

**М. Тихомандрицкий**

**Теория эллиптических  
интегралов и эллиптических  
функций**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
М11

М11 **М. Тихомандрицкий**  
Теория эллиптических интегралов и эллиптических функций / М. Тихомандрицкий – М.: Книга по Требованию, 2021. – 507 с.

**ISBN 978-5-458-26203-3**

Новаторское для того времени изложение теории эллиптических интегралов и эллиптических функций.

**ISBN 978-5-458-26203-3**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



водя его только къ 3-ей степени (какъ для гиперэллиптическихъ интеграловъ опъ приводится къ нечетной степени  $2q + 1$  въ нашемъ выше-упомянутомъ рассужденіи); затѣмъ, когда Вейерштрассовская форма почти сама собою появляется, мы, давъ кромѣ нашего еще выводы Эрмита и Миттагъ-Леффлера, придерживаемся въ дальнѣйшемъ этой формы.

Общая  $\Theta$ -функція появляется при этомъ совершенно естественно, и мы занимаемся лишь ею, пока разложеніе ея на множители не приводитъ къ  $\theta(u)$  Вейерштрасса, а разложеніе въ тригонометрическіе ряды къ функціямъ Якоби (которыя оказываются, и тѣ и другія, частными видами общей  $\Theta$ -функціи), съ каковыхъ моментовъ разсматриваются и эти послѣднія, въ какой мѣрѣ то оказывается необходимымъ и достаточнымъ послѣ разсмотрѣнія свойствъ общей  $\Theta$ -функціи \*).

Послѣ того, какъ появятся  $\Theta$ -функціи, изъ самого ихъ опредѣленія выводятся ихъ функціональныя уравненія, изъ которыхъ въ свою очередь развиваются ихъ разныя свойства. Разсмотрѣніе частныхъ такихъ функцій и приводитъ, какъ уже сказано выше, къ функціямъ амплитуды Якоби.

Изъ разнаго рода разложеній эллиптическихъ функцій и  $\Theta$ -функцій разложенія однихъ на частныя дроби и въ безконечныя произведенія другихъ, какъ естественно представляющіяся, разъ мы ознакомились съ дробнымъ характеромъ первыхъ и цѣлымъ послѣднихъ, поставлены на первомъ главѣ. Это—разложенія по теоремамъ Миттагъ-Леффлера и Вейерштрасса, полученныя однако здѣсь потому способомъ, который указанъ нами въ статьѣ нашей: „Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія“ \*\*). Эти разложенія, двойныя, въ главѣ XI настоящаго сочиненія преобразуются въ простыя. Въ слѣдующей главѣ XII выводятся разложенія  $\Theta$ -функцій и эллиптическихъ, равно какъ и логарифмовъ отъ нихъ, въ тригонометрическіе ряды. Здѣсь, какъ выше упомянуто, появляются впервые Якобиевскія  $\theta$ -функціи и выводятся соотношеніе между произведеніями  $\theta$  по четыре, слѣдую Якоби.

\*) Способы введенія  $\Theta$ -функцій въ теорію эллиптическихъ функцій раньше были указаны нами въ нашихъ замѣткахъ: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale, Math. Ann. Bd. XXII, 1883 г., подъ тѣмъ же заглавіемъ 2. Note въ Bd. XXV, 1884 г., а на русскомъ языкѣ: „Замѣтка о введеніи  $\Theta$ -функцій въ теорію эллиптическихъ функцій“, въ „Сообщеніяхъ и протоколахъ Математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1883 г., вып. I, стр. 47—67, и „Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ“, тамъ же 1884 г. вып. III, стр. 187—196.

\*\*\*) Помѣщенной въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества“, 2-ая серія, т. II, 1889 г., стр. 166—208.

Послѣдняя глава, XIII, посвящена разложенію нашихъ функцій въ ряды, расположенные по степенямъ аргумента  $u$ , что выполняется главнымъ образомъ по литографированному мемуару Вейерштрасса: „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ Göttingen, 1883. Здѣсь приходится пользоваться тѣми частными дифференціальными уравненіями, которыми удовлетворяють  $\theta$ - и  $\sigma$ -функціи, разсматриваемыя въ зависимости не только отъ аргументовъ, но также и отъ инвариантовъ. Эта глава, заключающа элементъ, относящійся ко второй части теоріи эллиптическихъ функцій; представляется какъ бы переходною отъ одной части къ другой, и потому натурально является послѣднею въ нашемъ сочиненіи, посвященномъ изложенію первой части этой теоріи.

Теоремы сложения и вычитанія эллиптическихъ функцій, какъ слѣдствія Абелевой теоремы, выведены въ надлежащихъ мѣстахъ (главы V и IX, § 132—133); что же касается до умноженія и дѣленія аргумента, то это по связи съ преобразованиемъ эллиптическихъ функцій относится ко второй части и потому не входитъ въ наше сочиненіе. Если обстоятельства позволятъ намъ заняться этой второй частью, можетъ быть мы напишемъ и вторую часть; но во всякомъ случаѣ предлагаемое теперь сочиненіе слѣдуетъ разсматривать какъ законченное, на которое слѣдующее, если оно будетъ написано, будетъ опираться, какъ на основаніе.

По принятому плану до того натурально все развивается и вытекаетъ одно изъ другого, что къ другимъ авторамъ: Абелю, Якоби, Брю и Букэ, Гальфену, Шварцу, Вейерштрассу, Бирману, приходилось обращаться чаще лишь для проверки полученныхъ результатовъ, и только изрѣдка за разъясненіями и указаніями способовъ преодоленія частныхъ трудностей; одна послѣдняя глава въ этомъ отношеніи составляетъ исключеніе, будучи большею частью позаимствована у Вейерштрасса, какъ уже сказано выше, иногда у Гальфена.

Въ сокращенномъ видѣ предлагаемое нынѣ изложеніе первой части теоріи эллиптическихъ функцій уже нѣсколько лѣтъ подъ рядъ преподается нами на лекціяхъ въ Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ студентамъ 6-го и 8-го семестровъ. Такъ какъ я съ самаго начала трактую переменную какъ комплексную величину, то для слушателей и читателей незнакомыхъ съ теоріей функцій комплекснаго переменнаго въ „введеніи“ сообщаются необходимыя свѣдѣнія изъ этой теоріи.—Опытный преподаватель можетъ, пользуясь нашею книгой, прочитать нѣсколько, различно составленныхъ, болѣе краткихъ курсовъ теоріи эллиптическихъ функцій.

Едва-ли найдется другая кака-либо отрасль математическаго анализа, столь богатая какъ своей литературой, такъ и системами изложенія, какъ теорія эллиптическихъ функцій; нѣкоторыя изъ другихъ системъ изложенія можетъ быть и будутъ немного проще; но едва-ли найдется кака-либо иная, кромѣ принятой въ этомъ сочиненіи, которая въ тоже время была бы столь же естественна и столь обща, какъ эта, будучи распространима и на высшія трансцендентныя, гиперэллиптическія и Абелевы.

Общіе методы, захватывая большую область въ наукѣ, въ то же время позволяютъ лучше отдѣлить общее отъ частнаго, главное отъ второстепеннаго, родовое отъ видового, и такимъ образомъ глубже проникнуть въ теорію и въ то-же время лучше постичь связь разныхъ частныхъ, ихъ соединеніе въ одно стройное цѣлое. Крупный шагъ впередъ въ наукѣ даетъ новое освѣщеніе и тому, что раньше было извѣстно.

Предлагаемое нынѣ сочиненіе написано именно подъ влияніемъ успѣховъ, сдѣланныхъ теоріей Абелевыхъ интеграловъ, благодаря работамъ Вейерштрасса и Нётера.

Будучи посвящено предмету таковаго крупнаго значенія, какое имѣютъ теперь эллиптическія функціи въ математическомъ анализѣ, сочиненіе это, въ случаѣ удачнаго выполненія, должно имѣть нѣкоторое значеніе и само по себѣ; но какъ разработанное по тому общему плану, по которому теперь излагаются и теоріи гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, оно для желающаго перейти потомъ къ изученію этихъ теорій получаетъ еще новое значеніе, подготовительнаго къ нимъ курса.

Представляемая этимъ сочиненіемъ моя лепта на алтарь науки можетъ дѣйствительно сдѣлаться таковою конечно лишь въ томъ только случаѣ, если этому труду посчастливится обратить на себя вниманіе нашихъ соотечественныхъ любителей математики, на судъ которыхъ я и отдаю свой опытъ новаго изложенія теоріи эллиптическихъ функцій.

*М. Тихомандрицкій.*



# ОГЛАВЛЕНИЕ.

| §   | Стр.  |
|---|-------|
| Предисловіе . . . . .   | V     |
| Введеніе. Необходимыя свѣденія изъ теоріи функций комплекснаго переменнаго . . . . .  | I     |
| Мотивы къ этому введенію . . . . .  | I     |
| 1. Комплексная переменная; отвѣщающая ей точка на плоскости $XOY$ . Геометрическое значеніе модуля и аргумента . . . . .                            | —     |
| 2. Нейманова сфера . . . . .  | II    |
| 3. Плоскость антиподовъ . . . . .   | III   |
| 4. Соотношеніе между величинами $z$ и $z'$ , опредѣляющими точку на горизонтальной плоскости и ей соотвѣтственную на плоскости антиподовъ . . . . . | —     |
| 5. Функция комплексной переменной . . . . .   | V     |
| 6. Частное дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ функция комплекснаго переменнаго . . . . .                           | VII   |
| 7. Интегралъ отъ $UdV$ , взятый по кривой . . . . .   | —     |
| 8. Случай $U$ и $V$ комплексныхъ функций . . . . .  | VIII  |
| 9. Интегралъ по кривой отъ функции комплекснаго переменнаго . . . . .   | IX    |
| 10. Преобразованіе двойнаго интеграла, распространеннаго на некоторую площадь, въ простой, взятый по ея контуру . . . . .                           | X     |
| 11. Связаніе некоторыхъ ограниченій вида площади, сдѣланныхъ въ пред. § . . . . .   | XII   |
| 12. Односвязныя и многосвязныя площади . . . . .  | XIII  |
| 13. Распространеніе формулы преобразованія § 10 на многосвязную площадь . . . . .   | —     |
| 14. Интегралъ по сомкнутой кривой отъ полнаго дифференціала функции двухъ независимыхъ переменныхъ . . . . .  | XIII  |
| 15. Теорема Коши . . . . .  | XIV   |
| 16—17. Слѣдствія изъ нея . . . . .  | XV    |
| 18. Полюсы и существенно-особенныя точки функций комплекснаго переменнаго. Интегралъ вокругъ полюса . . . . .                                       | XVI   |
| 19. Случай полюсовъ высшихъ порядковъ . . . . .   | XIX   |
| 20. Вычетъ (residu) . . . . .   | XX    |
| 21. Значенія интеграла по кривой, лежащей въ площади, заключающей полюсы . . . . .  | XXI   |
| 22. Выраженіе значеній функций и ея производныхъ въ точкѣ, лежащей внутри некоторой площади, интеграломъ, взятымъ по ея контуру . . . . .           | —     |
| 23. Случай, когда площадь имѣетъ форму круга, описаннаго изъ рассматриваемой точки, какъ центра . . . . .   | XXII  |
| 24. Выводъ строки Тейлора. Область сходимости ряда . . . . .  | XXIII |

| §   | / | Стр.   |
|---|---|--------|
| 25. Порядок значения функции въ какой либо точкѣ площади (Ordnungs-zahl).<br>Сумма порядковъ для всѣхъ точекъ площади . . . . .     |   | XXVI   |
| 26. Функция, однозначная, конечная и непрерывная на всей Пейдженовой сферѣ, есть постоянная . . . . .                               |   | XXVII  |
| 27. Функция, принимающая одну половину въ бесконечно-удаленной точкѣ, есть конформно. Основное предложеніе Высшей Алгебры . . . . . |   | XXVIII |
| 28. Функция, принимающая одну половину въ конечномъ, есть рациональная дробь . . . . .  |   | XXIX   |
| 29. Безконечныя ряды, составленные изъ комплексныхъ величинъ. Ихъ сходимость . . . . .  |   | XXX    |
| 30. Безусловно- и равномерно-сходящійся рядъ можетъ быть интегрированъ . . . . .  |   | XXXI   |
| 31. Условія дифференцируемости ряда . . . . .   |   | XXXII  |
| 32. Безконечныя произведения, условия ихъ сходимости . . . . .  |   | —      |
| 33. Двойныя суммы: условия ихъ сходимости . . . . .   |   | XXXVI  |
| 34. Больше общая двойная сумма . . . . .  |   | XXXVII |
| 35. Двойное безконечное произведение . . . . .  |   | XXXIX  |

# ТЕОРІЯ

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

| §   | Стр. |
|---|------|
| Глава I. <i>Преобразование эллиптическихъ интеграловъ къ интеграламъ трехъ родовъ, различныя формы этихъ интеграловъ</i> . . . . .  | 1    |
| 1. Общій видъ эллиптическихъ интеграловъ. Подъ корнемъ всегда можно разложить многочленъ третьей степени . . . . .  | 1    |
| 2. Общій видъ алгебраической функции отъ $x$ в корняхъ изъ многочлена третьей степени $\alpha$ . Сведеніе интеграла къ другому, содержащему корень лишь множителемъ знаменателя . . . . . | 2    |
| 3. Разделеніе на сумму интеграловъ двухъ типовъ. Ихъ можно обнять въ одной формулѣ . . . . .  | 4    |
| 4. Формула приведенія интеграловъ къ интеграламъ съ высшими показателями степени $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . . . . .   | —    |
| 5. Интегралы первого и второго рода . . . . .   | 5    |
| 6. Интегралы третьего рода . . . . .  | 6    |
| 7. Общій интегралъ второго рода . . . . .   | 7    |
| 8. Всево-интегралъ третьего рода . . . . .  | 8    |
| 9. О выведеніи тождества изъ свойствъ . . . . .   | 9    |
| 10. Выводъ одного тождества. Новая форма интеграла второго рода . . . . .   | 12   |
| 11. Нормальный интегралъ второго рода . . . . .   | 14   |
| 12—13. Изъ выведенія нормальныхъ интеграловъ второго рода заключаются всѣ прочія какъ частный случай . . . . .  | 16   |
| 14—15. Вейерштрассовскій и нормальный интегралы третьего рода. Отличительное свойство нормального . . . . .   | 18   |

| §      | Глава II. Характеристическія особенности эллиптических интеграловъ<br>перваго, второю и третьяго рода . . . . .  | Стр.      |
|--------|--|-----------|
| 16.    | Критическія точки эллиптических дифференціаловъ . . . . .  | 21        |
| 17.    | Интегралъ перваго рода осязаетъ конеченъ . . . . .   | 23        |
| 18.    | Интегралъ втораго рода перваго типа обращается въ безконечность въ без-<br>конечно-удаленной точкѣ . . . . .   | —         |
| 19.    | Прочіе интегралы втораго рода въ безконечно-удаленной точкѣ конечны . . . . .  | 24        |
| 20.    | Нормальный интегралъ третьяго рода и Вейерштрассовскій въ безконечно-<br>удаленной точкѣ . . . . .   | 25        |
| 21.    | Нормальный интегралъ втораго рода въ точкѣ $a$ . . . . .   | —         |
| 22.    | Нормальный интегралъ третьяго рода въ точкахъ $a$ и $a_0$ . . . . .  | 26        |
| 23.    | Характеристическія особенности интеграловъ трехъ родовъ (genus) . . . . .  | 27        |
|        | <b>Глава III. Риманова поверхность. Прямъ-функции; периоды эллиптических<br/>интеграловъ . . . . .</b>   | <b>29</b> |
| 24.    | Двузначность эллиптических дифференціаловъ . . . . .   | 29        |
| 25.    | Точки развѣтвленія квадратнаго корня изъ полинома третьей степени . . . . .  | —         |
| 26.    | Значенія корня по обѣ стороны линіи, соединяющей эти особенныя точки . . . . .   | 31        |
| 27.    | Риманова двулистная поверхность для $\sqrt{R(x)}$ . . . . .  | 32        |
| 28.    | Риманова двулистная сфера для $\sqrt{R(x)}$ . . . . .  | 33        |
| 29.    | Односвязныя и многосвязныя поверхности. Риманова сфера для $\sqrt{R(x)}$ есть<br>двусвязная поверхность. Преобразование ея въ односвязную . . . . .                        | —         |
| 30.    | Интегрирование тождества § 10 по путямъ $A$ и $B$ . Функции $\Omega(x, x_0)$ и<br>$\Omega_1(x, x_0)$ . Величины $\omega, \omega'; \eta$ и $\eta'$ . . . . .                | 35        |
| 31—32. | Преобразование интеграловъ, выражающихъ послѣднія величины . . . . .   | 37        |
| 33.    | Величины $\omega''$ и $\eta''$ . . . . .   | 40        |
| 34.    | Свойства функций $\Omega(x, x_0)$ и $\Omega_1(x, x_0)$ . . . . .   | 42        |
| 35.    | Введеніе этихъ функций въ равенства § 30. Выводъ соотношеній между ве-<br>личинами $\omega, \omega'; \eta$ и $\eta'$ . . . . .   | 44        |
| 36.    | Выраженіе интеграловъ перваго и втораго рода чрезъ функции $\Omega(x, x_0)$ и<br>$\Omega_1(x, x_0)$ . Периоды этихъ интеграловъ . . . . .                                  | 45        |
| 37.    | Прямъ-функция перваго рода. Выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ перваго<br>и втораго рода . . . . .   | 47        |
| 38.    | Функции $\Omega(x, x_0; a, a_0)$ . Выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ нее . . . . .   | 50        |
| 39.    | Прямъ-функция втораго рода. Ея свойства . . . . .  | 51        |
| 40.    | Выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ прямъ-функции обонхъ родовъ.<br>Періоды интеграла третьяго рода . . . . .  | 53        |
| 41.    | Выраженіе періодовъ интеграла третьяго рода чрезъ прямъ-функции . . . . .  | 54        |
|        | <b>Глава IV. Выраженіе рациональной функции <math>x</math> и <math>\sqrt{R(x)}</math> чрезъ прямъ-функ-<br/>ціи. Теорема Абеля . . . . .</b>                               | <b>56</b> |
| 42.    | Общій видъ рациональной функции $x$ и $\sqrt{R(x)}$ ; ея нули и безконечности . . . . .  | 56        |
| 43.    | Сравненіе ея съ рациональною дробью . . . . .  | 58        |
| 44.    | Цѣлая алгебраическая функция $x$ и $\sqrt{R(x)}$ . Опредѣленіе ея по даннымъ $\lambda-1$<br>нулямъ; опредѣленіе $\lambda$ -го нуля . . . . .                               | 59        |
| 45.    | Дробная алгебраическая функция $x$ и $\sqrt{R(x)}$ . Опредѣленіе ея по даннымъ<br>нулямъ и безконечностямъ; опредѣленіе послѣдняго нуля (или беско-<br>нечности) . . . . . | 61        |

| §  | Стр. |
|--|------|
| 46. Случай, когда некоторые нули или бесконечности находятся в бесконечности   | —    |
| 47. Выражение алгебраической функции $x$ в $\sqrt{R(x)}$ чрез примь-функции . . .  | 62   |
| 48. Теорема Абеля; вывод по Вейерштрассу . . . . .   | 64   |
| 49. Вывод ее по Абелю и Якоби для Якобиевского интеграла третьего рода .   | 65   |
| 50. Также теорема для Вейерштрассовского интеграла третьего рода . . . . .   | 69   |
| 51. Теорема Абеля для интегралов первого рода . . . . .  | 70   |
| 52. Теорема Абеля для нормального интеграла третьего рода . . . . .  | 71   |
| 53. Теорема Абеля для интегралов второго рода . . . . .  | —    |
| 54. Резюме предыдущаго . . . . .   | 75   |
| 55. Теорема Абеля для самого общаго эллиптическаго интеграла . . . . .   | —    |
| <i>Глава V. Частный случай Абелевой теоремы. Каноническая форма эллиптических дифференціалов Вейерштрасса . . . . .</i>  |      |
| 56. О теоремѣ Эйлера . . . . .   | 77   |
| 57. Частный случай Абелевой теоремы. Опредѣленіе функций $u$ , имѣющей три бесконечности в бесконечномъ и два данныя нуля в конечномъ .                                      | 78   |
| 58. Вывод теоремы Эйлера изъ теоремы Абеля . . . . .   | 79   |
| 59—60. Тоже для интеграловъ третьаго и втораго рода. Элементарный выводъ теоремы Эйлера для интеграловъ перваго и втораго рода . . . . .                                     | 80   |
| 61. Введеніе новой переменнѣй $z$ в формулы предыдущихъ §§. Инварианты $g_2$ и $g_3$ . Каноническая форма Вейерштрасса . . . . .   | 86   |
| 62. Выводъ ее изъ теоріи бинарныхъ формъ 4-ой степени (Эрмита). Инварианты и коварианты формы 4-ой степени . . . . .   | 89   |
| 63. Другой выводъ ихъ . . . . .  | 93   |
| 64. Всѣ инвариантовъ . . . . .   | 95   |
| 65. Число независимыхъ инвариантовъ. Абсолютный инвариантъ. Дискриминантъ. Его выраженіе чрезъ инварианты . . . . .  | 96   |
| 66. Число независимыхъ ковариантовъ. Соотношеніе между двумя ковариантами и самой формой . . . . .   | 99   |
| 67. Преобразованіе эллиптическаго дифференціала на основаніи предыдущаго .   | 102  |
| 68. Выводъ Миттагга-Лефлера въ связи съ теоремою Эйлера. Первое упрощеніе  | 104  |
| 69. Постановка вопроса объ отысканіи общаго интеграла эллиптическаго дифференціальнаго уравненія . . . . .   | 107  |
| 70. Рѣшеніе его . . . . .  | 108  |
| 71. Выраженіе $z$ в $\sqrt{S}$ чрезъ $x$ и $\sqrt{R(x)}$ . . . . .   | 113  |
| 72. Теорема Эйлера. Одна формула . . . . .   | 116  |
| <i>Глава VI. Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ. Функция <math>\varphi(u)</math> . . . . .</i>   |      |
| 73. Обращеніе интеграла перваго рода. Функция $\varphi(u)$ двоякопериодическая. Имѣетъ въ $u \equiv 0$ полюсы втораго порядка. Свойства. Параллелограммъ періодовъ . . . . . | 118  |
| 74. Производныя функций $\varphi(u)$ . . . . .   | 122  |
| 75. Однозначность функций $\varphi(u)$ . . . . .   | 124  |
| 76. Способъ обращенія въ бесконечность . . . . .   | 126  |
| 77. Периодичность функций $\varphi(u)$ и періоды, выведенныя съ помощію одной подстановки . . . . .  | 129  |

| §   | Стр. |
|---|------|
| 78. Теорема сложения для $\wp(u)$ . . . . .   | 183  |
| 79. Теорема сложения для $\wp'(u)$ . . . . .  | —    |
| 80. Обобщение формулы (1) пред. § . . . . .   | 184  |
| 81. Некоторые преобразования формул §§ 78 и 79 . . . . .  | 187  |
| Глава VII. Функции $\zeta(u)$ , $Y(u)$ , $\Theta(u)$ . . . . .  |      |
| 82. Введение переменной $v$ в интеграл второго рода (нормальный), функция $Z(u v)$ . . . . .  | 140  |
| 83. Периодичность (второго рода) функция $Z(u v)$ ; периоды . . . . .   | 142  |
| 84. Сведение функция $Z(u v)$ на функцию $Z(u)$ . Функция $\zeta(u)$ ; сведение на нее функций $Z(u)$ и $Z(u v)$ . . . . .  | 145  |
| 85. Выражение нормального интеграла третьего рода при помощи переменной $u$ и параметра $v$ . То же для интегралов третьего рода Вейерштрасса и Якоби. Связь их с функцией $\zeta(u)$ . . . . . | 148  |
| 86. Теорема сложения для интегралов второго рода в новой их форме . . . . .   | 150  |
| 87. Интегрирование предыдущих равенств. Функция $Y(u)$ . Выражение через нее $\log[\wp(u) - \wp(v)]$ . Переход от логарифма к числу; функция $\Theta(u)$ . . . . .                              | 154  |
| 88. Выражение $\sqrt{\wp(u) - \wp(v)}$ через $\Theta$ -функцию. Союзная $\Theta$ -функция . . . . .   | 157  |
| 89. Выражение интегралов третьего рода через $\Theta$ -функции. Вейерштрассовское обозначение его интеграла третьего рода . . . . .   | 158  |
| 90. Выражения функций $\wp(u)$ через $\Theta$ -функции . . . . .  | 162  |
| Глава VIII. Свойства $\Theta$ -функции . . . . .  |      |
| 91. Однозначность, конечность и непрерывность основной $\Theta$ -функции. Ея нули . . . . .   | 163  |
| 92. Нечетность ея, выведенная из свойств функция $Y(u)$ . . . . .   | 165  |
| 93. Функциональные уравнения функции $\Theta$ . . . . .   | 167  |
| 94. Обобщение предыдущих формул . . . . .   | 168  |
| 95. Вывод теоремы Лександра . . . . .   | 170  |
| 96. Свойствами §§ 91—93 функция $\Theta$ вполне определяется . . . . .  | 173  |
| 97. О том же несколько иначе . . . . .  | 175  |
| 98. Новое выражение союзных $\Theta$ -функций. Они удовлетворяют подобным же функциональным уравнениям, как и основная $\Theta$ . . . . .   | 179  |
| 99. Три предыдущия четных союзных функции суть единственные, удовлетворяющия нашим уравнениям . . . . .   | 180  |
| 100. Самая общая $\Theta$ -функция сводится на основную $\Theta$ -функцию . . . . .   | 188  |
| 101. Обобщение функционального уравнения для союзных $\Theta$ -функций . . . . .  | 186  |
| 102. Нули $\Theta$ -функций, основной и союзных . . . . .   | 187  |
| 103. Значения $\Theta$ -функций для значений аргумента равных одному из полу-<br>периодов . . . . .   | 188  |
| 104. Выражения $\sqrt{e_3 - e_1}$ через $\Theta$ -функции от полупериодов . . . . .   | 189  |
| 105. Другія формулы, отсюда вытекающія . . . . .  | 191  |
| 106. Переход $\Theta$ -функций однакъ в другія при измененіи аргумента на полу-<br>периодъ . . . . .  | 198  |
| 107. Сводъ предыдущихъ формулъ въ таблицу . . . . .   | 197  |
| 108. Соотношеніе между квадратами трехъ $\Theta$ -функций . . . . .   | 198  |
| 109. Другой способъ вывода такихъ формулъ . . . . .   | 200  |
| 110—111. Продолженіе пред. § . . . . .  | 202  |

| §        | Глава IX. Отношения $\Theta$ -функций. Функции амплитуды . . . . .  | Стр. |
|----------|---|------|
| 112.     | Три типа функций, получаемых от деления одной $\Theta$ -функции на другую.<br>Связь их с функциями $\sqrt{\varphi(u)-e_i}$ . . . . .  | 208  |
| 113.     | Переход этих функций одних в другие при изменении аргумента на полупериод . . . . .   | 209  |
| 114.     | Таблица предельных формул . . . . .   | 212  |
| 115.     | Переход функций $\sqrt{\varphi(u)-e_i}$ и их отношений одних в другие . . . . .   | 213  |
| 116.     | Двойная периодичность отношений двух $\Theta$ -функций и функций $\sqrt{\varphi(u)-e_i}$ . . . . .  | 214  |
| 117—119. | Вывод дифференциальных уравнений, которыми удовлетворяют частные от деления одной $\Theta$ -функции на другую . . . . .   | 215  |
| 120.     | Преобразование этих дифференциальных уравнений . . . . .  | 221  |
| 121.     | Приведение этих уравнений к одному и тому же в виду чрез умножение частных двух $\Theta$ -функций на некоторые постоянные . . . . .   | 224  |
| 122.     | Лешлядровский интеграл первого рода. Обозначения Якоби. Функции амплитуды $u$ . Обозначения Гудермана . . . . .   | 225  |
| 123.     | Выражения модуля и его дополнительного чрез $e_1, e_2, e_3$ и полупериоды . . . . .   | 227  |
| 124.     | Выражения функций амплитуды $v$ чрез $\Theta$ -функции . . . . .  | 229  |
| 125.     | Соотношения между функциями амплитуды и $\sqrt{\varphi(u)-e_i}$ ; также между модулем и множителем и инвариантами. Формула, которую Halphen определяет функцию $\varphi(u)$ . . . . .         | 230  |
| 126.     | Нули и бесконечности функций амплитуды . . . . .  | 232  |
| 127.     | Связь между величинами $\omega$ , $K$ и $K'$ ; Якоби . . . . .  | 233  |
| 128.     | Периоды функций амплитуды . . . . .   | 235  |
| 129.     | Выражения их нулей и бесконечностей чрез величины $K$ и $K'$ . . . . .  | 237  |
| 130.     | Вывод формул, показывающих переход одних функций амплитуды в другие при изменении аргумента $v$ на $K, K'$ и $K+K'$ . . . . .   | 238  |
| 131.     | Свод этих формул в таблицу . . . . .  | 243  |
| 132.     | Теорема сложения функций $\sin \alpha v$ . Вывод ее из формул § 60 . . . . .  | 245  |
| 133.     | Теоремы сложения функций $\cos \alpha v$ и $\Delta \alpha v$ ; вывод из предыдущего . . . . .   | 247  |
| 134.     | Формулы, выведенные из предыдущих Якоби в его „Fundamenta nova“ . . . . .   | 249  |
| 135.     | Другая группа производных формул . . . . .  | 250  |
| 136.     | Выражения функций амплитуды от двойного аргумента чрез функции амплитуды простого . . . . .   | 252  |
| 137.     | Дифференциальные уравнения функций амплитуды, полученные из таковых для частных двух $\Theta$ -функций и непосредственно . . . . .  | 253  |
| 138.     | Переход от дифференциального уравнения синуса амплитуды $v$ к $\Theta$ -функциям; вывод выражений $\sin \alpha v$ в форм частного двух функций, выражающихся чрез двойные интегралы . . . . . | 255  |
| 139.     | Вывод предельной формулы из формул § 9 чрез замену переменных другими. Выражение интеграла второго рода чрез переменную $x = \sin \alpha v$ и чрез $v$ . . . . .                              | 258  |
| 140.     | Выведение переменных и в первую формулу пред. §; вывод оттуда выражений $\sqrt{\varphi(u)-e_i}$ чрез частное двух $\Theta$ -функций . . . . .   | 262  |
| 141.     | Выведение тех же переменных в интеграл третьего рода Якоби . . . . .  | 265  |