М. Тихомандрицкий

Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. Тихомандрицкий

М11 Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций / М. Тихомандрицкий – М.: Книга по Требованию, 2021. – 507 с.

ISBN 978-5-458-26203-3

Новаторское для того времени изложение теории эллиптических интегралов и эллиптических функций.

ISBN 978-5-458-26203-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

водя его только къ 3-ьей степени (какъ для гиперэллиптическихъ интеграловъ онъ приводится къ нечетной степени $2\varrho+1$ въ нашемъ выше-упомянутомъ разсужденіи); затѣмъ, когда Вейерштрассовская форма почти сама собою появляется, мы, давъ кромѣ нашего еще выводы Эрмита и Миттагъ-Леффлера, придерживаемся въ дальнѣйшемъ этой формы.

Общая Θ-функція появляется при этомъ совершенно естественно, и мы занимаемся лишь ею, пока разложеніе ея на множители не приводитъ къ $\sigma(u)$ Вейерштрасса, а разложеніе въ тригонометрическіе ряды къ функціямъ Якоби (которыя оказываются, и тѣ и другія, частными видами общей Θ-функціи), съ каковыхъ моментовъ разсматриваются и эти послѣднія, въ какой мѣрѣ то оказывается необходимымъ и достаточнымъ послѣ разсмотрѣнія свойствъ общей Θ-функціи *).

Послѣ того, какъ появляются Θ-функціи, изъ самого ихъ опредѣленія выводятся ихъ функціональныя уравненія, изъ которыхъ въ свою очередь развиваются ихъ разныя свойства. Разсмотрѣніе частныхъ такихъ функцій и приводитъ, какъ уже сказано выше, къ функціямъ амплитуды Якоби.

Изъ разнаго рода разложеній эллиптическихъ функцій и Θ-функцій разложенія однѣхъ на частныя дроби и въ безконечныя произведенія другихъ, какъ естественно представляющіяся, разъ мы ознакомились съ дробнымъ характеромъ первыхъ и цѣлымъ послѣднихъ, поставлены на первомъ планѣ. Это—разложенія по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса, полученныя однако здѣсь потому способу, который указанъ нами въ статьѣ нашей: „Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія" **). Эти разложенія, двойныя, въ главѣ XI настоящаго сочиненія преобразуются въ простыя. Въ слѣдующей главѣ XII выводятся разложенія Θ-функцій и эллиптическихъ, равно какъ и логариѳмовъ отъ нихъ, въ тригонометрическіе ряды. Здѣсь, какъ выше упомянуто, появляются впервые Якобіевскія θ-функціи и выводится соотношеніе между произведеніями θ по четыре, слѣдуя Якоби.

---

*) Способы введенія Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій раньше были указаны нами въ нашихъ замѣткахъ: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale, Math. Ann. Bd. XXII, 1883 г., подъ тѣмъ же заглавіемъ 2. Note въ Bd. XXV, 1884 г., а на русскомъ языкѣ: „Замѣтка о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій", въ „Сообщеніяхъ и протоколахъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1883 г., вып. I, стр. 47—67, и „Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ", тамъ же 1884 г. вып. III, стр. 187—196.

**) Помѣщенной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества", 2-ая серія, т. II, 1889 г., стр. 166—208.

Послѣдняя глава, XIII, посвящена разложенію нашихъ функцій въ ряды, расположенные по степенямъ аргумента u, что выполняется главнымъ образомъ по литографированному мемуару Вейерштрасса: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ Göthingen, 1883. Здѣсь приходится пользоваться тѣми частными дифференціальными уравненіями, которымъ удовлетворяютъ Θ- и σ-функціи, разсматриваемыя въ зависимости не только отъ аргументовъ, но также и отъ инваріантовъ. Эта глава, заключая элементы, относящіеся ко второй части теоріи эллиптическихъ функцій, представляется какъ бы переходною отъ одной части къ другой, и потому натурально является послѣднею въ нашемъ сочиненіи, посвященномъ изложенію первой части этой теоріи.

Теоремы сложенія и вычитанія эллиптическихъ функцій, какъ слѣдствія Абелевой теоремы, выведены въ надлежащихъ мѣстахъ (главы V и IX, § 132—133); что же касается до умноженія и дѣленія аргумента, то это по связи съ преобразованіемъ эллиптическихъ функцій относится ко второй части и потому не входитъ въ наше сочиненіе. Если обстоятельства позволятъ намъ заняться этой второй частью, можетъ быть мы напишемъ и вторую часть; но во всякомъ случаѣ предлагаемое теперь сочиненіе слѣдуетъ разсматривать какъ законченное, на которое слѣдующее, если оно будетъ написано, будетъ опираться, какъ на основаніе.

По принятому плану до того натурально все развивается и вытекаетъ одно изъ другого, что къ другимъ авторамъ: Абелю, Якоби, Бріо и Букэ, Гальфену, Шварцу, Вейерштрассу, Бирману, приходилось обращаться чаще лишь для провѣрки полученныхъ результатовъ, и только изрѣдка за разъясненіями и указаніями способовъ преодолѣнія частныхъ трудностей; одна послѣдняя глава въ этомъ отношеніи составляетъ исключеніе, будучи большею частью позаимствована у Вейерштрасса, какъ уже сказано выше, иногда у Гальфена.

Въ сокращенномъ видѣ предлагаемое нынѣ изложеніе первой части теоріи эллиптическихъ функцій уже нѣсколько лѣтъ подъ рядъ преподается нами на лекціяхъ въ Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ студентамъ 6-го и 8-го семестровъ. Такъ какъ я съ самаго начала трактую перемѣнную какъ комплексную величину, то для слушателей и читателей незнакомыхъ съ теоріей функцій комплекснаго перемѣннаго во „введеніи“ сообщаются необходимыя свѣдѣнія изъ этой теоріи.—Опытный преподаватель можетъ, пользуясь нашей книгой, прочитать нѣсколько, различно составленныхъ, болѣе кратких курсовъ теоріи эллиптическихъ функцій.

Едва-ли найдется другая какая-либо отрасль математическаго анализа, столь богатая какъ своей литературой, такъ и системами изложеній, какъ теорія эллиптическихъ функцій; нѣкоторыя изъ другихъ системъ изложенія можетъ быть и будутъ немного проще; но едва-ли найдется какая-либо иная, кромѣ принятой въ этомъ сочиненіи, которая въ тоже время была бы столь же естественна и столь обща, какъ эта, будучи распространима и на высшія трансцендентныя, гиперэллиптическія и Абелевы.

Общіе методы, захватывая бо́льшую область въ наукѣ, въ то же время позволяютъ лучше отдѣлить общее отъ частнаго, главное отъ второстепеннаго, родовое отъ видового, и такимъ образомъ глубже проникнуть въ теорію и въ то-же время лучше постичь связь разныхъ частностей, ихъ соединеніе въ одно стройное цѣлое. Крупный шагъ впередъ въ наукѣ даетъ новое освѣщеніе и тому, что раньше было извѣстно.

Предлагаемое нынѣ сочиненіе написано именно подъ вліяніемъ успѣховъ, сдѣланныхъ теоріей Абелевыхъ интеграловъ, благодаря работамъ Вейерштрасса и Нётера.

Будучи посвящено предмету такого крупнаго значенія, какое имѣютъ теперь эллиптическія функціи въ математическомъ анализѣ, сочиненіе это, въ случаѣ удачнаго выполненія, должно имѣть нѣкоторое значеніе и само по себѣ; но какъ разработанное по тому общему плану, по которому теперь излагаются и теоріи гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, оно для желающаго перейти потомъ къ изученію этихъ теорій получаетъ еще новое значеніе, подготовительнаго къ нимъ курса.

Представляемая этимъ сочиненіемъ моя лепта на алтарь науки можетъ дѣйствительно сдѣлаться таковою конечно лишь въ томъ только случаѣ, если этому труду посчастливится обратить на себя вниманіе нашихъ соотечественныхъ любителей математики, на судъ которыхъ я и отдаю свой опытъ новаго изложенія теоріи эллиптическихъ функцій.

М. Тихомандрицкій.

Харьковъ.
2-го Марта 1895 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ТЕОРІЯ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.