проектор, а π_e — ограничение π на пространство $e\mathfrak{H}$, то

$$\dim_M(e\mathfrak{H}, \pi_e) = \mathrm{Tr}_{\pi(M')}(e) \cdot \dim_M(\mathfrak{H}, \pi);$$

5) $\dim_M(\mathfrak{H}, \pi) \cdot \dim_{M'}(\mathfrak{H}) = 1$, где M' — коммутант $\pi(M)$.

Пусть теперь $N \subset M$ — подфактор в M типа II_1. Говорят, что N имеет *конечный индекс* в M, если ограничение левого регулярного представления λ фактора M в $L^2(M)$ на N имеет конечную кратность, т. е. если коммутант $\lambda(N')$ — фактор типа II_1.

Определение 1. Индекс $[M:N]$ подфактора N в M — это кратность $\dim_N(L^2(M), \lambda)$.

Предложение 2. a) *Пусть N — подфактор M конечного индекса. Для каждого представления $(\mathfrak{H}, \pi)$ конечной кратности фактора M его ограничение π_N на N имеет конечную кратность, причем*

$$\dim_N(\mathfrak{H}, \pi_N) = [M:N] \cdot \dim_M(\mathfrak{H}, \pi).$$

b) *Пусть N и M те же, что и в* a), *а P — подфактор конечного индекса в N. Тогда P — подфактор конечного индекса в M, причем $[M:P] = [M:N]\,[N:P]$.*

c) *Пусть N, M, $\mathfrak{H}$, π те же, что и в* a). *Тогда коммутант $\pi(M)'$ — подфактор конечного индекса в $\pi(N')$, причем*

$$[\pi(N)' : \pi(M)'] = [M:N].$$

Свойство a) получается непосредственно, b) следует из a), a c) следует из свойства 5) функции размерности $\dim_M$.

Примеры. α) Пусть Γ — дискретная группа. Рассмотрим коммутант M_Γ правого регулярного представления Γ в гильбертовом пространстве $l^2(\Gamma)$. Чтобы M_Γ было фактором, необходимо и достаточно, чтобы каждый нетривиальный класс сопряженности в Γ имел бесконечную мощность. Более того, в этом случае M_Γ — фактор типа II_1. Поскольку алгебра фон Неймана M_Γ порождена алгеброй $\mathbb{C}\Gamma$ группы Γ, действующей левой сверткой в $l^2(\Gamma)$, то для каждой подгруппы $\Gamma_1 \subset \Gamma$ конечного индекса подалгебра фон Неймана N в M_Γ, порожденная $\mathbb{C}\Gamma_1 \subset \mathbb{C}\Gamma$, — подфактор в M_Γ конечного индекса, изоморфный M_{Γ_1}, причем

$$[M_\Gamma : N] = [\Gamma : \Gamma_1].$$

β) Пусть M — фактор типа II_1, а $e \in M$ — проектор. Обозначим через M_e фактор $\{x \in M;\ xe = ex = x\}$. Для того чтобы M_e был изоморфен M_{1-e}, необходимо и достаточро, чтобы положительное вещественное число $\lambda_0/(1-\lambda_0)$, где $\lambda_0 = \mathrm{Tr}_M(e)$, лежало в фундаментальной группе M ([41]). Пусть тогда θ: $M_e \to M_{1-e}$ — изоморфизм; положим

$$N = \{x + \theta(x);\quad x \in M_e\}.$$

По построению N — подфактор в M, причем непосредственное вычисление $\dim_N(L^2(M), \lambda)$ показывает, что

$$[M : N] = \lambda_0^{-1} + (1-\lambda_0)^{-1}.$$

Так как фундаментальная группа гиперконечного фактора R совпадает с $\mathbb{R}_+^*$, эта конструкция дает существование подфактора N в R с $[R : N] = \alpha$ при произвольном $\alpha \geqslant 4$.

В обозначениях введения объединение примеров α) и β) показывает, что

$$\{1, 2, 3\} \cup [4, +\infty[\subset \Sigma.$$

Кроме того, результат Голдмана [18] указывает, что $\Sigma \cap [1, 2] = \{1, 2\}$, так что остается определить $\Sigma \cap [2, 4]$, с чего и началась деятельность Джонса.

II. КОНСТРУКЦИЯ ДЖОНСА

Пусть M, $L^2(M)$, Tr_M и λ те же, что и выше. Рассмотрим такую изометрическую инволюцию J из $L^2(M)$ в $L^2(M)$, что $J(x) = x^*$ $\forall x \in M$.

Для $x \in M$ пусть $\lambda'(x)$ — оператор в $L^2(M)$ умножения справа на $x : \lambda'(x)\, y = yx$ $\forall y \in M$.

При $x \in M$ имеем $J\lambda(x)^* J = \lambda'(x)$ $\forall x \in M$. Более того, $\lambda'(M)$ равно коммутанту $\lambda(M)$ в $L^2(M)$ ([14]), так что

$$\lambda(M)' = \lambda'(M) = J\lambda(M) J.$$

Пусть N — подалгебра в M, а e_N — оператор ортогонального проектирования в $L^2(M)$ на замыкание N в $L^2(M)$. Согласно построению, $Je_NJ = e_N$; кроме того ([47]), справедливо

Предложение 3. a) *Ограничение E_N оператора e_N на подпространство $M \subset L^2(M)$ — проекция алгебры фон Неймана M на подалгебру N;*

b) *для любых $a, b \in N$ и $x \in M$;*

$$E_N(axb) = aE_N(x)b;$$

c) $E_N(x) \in N^+$ *для любого* $x \in M^+$.

В этом случае говорят, что отображение $E_N: M \to N$ — условное нормальное ожидание, ассоциированное с парой (M, N). Оператор e_N — проектор, причем b) показывает, что

$$(*) \qquad e_N\lambda(a) = \lambda(a)e_N \quad \forall a \in N;$$

$$(**) \qquad e_N\lambda(x)e_N = \lambda(E_N(x)) \quad \forall x \in M.$$

В частности, $e_N \in \lambda(N)'$. Кроме того, имеет место.

Предложение 4. $\lambda(N')$ — *алгебра фон Неймана, порожденная $\lambda(M)'$ и e_N.*

Теорема фон Неймана о бикоммутанте показывает, что достаточно вывести равенство $\lambda(M) \cap \{e_N\}' = \lambda(N)$. Однако при $x \in M$ и $\lambda(x)e_N = e_N\lambda(x)$

$$\lambda(x)1 = (\lambda(x)e_N)1 = (e_N\lambda(x))1 = e_N(x) = \lambda(E_N(x))1,$$

откуда $x = E_N(x)$ и $x \in N$.

Положим $M_1 = J\lambda(N)'J$. Предложение 4 показывает, что M_1 — алгебра фон Неймана в $L^2(M)$, порожденная $\lambda(M)$ и e_N.

Предложение 5. *Предположим, что N — подфактор M конечного индекса.*

a) *M_1 — фактор типа II_1, а $\lambda(M)$ имеет конечный индекс в M_1 с*

$$[M_1 : \lambda(M)] = [M : N];$$

b) $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) = [M : N]^{-1}$;

c) *пусть E_M — каноническое условное нормальное ожидание для фактора M_1 над $\lambda(M)$; тогда $E_M(e_N) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)1$;*

d) *векторное подпространство в* M_1, *порожденное* $\lambda(M)$ *и* $\lambda(M)e_N\lambda(M)$, — *инволютивная подалгебра, слабо плотная в* M_1;

e) *гомоморфизм* $x \in N \to e_N\lambda(x) \in M_1$ — *изоморфизм из* N *на приведенную алгебру фон Неймана*

$$(M_1)_{e_N} = \{z \in M_1 : e_N z = z e_N = z\}.$$

Пункт d) легко следует из равенств (*) и (**). Чтобы доказать e), используем (*) для установления гомоморфности и d) для установления сюръективности. Инъективность получается автоматически, так как каждый фактор типа II_1 — простая алгебра. Равенство a) следует из

$$[M_1 : \lambda(M)] = [J\lambda(N)'J : \lambda(M)] = [\lambda(N)' : \lambda(M)'] = [M : N]$$

(предложение 2c)).

Докажем равенство b). Так как $Je_NJ = e_N$, то

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) = \mathrm{Tr}_{\lambda(N)'}(e_N).$$

Свойство 4 кратности $\dim_N$ показывает, что

$$\mathrm{Tr}_{\lambda(N)'}(e_N) = \dim_N\left(e_N L^2(M)\right) \cdot \dim_N(L^2(M))^{-1} = [M : N]^{-1}.$$

Докажем c). Согласно e) и единственности следа Tr_N на N, имеем $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N z) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,\mathrm{Tr}_N(z)$ при всех $z \in N$. Поэтому при любом $y \in M$

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N E_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) \cdot \mathrm{Tr}_N(E_N(y)) =$$
$$= \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) \cdot \mathrm{Tr}_M(y) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,\mathrm{Tr}_{M_1}(y).$$

Равенство (**) показывает теперь, что для любого $y \in M$ выполнено соотношение

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N y) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N y e_N) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N E_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,\mathrm{Tr}_{M_1}(y),$$

т. е. что $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,1$ — проекция $E_M(e_N)$. □

Основная идея Джонса — повторять проведенную выше конструкцию пары $M \subset M_1$ по паре $N \subset M$. Так получается возрастающая последовательность $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ факторов типа II_1 и последовательность $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ проекторов $e_m \in M_m$, свойства которых легко выводятся из предложения 5. Обозначим через P фактор типа II_1, полученный взятием индуктивного предела возрастающей последовательности $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$, а через Tr_P — нормализованный след на P. Тогда справедливы следующие свойства:

J_1. Для любого m M_m имеет конечный индекс в M_{m+1}, причем

$$[M_{m+1}:M_m]=[M:N].$$

J_2. $e_m\in M_m$, $e_m=e_m^*=e_m^2$.

J_3. $e_m x = x e_m \qquad \forall x\in M_{m-1}$.

J_4. M_{m+1} — алгебра фон Неймана, порожденная M_m и e_{m+1}.

J_5. Пусть E_m — условное ожидание для M_{m+1} над M_m. Тогда

$$E_{m-1}(x)\,e_{m+1}=e_{m+1}xe_{m+1}\qquad \forall x\in M_m.$$

J_6. Пусть $\tau=[M:N]^{-1}$. Тогда

$$E_{m-1}(e_m)=\tau.$$

J_7. $e_{m+1}e_me_{m+1}-\tau e_{m+1}=0$.

J_8. $e_me_{m+1}e_m-\tau e_m=0$.

J_9. $e_ie_j=e_je_i$, если $|i-j|\geqslant 2$.

J_{10}. Подалгебра A_m алгебры P, порожденная $e_1,\ldots,e_m$ и 1, конечномерна, причем $E_m(A_{m+1})\subset A_m$.

J_{11}. Отображение $x\mapsto xe_{m+1}$ из A_{m-1} в редуцированную алгебру $(A_{m+1})_{e_{m+1}}=\{z\in A_{m+1}:ze_{m+1}=e_{m+1}z=z\}$ — изоморфизм.

J_{12}. Для любого $x\in A_m$ выполнено $\mathrm{Tr}_P(xe_{m+1})=\tau\,\mathrm{Tr}_P(x)$.

III. ТЕОРЕМА ДЖОНСА

Теорема 6. *Пусть Σ — подмножество в $\mathbb{R}^+$, образованное значениями индекса $[M:N]$ для факторов M и N типа* II_1, $N\subset M$. *Тогда*

$$\Sigma=\left\{4\cos^2\frac{\pi}{n}:n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\right\}\cup[4,\ +\infty[.$$

Для того чтобы доказать, что $\Sigma\cap[1,4]\subset\{4\cos^2\pi/h;\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 3\}$, нужно точнее изучить подалгебры A_n в P (в обозначениях разд. II). Для каждого проектора $e\in P$ имеем $\mathrm{Tr}_P(e)\in[0,\ 1]$; более того, если e и f — такие проекторы, что $e\leqslant f$, то $\mathrm{Tr}_P(e)\leqslant\mathrm{Tr}_P(f)$, причем равенство выполняется только при $e=f$. Обозначим через $e\vee f$ (соответственно $e\wedge f$) наименьший проектор в P, превосходящий и e и f (соответственно наибольший из проекторов, которые меньше и e и f). Проекторы $e\vee f$ и $e\wedge f$ принадлежат алгебре фон Неймана, порожденной e и f, причем выполнено основное тождество [46]:

$$(*)\qquad \mathrm{Tr}_P(e\vee f)+\mathrm{Tr}_P(e\wedge f)=\mathrm{Tr}_P(e)+\mathrm{Tr}_P(f).$$

Вернемся к обозначениям разд. II и положим $q_n = e_1 \ldots e_N$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

По построению

$$q_n \leqslant q_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; q_{n+1} = q_n \vee e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; q_m \in A_m.$$

Кроме того, так как A_m порождено 1 и $e_1, \ldots, e_m$, то проектор q_m лежит в центре A_m, так что

$$A_m = \mathbb{C}(1 - q_m) + (A_m)_{q_m}.$$

Теперь вычислим рекуррентно по m значение $\mathrm{Tr}_P(q_m)$. Центральное место — это

Лемма 7. *Если* $q_m \neq 1$, *то* $q_m \wedge e_{m+1} = e_{m+1} q_{m-1}$.

Доказательство. Так как q_{m-1} коммутирует с e_{m+1} (по J_3), то $e_{m+1} q_{m-1} \leqslant q_m \wedge e_{m+1}$. Далее

$$q_m \wedge e_{m+1} \leqslant e_{m+1} q_m e_{m+1} = E_{m-1}(q_m)\, e_{m+1}.$$

Поэтому, используя J_{11}, получаем $q_{m-1} \leqslant E_{m-1}(q_m)$. Так как $E_{m-1}(q_m) \in A_{m-1} = \mathbb{C}(1 - q_{m-1}) + (A_{m-1})_{q_{m-1}}$, то $E_{m-1}(q_m) = \lambda(1 - q_{m-1}) + z$,

$$z \in (A_{m-1})_{q_{m-1}} \text{ и } q_{m-1} \leqslant z \leqslant 1 \text{ (предложение 3c)},$$

откуда $z = q_{m-1}$. Предложение 3c) показывает, что $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; согласно посылке леммы, $\mathrm{Tr}_P(q_m) < 1$, откуда $\lambda < 1$. Так как $q_m \wedge e_{m+1}$ — это спектральный проектор $e_{m+1} q_m e_{m+1}$, отвечающий собственному значению 1, то $q_m \wedge e_{m+1} = e_{m+1} q_{m-1}$. □

Свойство J_{12} показывает, что $\mathrm{Tr}_P(e_{m+1} q_{m-1}) = \tau \,\mathrm{Tr}_P(q_{m-1})$; равенство (*) дает при $q_m \neq 1$ соотношение

$$\mathrm{Tr}_P(q_{m+1}) + \tau \,\mathrm{Tr}_P(q_{m-1}) = \mathrm{Tr}_P(q_m) + \mathrm{Tr}_P(e_{m+1}) = \mathrm{Tr}_P(q_m) + \tau.$$

Пусть теперь $\alpha_m = 1 - \mathrm{Tr}_P(q_m)$. Имеем $\alpha_m \in [0, 1]$ и $\alpha_{m+1} \leqslant \alpha_m$. Более того, $\alpha_m \neq 0$ тогда и только тогда, когда $q_m \neq 1$. Пусть $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность полиномов с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, определяемая условиями

$$P_0 = 0, \; P_1 = 1, \; \ldots, \; P_{n+1}(\tau) = P_n(\tau) - \tau P_{n-1}(\tau).$$

Лемма 8. a) *Пусть* $\alpha_n > 0$ *при любом* $n < n_0$ и $\alpha_n = 0$ *при любом* $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \{1, 2, \ldots\}$. *Тогда* $\alpha_n = P_n(\tau)$ *при любом* $n \leqslant n_0$.

b) *Если* $\tau > \frac{1}{4}$, *то* $n_0 < \infty$, $\tau = \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{n_0}\right)^{-1}$.

Доказательство. Пункт a) уже доказан. Докажем b). Пусть $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta^2 = 1 - 4\tau$. Можно доказать, что (при $\beta \neq 0$)

$$P_n(\tau) = \left(\left(\frac{1+\beta}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\beta}{2}\right)^n\right)\beta^{-1}.$$

Если $\tau > 1/4$, то $\beta \in i\mathbb{R}$ и $P_n(\tau) = (\sigma^n - \bar{\sigma}^n)/(\sigma - \bar{\sigma})$, где $\sigma = (1+\beta)/2$, так что $P_n(\tau) > 0$ не может быть выполнено при любом n. Действительно,

$$P_n(\tau) = |\sigma|^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \quad \text{где } \theta = \operatorname{Arg}\sigma.$$

Значит, $n_0 < \infty$, и так как $P_{n_0}(\tau) = 0$, то $\theta = \pi/n_0$, $\sqrt{4\tau - 1} = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\pi/n_0)$ и $4\tau = 1 + \operatorname{tg}^2(\pi/n_0) = 1/\cos^2(\pi/n_0)$.

Лемма 8 завершает доказательство включения

$$\Sigma \subset \left\{4\cos^2\frac{\pi}{n}; \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3\right\} \cup [4, +\infty].$$

Для того чтобы доказать, что Σ включает значения $4\cos^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, Джонс использовал свою конструкцию (разд. II), примененную к паре $N \subset M$ конечномерных алгебр фон Неймана ([23]).

IV. АЛГЕБРЫ ГЕККЕ $\mathcal{H}_n(q)$ ([19], [8])

Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов и n — ненулевое целое число. Рассмотрим группу $G = SL_n(\mathbb{F}_q)$ матриц порядка n с коэффициентами в $\mathbb{F}_q$ и детерминантом 1. Пусть $B \subset G$ — подгруппа Бореля, образованная верхнетреугольными матрицами. Обозначим через $\mathcal{H}_n(q)$ алгебру (относительно свертки на G), состоящую из функций f: $G \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$f(bgb') = f(g) \quad \forall b, b' \in B \quad \forall g \in G.$$

Пусть X есть G-пространство $X = G/B$, состоящее из флагов в векторном пространстве $E = \mathbb{F}_q^n$. Элемент F из X задается возрастающей последовательностью $(F_i)_{i=0,\ldots,n}$ таких линейных подпространств E, что

$$\dim F_i = i \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

Пусть L — комплексное векторное пространство $L = \mathbb{C}^X$. Это G-модуль (так как G действует на множестве X). Определим ля любого $f \in \mathcal{H}_n(q)$ оператор $\pi(f) \in \operatorname{End}(L)$ с матрицей $\pi(f)_{g_1, g_2} = f(g_1^{-1}g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G/B$.

Нормировав меру Хаара μ на G так, что $\mu(B) = 1$, получаем, что π — строгое представление группы $\mathcal{H}_n(q)$, образ которого —