Н. Бурбаки

Алгебра

Часть 4. Гомологическая алгебра

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.
Б91 Алгебра: Часть 4. Гомологическая алгебра / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2012. – 180 с.

ISBN 978-5-458-31379-7

Содержит современное, и в то же время достаточно элементарное, детальное изложение основных разделов гомологической алгебры, находящих фундаментальные приложения как в самой алгебре, так и в, других разделах математики, прежде всего, в алгебраической геометрии и топологии. Обширный дополнительный материал, содержащийся в многочисленных упражнениях, позволяет овладеть еще рядом важных разделов гомологической алгебры, которые либо не вошли в основной текст, либо в нем только кратко упомянуты. В целом книга дает почти исчерпывающее представление о многообразии идей и методов гомологической алгебры. Для математиков различных специальностей, применяющих в своих исследованиях методы гомологической алгебры.

ISBN 978-5-458-31379-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА X

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

§ 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В этом параграфе через A *обозначается кольцо. Если явно не оговорено противное, все рассматриваемые модули и идеалы считаются левыми.*

Все определения и результаты применимы также и к правым модулям, если их рассматривать как левые модули над противоположным кольцом.

Если M — A-*модуль и если* $a \in A$, *то через* a_M *обозначается гомотетия* $x \mapsto ax$ *на* M. *Следовательно,* $1_M = \mathrm{Id}_M$ (*тождественное отображение множества* M); *когда это не может привести к путанице, вместо* 1_M *пишется просто* 1.

Наконец, через 0 *обозначается* A-*модуль, состоящий только из своего нейтрального элемента, выбранный раз и навсегда* (ср. II, р. 8).

1. Коммутативные диаграммы

Пусть, например, B, C, D, E, F — пять множеств, и пусть f — отображение E в F, g — отображение B в C, h — отображение D в E, u — отображение B в D и v — отображение C в E. Для простого описания ситуации такого рода часто используются диаграммы; так, рассматриваемая ситуация описывается следующей диаграммой (E, II, р. 8; Теория множеств, II, с. 91):

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "v"] & \\ D \arrow[r, "h"'] & E \arrow[r, "f"'] & F. \end{tikzcd} \tag{1}$$

В такой диаграмме группа знаков $E \xrightarrow{f} F$ схематически обозначает, что f есть отображение E в F. Когда ясно, о каком отображении идет речь, буква f опускается и пишется просто $E \to F$.

Когда B, C, D, E, F — группы (соответственно A-модули) и f, g, h, u, v — гомоморфизмы групп (соответственно A-модулей), для краткости говорят, что диаграмма (1) — это *диаграмма групп* (соответственно A-*модулей*).

В принципе диаграмма не является математическим объектом, а только *рисунком*, предназначенным для облегчения чтения. На практике диаграммы часто используют как *краткие обозначения*, позволяющие избежать подробного наименования рассматриваемых множеств и отображений; так, говорят: "рассмотрим диаграмму (1)" вместо того, чтобы сказать: "пусть B, C, D, E, F — пять множеств... и v — отображение C в E"; см., например, формулировку предложения 1 в п. 2.

Рассмотрим, например, следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r, "h"] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\ B' \arrow[r, "f'"'] & C' \arrow[r, "g'"'] & D' \arrow[r, "h'"'] & E' \end{tikzcd} \tag{2}$$

Всякому пути, составленному из некоторого числа отрезков диаграммы, проходимому в направлении, указанном стрелками, ставится в соответствие отображение множества, изображаемого началом первого отрезка, в множество, изображаемое концом последнего отрезка, представляющее собой композицию отображений, изображаемых различными проходимыми отрезками. Принимается соглашение, что для всякой вершины диаграммы, например, C, имеется путь, сводящийся к C, и ему ставится в соответствие тождественное отображение 1_C.

В диаграмме (2), например, имеются три пути, выходящие из B и оканчивающиеся в D'; соответствующие отображения – это $d \circ g \circ f$, $g' \circ c \circ f$ и $g' \circ f' \circ b$. Говорят, что диаграмма коммутативна, если для всякой пары путей этой диаграммы, имеющих одинаковые начало и конец, два соответствующих отображения равны; в частности, если у некоторого пути его конец совпадает с его началом, соответствующее отображение должно быть тождественным.

Для того чтобы диаграмма (2) была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$f' \circ b = c \circ f, \quad g' \circ c = d \circ g, \quad h' \circ d = e \circ h; \tag{3}$$

иначе говоря, необходимо и достаточно, чтобы три квадратных диаграммы, выделенных из диаграммы (2), были коммутативны. Действительно, из соотношений (3) вытекает, что $d \circ g \circ f = g' \circ c \circ f$, так как $d \circ g = g' \circ c$, и что $g' \circ c \circ f = g' \circ f' \circ b$, так как $c \circ f = f' \circ b$; следовательно, три пути, выходящих из B и оканчивающихся в D', дают одно и то же отображение. Так же проверяется, что четыре пути, выходящих из B и заканчивающихся в E' (соответственно три пути, выходящих из C и заканчивающихся в E'), дают одно и то же отображение. Соотношения (3) означают, что два пути, выходящих из B (соответственно C, D) и оканчивающихся в C' (соответственно D', E') дают одно и то же отображение. Все другие пары вершин диаграммы (2) могут быть соединены самое большее одним путем, и диаграмма (2), следовательно, коммутативна.

В дальнейшем мы будем предоставлять читателю формулировку и проверку аналогичных результатов для других типов диаграмм.

2. Змеевидная диаграмма

П р е д л о ж е н и е 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму A-модулей*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & P \arrow[d, "h"] \\ M' \arrow[r, "u'"'] & N' \arrow[r, "v'"'] & P' \end{tikzcd} \tag{4}$$

Предположим, что обе строки диаграммы (4) *точные. Тогда*:

(i) *Если отображение* h *инъективно, то*

$$\operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u') = \operatorname{Im}(u' \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ u). \tag{5}$$

(ii) *Если отображение* f *сюръективно, то*

$$\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(v' \circ g) = \operatorname{Ker}(h \circ v). \tag{6}$$

Докажем (i). Ясно, что

$$\operatorname{Im}(u' \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ u) \subset \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u').$$

Обратно, пусть $y' \in \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Im}(u')$. Имеется элемент $y \in N$, для которого $y' = g(y)$. Так как $v' \circ u' = 0$, то $0 = v'(y') = v'(g(y)) = h(v(y))$, откуда $v(y) = 0$, так как h инъективно. Так как (u, v) – точная последовательность, то имеется элемент $x \in M$, для которого $y = u(x)$, откуда $y' = g(u(x))$.

Докажем (ii). Так как $v \circ u = 0$ и $v' \circ u' = 0$, то ясно, что

$$\operatorname{Ker}(g) + \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v' \circ g) = \operatorname{Ker}(h \circ v).$$

Обратно, пусть $y \in \operatorname{Ker}(v' \circ g)$. Тогда $g(y) \in \operatorname{Ker}(v')$, и имеется элемент $x' \in M'$, для которого $u'(x') = g(y)$, так как последовательность (u', v') точная. Так как f сюръективно, то имеется элемент $x \in M$, для которого $f(x) = x'$, откуда $g(y) = u'(f(x)) = g(u(x))$; отсюда заключаем, что $y - u(x) \in \operatorname{Ker}(g)$, чем доказательство заканчивается.

Л е м м а 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму A-модулей*:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "g"] \\ M' \arrow[r, "u'"'] & N' \end{tikzcd} \tag{7}$$

Существуют и притом единственные гомоморфизмы u_1: $\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ и $u_2 = \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g)$, *для которых диаграммы*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Ker}\,(g) \arrow[d, "j"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "u"'] & \mathrm{N} \end{tikzcd} \tag{8}$$

и

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N}' \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{Coker}\,(f) \arrow[r, "u_2"'] & \mathrm{Coker}\,(g) \end{tikzcd} \tag{9}$$

коммутативны, где i *и* j *обозначают канонические вложения,* p *и* q – *канонические сюръекции.*

Действительно, если $x \in \mathrm{Ker}(f)$, то $f(x) = 0$ и $g(u(x)) = u'(f(x)) = 0$, следовательно, $u(x) \in \mathrm{Ker}(g)$, что немедленно дает существование и единственность гомоморфизма u_1. Точно так же, имеем:

$$u'(f(\mathrm{M})) = g(u(\mathrm{M})) \subset g(\mathrm{N}),$$

следовательно, при переходе к фактормодулям u' дает гомоморфизм

$$u_2: \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g),$$

единственный, для которого диаграмма (9) коммутативна.

Будем теперь исходить из *коммутативной* диаграммы А-модулей (4); ввиду леммы 1 ей соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Ker}\,(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Ker}\,(h) \arrow[d, "k"'] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "h"'] \\ \mathrm{M}' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N}' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{P}' \arrow[d, "r"'] \\ \mathrm{Coker}\,(f) \arrow[r, "u_2"'] & \mathrm{Coker}\,(g) \arrow[r, "v_2"'] & \mathrm{Coker}\,(h), \end{tikzcd} \tag{10}$$

где i, j, k – канонические вложения, p, q, r – канонические сюръекции, u_1, u_2 (соответственно v_1, v_2) – гомоморфизмы, полученные из u, u' (соответственно v, v') с помощью леммы 1.

П р е д л о ж е н и е 2. *Предположим, что в коммутативной диаграмме* (4) *строки* (u, v) *и* (u', v') *точные. Тогда*:

(i) $v_1 \circ u_1 = 0$; *если* u' *инъективно, то последовательность* (u_1, v_1) *точная.*

(ii) $v_2 \circ u_2 = 0$; *если* v *сюръективно, то последовательность* (u_2, v_2) *точная.*

(iii) *Предположим, что* u' *инъективно и* v *сюръективно. Тогда существует и притом единственный гомоморфизм* d: $\mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$, *обладающий следующим свойством: если элементы* $z \in \mathrm{Ker}(h)$, $y \in N$ и $x' \in M'$ *удовлетворяют соотношениям* $v(y) = k(z)$ и $u'(x') = g(y)$, *то* $d(z) = p(x')$. *Кроме того, последовательность*

$$\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{u_1} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{v_1} \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{u_2} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{v_2} \mathrm{Coker}(h) \tag{*}$$

точная.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Ker}(h) \arrow[d, "k"'] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, to path={-- ([xshift=3em]\tikztostart.east) |- ([yshift=-1em]\tikztostart.south |- \tikztotarget.north) -| ([xshift=-4em]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
\mathrm{M} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{N} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "h"'] \\
\mathrm{M}' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{N}' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{P}' \arrow[d, "r"'] \\
\mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "u_2"'] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r, "v_2"'] & \mathrm{Coker}(h)
\end{tikzcd}$$

Докажем (i). Так как u_1 и v_1 получены из ограничений отображений u и v на $\mathrm{Ker}(f)$ и $\mathrm{Ker}(g)$ соответственно, то $v_1 \circ u_1 = 0$. Имеем:

$$\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(j) \cap \mathrm{Im}(u).$$

Но, согласно предложению 1 (i), имеем $\mathrm{Ker}(v_1) = \mathrm{Im}(j \circ u_1) = \mathrm{Im}(u_1)$, если u' инъективно.

Докажем (ii). Так как u_2 и v_2 получаются из u и v путем перехода к фактормодулям, ясно, что $v_2 \circ u_2 = 0$. Предположим, что v сюръективно; так как p и q сюръективны, то, ввиду предложения 1 (ii), имеем:

$$\mathrm{Ker}(v_2) = q(\mathrm{Ker}(v_2 \circ q)) = q(\mathrm{Ker}(v') + \mathrm{Im}(g)) =$$
$$= q(\mathrm{Ker}(v')) = q(\mathrm{Im}(u')) = \mathrm{Im}(q \circ u') = \mathrm{Im}(u_2 \circ p) = \mathrm{Im}(u_2).$$

Докажем, наконец, (iii). Если $z \in \mathrm{Ker}(h)$, то имеется элемент $y \in \mathrm{N}$, для которого $v(y) = k(z)$, поскольку v сюръективно; кроме того, $v'(g(y)) = h(k(z)) = 0$, и, следовательно, имеется *единственный* элемент $x' \in \mathrm{M}'$, для которого $u'(x') = g(y)$, поскольку u' инъективно. Покажем, что элемент $p(x') \in \mathrm{Coker}(f)$ *не зависит* от элемента $y \in \mathrm{N}$, для которого $v(y) = k(z)$. Действительно, если $y_1 \in \mathrm{N}$ – второй такой элемент, что $v(y_1) = k(z)$, то $y_1 = y + u(x)$, где $x \in \mathrm{M}$; покажем, что если $x_1' \in \mathrm{M}'$ и $u'(x_1') = g(y_1)$, то $x_1' = x' + f(x)$; действительно, $u'(x' + f(x)) = u'(x') + u'(f(x)) = g(y) + g(u(x)) = g(y + u(x)) = g(y_1)$. Наконец, отсюда заключаем, что $p(x_1') = p(x') + p(f(x)) = p(x')$. Следовательно, можно положить $d(z) = p(x')$, и этим определено отображение $d\colon \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(f)$.

Если теперь z_1, z_2 – элементы из $\mathrm{Ker}(h)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{A}$ и $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, то находим элементы y_1 и y_2 из N, для которых $v(y_1) = k(z_1)$ и $v(y_2) = k(z_2)$, и выбираем в качестве $y \in \mathrm{N}$ элемент $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; тогда непосредственно видно, что

$$d(z) = \lambda_1 d(z_1) + \lambda_2 d(z_2),$$

следовательно, *d – гомоморфизм.*

Предположим, что $z = v_1(t)$ для некоторого $t \in \mathrm{Ker}(g)$; тогда выбираем в качестве $y \in \mathrm{N}$ элемент $j(t)$. Так как $g(j(t)) = 0$, то отсюда заключаем, что $d(z) = 0$, следовательно, $d \circ v_1 = 0$. Обратно, предположим, что $d(z) = 0$. В предыдущих обозначениях имеем, следовательно, что $x' = f(x)$, где $x \in \mathrm{M}$. В этом случае $g(y) = u'(f(x)) = g(u(x))$, откуда $g(y - u(x)) = 0$. Элемент $y - u(x)$ имеет, следовательно, вид $j(n)$ для $n \in \mathrm{Ker}(g)$, и получаем:

$$k(z) = v(y) = v(u(x) + j(n)) = v(j(n)) = k(v_1(n));$$

так как k инъективно, то $z = v_1(n)$, и это доказывает, что последовательность $(*)$ точная в члене $\mathrm{Ker}(h)$.

Наконец, имеем (все в тех же обозначениях):

$$u_2(d(z)) = u_2(p(x')) = q(u'(x')) = q(g(y)) = 0,$$

следовательно, $u_2 \circ d = 0$.

Обратно, предположим, что элемент $w = p(x')$ из $\mathrm{Coker}(f)$ таков, что

$$u_2(w) = u_2(p(x')) = 0 \quad (\text{где } x' \in \mathrm{M}').$$

Таким образом, $q(u'(x')) = 0$ и, следовательно, $u'(x') = g(y)$ для некоторого $y \in \mathrm{N}$; так как $v'(u'(x')) = 0$, то $v'(g(y)) = 0$, следовательно, $h(v(y)) = 0$, иначе говоря, $v(y) = k(z)$ для некоторого $z \in \mathrm{Ker}(h)$, и, по определению, $w = d(z)$; это доказывает, что последовательность (*) точная в члене $\mathrm{Coker}(f)$. Мы видели в (i), что она точная в члене $\mathrm{Ker}(g)$, и в (ii), что она точная в члене $\mathrm{Coker}(g)$; это завершает доказательство утверждения (iii).

С л е д с т в и е 1. *Предположим, что диаграмма* (4) *коммутативна и ее строки точные. Тогда*:

(i) *Если u', f и h инъективны, то g инъективно.*

(ii) *Если v, f и h сюръективны, то g сюръективно.*

Утверждение (i) представляет собой следствие утверждения (i) из предложения 2: действительно $\mathrm{Ker}(f) = 0$ и $\mathrm{Ker}(h) = 0$, следовательно, $\mathrm{Ker}(g) = 0$.

Утверждение (ii) представляет собой следствие утверждения (ii) из предложения 2: действительно, $\mathrm{Coker}(f) = 0$ и $\mathrm{Coker}(h) = 0$, следовательно, $\mathrm{Coker}(g) = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Предположим, что диаграмма* (4) *коммутативна и ее строки точные. При этих условиях*:

(i) *Если g инъективно и если f и v сюръективны, то h инъективно.*

(ii) *Если g сюръективно и если h и u' инъективны, то f сюръективно.*

Для доказательства утверждения (i) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} u(\mathrm{M}) & \xrightarrow{w} & \mathrm{N} & \xrightarrow{v} & \mathrm{P} \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ u'(\mathrm{M}') & \xrightarrow[w']{} & \mathrm{N}' & \xrightarrow[v']{} & \mathrm{P}', \end{array}$$

где f' — отображение, полученное ограничением отображения g на $u(\mathrm{M})$, w и w' — канонические вложения; ясно, что эта диаграмма коммутативна и что ее строки точные. Кроме того, w' инъективно и, по предположению, v сюръективно; имеем, следовательно, согласно предложению 2 (iii) точную последовательность.

$$\mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f');$$

поскольку g инъективно, а f' сюръективно, получаем, следовательно, что $\mathrm{Ker}(h) = 0$.

Для доказательства утверждения (ii) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{M} & \xrightarrow{u} & \mathrm{N} & \xrightarrow{w} & v(\mathrm{N}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h'}\downarrow \\ \mathrm{M}' & \xrightarrow[u']{} & \mathrm{N}' & \xrightarrow[w']{} & v'(\mathrm{N}'), \end{array}$$

где на этот раз h' — отображение, полученное ограничением отображения h на $v(\mathrm{N})$, а отображения w и w' получены соответственно из отображений v и v'; эта диаграмма коммутативна, и ее строки точные. Кроме того, w сюръективно и, по предположению, u' инъективно, следовательно, согласно предложению 2 (iii), имеем точную последовательность

$$\mathrm{Ker}(h') \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g);$$

поскольку g сюръективно и h' инъективно, получаем, следовательно, что $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

С л е д с т в и е 3 (лемма о пяти гомоморфизмах). *Рассмотрим коммутативную диаграмму* A-*модулей*

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{M}_1 & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{M}_2 & \xrightarrow{u_2} & \mathrm{M}_3 & \xrightarrow{u_3} & \mathrm{M}_4 & \xrightarrow{u_4} & \mathrm{M}_5 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\ \mathrm{M}'_1 & \xrightarrow{u'_1} & \mathrm{M}'_2 & \xrightarrow{u'_2} & \mathrm{M}'_3 & \xrightarrow{u'_3} & \mathrm{M}'_4 & \xrightarrow{u'_4} & \mathrm{M}'_5, \end{array}$$

в которой строки точные.

(i) *Если гомоморфизмы f_2 и f_4 инъективны и f_1 сюръективен, то f_3 инъективен.*

(ii) *Если гомоморфизмы f_2 и f_4 сюръективны и f_5 инъективен, то f_3 сюръективен.*

В частности, если f_1, f_2, f_4 и f_5 — изоморфизмы, то тем же свойством обладает и f_3.

Для доказательства утверждения (i) положим $\tilde{M}_2 = \mathrm{Coker}(u_1)$, $\tilde{M}'_2 = \mathrm{Coker}(u'_1)$ и обозначим через $\tilde{f}_2 : \tilde{M}_2 \to \tilde{M}'_2$ отображение, полученное из f_2. Из следствия 2 (i) вытекает, что $\tilde{f}_2$ инъективно. Применяя следствие 1 (i) к диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M}_2 & \xrightarrow{\tilde{u}_2} & M_3 & \xrightarrow{u_3} & M_4 \\ {\scriptstyle \tilde{f}_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow \\ \tilde{M}'_2 & \xrightarrow{\tilde{u}'_2} & M'_3 & \xrightarrow{u'_3} & M'_4, \end{array}$$

где отображения $\tilde{u}_2$ и $\tilde{u}'_2$ получены из u_2 и u'_2, видим, что f_3 инъективно.

Для доказательства утверждения (ii) положим $\tilde{M}_4 = \mathrm{Ker}(u_4)$, $\tilde{M}'_4 = \mathrm{Ker}(u'_4)$ и обозначим через $\tilde{f}_4 : \tilde{M}_4 \to \tilde{M}'_4$ отображение, индуцированное f_4. Из следствия 2 (ii) вытекает, что $\tilde{f}_4$ сюръективно. Прменяя следствие 1 (ii) к диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} M_2 & \xrightarrow{u_2} & M_3 & \xrightarrow{\tilde{u}_3} & \tilde{M}_4 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{f}_4}\downarrow \\ M'_2 & \xrightarrow{u'_2} & M'_3 & \xrightarrow{\tilde{u}'_3} & \tilde{M}'_4, \end{array}$$

где $\tilde{u}_3$ и $\tilde{u}'_3$ получены из u_3 и u'_3, видим, что f_3 сюръективно.

3. Плоские модули

Определение 1. Говорят, что A-модуль E *плоский*, если для всякой точной последовательности правых A-модулей и гомоморфизмов

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \tag{11}$$

последовательность **Z**-линейных отображений

$$M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E \xrightarrow{v \otimes 1} M'' \otimes_A E \tag{12}$$

точная.

Предложение 3. *Для того чтобы* A-*модуль* E *был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для всякого инъективного гомоморфизма* u: $M' \to M$ *правых* A-*модулей отображение* $u \otimes 1 : M' \otimes_A E \to M \otimes_A E$ *было инъективным.*

Если модуль E плоский и отображение u: $M' \to M$ инъективно, то последовательность $0 \to M' \xrightarrow{u} M$ точная, следовательно, последовательность $0 \to M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E$ также точная, и отображение $u \otimes 1$ инъективно. Обратно, рассмотрим точную последовательность (11); положим: $M''_1 = v(M)$, и пусть i: $M''_1 \to M''$ – каноническое вложение и p: $M \to M''_1$ – отображение $m \mapsto v(m)$. Последовательность $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} M''_1 \to 0$ точная; согласно II, p. 58, prop. 5, последовательность $M' \otimes_A E \xrightarrow{u \otimes 1} M \otimes_A E \xrightarrow{p \otimes 1} M''_1 \otimes_A E$ точная. Кроме того, $v = i \circ p$, следовательно, $v \otimes 1 = (i \otimes 1) \circ (p \otimes 1)$; если E удовлетворяет условию из формулировки предложения, то отображение $i \otimes 1$ инъективно, следовательно,

$$\mathrm{Ker}(v \otimes 1) = \mathrm{Ker}(p \otimes 1) = \mathrm{Im}(u \otimes 1),$$

и последовательность (12) точная.

Предложение 4. (i) *Если* $(E_i)_{i \in I}$ – *семейство* A-*модулей*, $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ – *их прямая сумма. Для того чтобы* A-*модуль* E *был плоским, необходимо и достаточно чтобы каждый из модулей* E_i *обладал этим свойством.*

(ii) *Пусть* I – *направленное по возрастанию предупорядоченное множество*, $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ – *индуктивная система* A-*модулей относительно* I, $E = \varinjlim E_\alpha$ – *ее индуктивный предел. Если каждый из* A-*модулей* E_α *плоский, то* E – *плоский модуль.*

Пусть $M' \to M \to M''$ – точная последовательность правых A-модулей.

(i) Для того чтобы последовательность $\bigoplus_{i \in I} (M' \otimes_A E_i) \to \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A E_i) \to \bigoplus_{i \in I} (M'' \otimes_A E_i)$ была точной, необходимо и достаточно, чтобы каждая из последовательностей $M' \otimes_A E_i \to M \otimes_A E_i \to M'' \otimes_A E_i$ была точной (II, p. 13, prop. 7); это доказывает утверждение (i), поскольку $\oplus(M \otimes_A E_i)$ канонически отождествляется с $M \oplus_A E$ (II, p. 61, prop. 7).

(ii) По предположению, каждая из последовательностей $M' \otimes_A E_i \to M \otimes_A E_i \to M'' \otimes_A E_i$ точная, следовательно, такова же и последовательность $M' \otimes_A E \to M \otimes_A E \to M'' \otimes_A E$, поскольку переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорным произведением (II, p. 93, prop. 7) и сохраняет точность (II, p. 91, prop. 3).

Примеры. 1. Ясно, что A_s является плоским A-модулем; из предложения 4 (i) следует, что всякий свободный A-модуль и, более общо, всякий проективный A-модуль является плоским (см. также II, p. 63, cor. 6).

*Обратно, всякий *конечно представимый плоский* A-модуль проективен (п. 5).*

2. Согласно предложению 4 (ii), всякий A-модуль, представляющий собой индуктивный предел направленной индуктивной системы свободных A-модулей, является плоским. Мы докажем обратное в п. 6.

3. Если кольцо A полупросто, то всякий A-модуль проективен (VIII, § 5, n° 1, prop. 1), следовательно, плоский.

4. *Если A – артиново локальное кольцо (не обязательно коммутативное), то A-модуль является плоским если и только если он свободен (AC, II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5; Коммутативная алгебра, II, с. 119, следствие 2 предложения 5).*

5. Если A – целостное кольцо, то его поле частных K является плоским A-модулем (II, p. 118, prop. 27).

6. *В AC, II и III (Коммутативная алгебра, II и III), мы изучим два важных примера плоских A-модулей, когда A – коммутативное кольцо: кольца частных $S^{-1}A$ и, когда A – нётерово, отделимое пополнение кольца A относительно J-адической топологии.*

7. Пусть элемент $a \in A$ таков, что отображение $a_A : x \mapsto ax$ кольца A в себя инъективно ("a не является левым делителем 0"). Если E – плоский A-модуль, то гомотетия a_E инъективна, поскольку отождествляется с отображением $a_A \otimes 1 : A_d \otimes_A E \to A_d \otimes_A E$. В частности, *если A – целостное кольцо, то всякий плоский A-модуль не имеет кручения.* Обратно, *если A – кольцо главных идеалов, то всякий A-модуль без кручения плоский*: действительно, если A-модуль E не имеет кручения, то всякий подмодуль конечного типа в E свободен (VII, § 4, n° 4, cor. 2 au th. 4; Алгебра, VII, с. 54, следствие 2 теоремы 2), и E представляет собой возрастающее направленное объединение плоских подмодулей, следовательно, является плоским (предложение 4 (ii)).

8. Пусть B – кольцо и ρ: $A \to B$ – гомоморфизм. Если E – плоский A-модуль, то B-модуль $E_{(B)} = B \otimes_A E$ плоский. Пусть, действительно, u: $N' \to N$ – инъективный гомоморфизм правых B-модулей; тогда $u \otimes_B 1_{E_{(B)}}$ канонически отождествляется с гомоморфизмом $u \otimes_A 1_E : N' \otimes_A E \to N \otimes_A E$, который инъективен, если E плоский.

9. Предположим, что $A = K[X, Y]$, где K – поле. Тогда максимальный идеал $\mathfrak{m}$, порожденный X и Y, является A-модулем без кручения, но не плоским. Рассмотрим, действительно, кольцо $B = A/(Y)$, которое изоморфно $K(X)$, следовательно, целостное. B-модуль $\mathfrak{m}_{(B)}$ изоморфен модулю $\mathfrak{m}/Y\mathfrak{m} = (X, Y)/(XY, Y^2)$, в котором класс Y периодический. Следовательно, $\mathfrak{m}_{(B)}$ не является плоским B-модулем, поэтому и $\mathfrak{m}$ не плоский.

10. Предположим, что кольцо A коммутативное. Пусть B – алгебра $A[X_1, \ldots, X_n]/(P)$, где P – ненулевой многочлен. Для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ в A обозначим через $\mathbf{k}(\mathfrak{p})$ поле частных целостного кольца $A/\mathfrak{p}$, через $E(\mathfrak{p})$ – алгебру $\mathbf{k}(\mathfrak{p})[X_1, \ldots, X_n]$ и через $P(\mathfrak{p})$ – образ P в $E(\mathfrak{p})$ при каноническом отображении.

Можно доказать, что для того чтобы алгебра B была плоским A-модулем, достаточно, чтобы $P(\mathfrak{p}) \neq 0$ для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ в A. Если A целостное, то это условие и необходимое.

*На геометрическом языке мы рассматриваем проекцию π: $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$. Для всякого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ слой $\pi^{-1}(\mathfrak{p})$ отождествляется с подмногообразием $V_{\mathfrak{p}}$ аффинного пространства $A^n_{k(\mathfrak{p})}$ = Spec (E($\mathfrak{p}$)), определяемым многочленом P($\mathfrak{p}$), и множество F тех простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых это подмногообразие совпадет со всем пространством (т.е. для которых P($\mathfrak{p}$) = 0), представляет собой замкнутое подмножество в Spec (A). Предыдущее условие означает, что это замкнутое подмножество пусто, иначе говоря, что для всякого $\mathfrak{p}$ подмногообразия $V_\mathfrak{p}$ является гиперповерхностью в $A^n_{k(\mathfrak{p})}$. ♦

11. * Пусть S и X – два комплексиых аналитических пространства и f: X → S – некоторый морфизм. Говорят, что f *плоский* в точке x из X, если кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$, рассматриваемое как $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-модуль посредством гомоморфизма $f^*: \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, является плоским. Множество точек X, в которых морфизм f плоский, открыто в X, и ограничение f на это открытое множество является открытым отображением. Если X и S – связные аналитические многообразия конечной размерности, то морфизм f плоский (во всякой точке из X) в том и только том случае, если f(X) – открытое миожество в S и все слои $f^{-1}(s)$ для $s \in f$(X) имеют одну и ту же размерность. ♦

4. Конечно представимые модули

Представлением (или *представлением длины* 1) A-модуля E называется точная последовательность A-модулей

$$L_1 \to L_0 \to E \to 0, \tag{13}$$

в которой L_0 и L_1 свободны.

Всякий A-модуль E допускает представление. Действительно, известно (II, p. 27, prop. 20), что существует сюръективный гомоморфизм u: $L_0 \to E$, где L_0 – свободный модуль; если R – ядро u, то существует также сюръективный гомоморфизм v: $L_1 \to R$, где L_1 – свободный модуль. Если рассматривать v как гомоморфизм L_1 в L_0, то последовательность $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ является точиой по определению, откуда следует наше утверждение.

Если ρ: A → B – гомоморфизм колец, то представление (13) модуля E дает представление модуля $E_{(B)} \doteq B \otimes_A E$:

$$B \otimes_A L_1 \to B \otimes_A L_0 \to B \otimes_A E \to 0, \tag{14}$$

ввиду II, p. 58, prop. 5 и того факта, что $B \otimes_A L$ – свободный B-модуль, когда L свободен.

Говорят, что представление (13) модуля E *конечное*, если свободные модули L_0 и L_1 имеют конечные базисы. Ясно, что если представление (13) конечное, то таково же и представление (14). Говорят, что E – *конечно представимый* A-*модуль*, если он допускает *конечное представление.*

Предложение 5. (i) *Всякий модуль, допускающий конечное представление, является модулем конечного типа.*

(ii) *Если кольцо* A *нётерово слева, то всякий* A-*модуль конечного типа допускает конечное представление.*

(iii) *Всякий проективный модуль конечного типа допускает конечное представление.*

Утверждение (i) тривиально следует из определений. Предположим, что A иётерово слева и E – модуль конечного типа. Тогда существует сюръективный гомоморфизм u: $L_0 \to E$, где L_0 – свободный A-модуль, обладающий конечным базисом; ядро R гомоморфизма u имеет конечный тип, следовательио, существует сюръективный гомоморфизм v: $L_1 \to R$, где L_1 – свободный модуль с конечным базисом, и точная последовательиость $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ служит конечным представлением для E, что даст утверждение (ii).

Наконец, предположим, что E – проективный модуль конечного типа; он является тогда прямым слагаемым некоторого свободного модуля конечного типа L_0 (II, p. 40, cor. 1); ядро R сюръективного гомоморфизма $L_0 \to E$ изоморфно тогда некоторому фактормодулю модуля L_0, следовательно, имеет конечный тип, и доказательство заканчивается как и выше.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть* A – *кольцо,* E – *конечно представимый* A-*модуль. Для всякой точной последовательности*

$$0 \to F \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} E \to 0,$$

где G – *модуль конечного типа, модуль* F *имеет конечный тип.*

Пусть $L_1 \xrightarrow{r} L_0 \xrightarrow{s} E \to 0$ – некоторое конечное представление; если (e_i) – базис модуля L_0, то для всякого i существует такой элемент $g_i \in G$, что $p(g_i) = s(e_i)$; следовательно, гомоморфизм u: $L_0 \to G$, при котором $u(e_i) = g_i$, таков, что $s = p \circ u$. Так как $s \circ r = 0$, то $u(r(L_1)) \subset \operatorname{Ker} p$, и так как модуль $\operatorname{Ker} p$ изоморфен F, то мы видим, что существует гомоморфизм v: $L_1 \to F$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "v"'] & L_0 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "1_E"'] & 0 \\ F \arrow[r, "j"'] & G \arrow[r, "p"'] & E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как гомоморфизм j инъективен, а s сюръективен, то можно применить предложение 2 (с. 9), т.е. имеется точная последовательность

$$\operatorname{Ker} 1_E \xrightarrow{d} \operatorname{Coker} v \to \operatorname{Coker} u \to \operatorname{Coker} 1_E.$$

Она показывает, что модуль $\operatorname{Coker} v$ изоморфен модулю $G/u(L_0)$, который, по предположению, конечного типа. Кроме того, имеем точную последовательность

$$0 \to v(L_1) \to F \to \operatorname{Coker} v \to 0,$$

и так как $v(L_1)$ и $\operatorname{Coker} v$ имеют конечный тип, то из нее заключаем, что тем же свойством обладает и F (II, p. 17, cor. 5).

П р е д л о ж е н и е 7. *Пусть* M – A-*модуль. Существует направленное по возрастанию упорядоченное множество* I *и индуктивная система относительно* I *конечно представимых модулей* $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$, *для которой модуль* M *изоморфен* $\varinjlim M_\alpha$. Если M обладает системой порождающих из n элементов, то можно предполагать, что тем же свойством обладают и M_α.

Рассмотрим представление

$$A_s^{(K)} \xrightarrow{u} A_s^{(L)} \xrightarrow{v} M \to 0;$$

пусть I – множество таких пар $\alpha = (K', L')$, где K' (соответственно L') – конечное подмножество в K (соответственно в L), что u индуцирует отображение u_α подмодуля $A_s^{K'}$ модуля $A_s^{(K)}$ в подмодуль $A_s^{L'}$ модуля $A_s^{(L)}$; для $\alpha \in I$ пусть M_α – коядро u_α и v_α: $A_s^{L'} \to M_\alpha$ – канонинческое отображение, так что получаем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd} A_s^{(K)} \arrow[r, "u"] & A_s^{(L)} \arrow[r, "v"] & M \arrow[r] & 0 \\ A_s^{K'} \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[u, "i_\alpha"] & A_s^{L'} \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[u, "j_\alpha"] & M_\alpha \arrow[r] \arrow[u, "f_\alpha"] & 0, \end{tikzcd}$$

где i_α и j_α – канонические вложения, а f_α индуцировано отображением j_α при переходе к фактормодулям. Упорядочим множество I посредством отношения:

$$\alpha = (K', L') \leqslant \beta = (K'', L''), \text{ если } K' \subset K'', \ L' \subset L'';$$

для $\alpha \leqslant \beta$ пусть $\varphi_{\beta\alpha}$: $M_\alpha \to M_\beta$ – гомоморфизм, получаемый при переходе к фактормодулям из вложения $A_s^{L'}$ в $A_s^{L''}$. Тотчас проверяется, что упорядоченное множество I направленное, что $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ – индуктивная система A-модулей и что (φ_α) – индуктивная система A-гомоморфизмов. При переходе к индуктивному пределу получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} A_s^{(K)} & \xrightarrow{u} & A_s^{(L)} & \xrightarrow{r} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & {\scriptstyle j}\uparrow & & {\scriptstyle \varphi}\uparrow & & \\ \varinjlim A_s^{K'} & \longrightarrow & \varinjlim A_s^{L'} & \longrightarrow & \varinjlim M_\alpha & \longrightarrow & 0\ ; \end{array} \tag{15}$$

строки этой диаграммы точные (II, p. 91, prop. 3); так как i и j биективны, то и φ биективно, что доказывает предложение.

5. Гомоморфизмы конечно представимых модулей

Пусть E – A-модуль. Если I – направленное предупорядоченное множество и (G_i, u_{ji}) – индуктивная система A-модулей относительно I, то канонические отображения $G_i \to \varinjlim G_i$ индуцируют гомоморфизмы $\mathrm{Hom}_A(E, G_i) \to \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim G_i)$, что дает *канонический* гомоморфизм

$$\varinjlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_A(E, G_i) \to \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim_{i \in I} G_i). \tag{16}$$

Пусть B – другое кольцо, F – B-модуль, G – (A, B)-бимодуль; тогда определен (II, p. 75) канонический гомоморфизм:

$$\mathrm{Hom}_A(E, G) \otimes_B F \to \mathrm{Hom}_A(E, G \otimes_B F). \tag{17}$$

Предложение 8. а) *Если A-модуль E конечного типа (соответственно конечно представимый), то канонический гомоморфизм* (16) *инъективен (соответственно биективен)*.

б) *Предположим, что B-модуль F плоский; если A-модуль E конечного типа (соответственно конечно представимый), то канонический гомоморфизм* (17) *инъективен (соответственно биективен)*.

Докажем, например, б) (доказательство утверждения а) аналогично). Считаем A, B, F, G фиксированными и для всякого A-модуля E положим

$$T(E) = \mathrm{Hom}_A(E, G) \otimes_B F, \quad T'(E) = \mathrm{Hom}_A(E, G \otimes_B F)$$

и обозначим через ν_E гомоморфизм (17); для всякого гомоморфизма A-модулей $v\colon E \to E'$ положим $T(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_G) \otimes 1_F$ и $T'(v) = \mathrm{Hom}(v, 1_G \otimes 1_F)$. Пусть $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{w} E \to 0$ – представление E; предполагаем, что свободный модуль L_0 (соответственно свободные модули L_0 и L_1) конечного типа. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & T(E) & \xrightarrow{T(w)} & T(L_0) & \xrightarrow{T(v)} & T(L_1) \\ & & {\scriptstyle \nu_E}\downarrow & & {\scriptstyle \nu_{L_0}}\downarrow & & {\scriptstyle \nu_{L_1}}\downarrow \\ 0 & \to & T'(E) & \xrightarrow[T'(w)]{} & T'(L_0) & \xrightarrow[T'(v)]{} & T'(L_1) \end{array} \tag{18}$$

коммутативна, и ее вторая строка точная (II, p. 36, th. 1); кроме того, последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(L_0, G) \to \mathrm{Hom}(L_1, G)$$

точная (II, p. 36, th. 1), и так как F *плоский*, то первая строка в (18) – тоже точная последовательность (с. 12, определение 1). Известно, что гомоморфизм ν_{L_0} биективен (соответственно ν_{L_0} и ν_{L_1} биективны) (II, p. 75, prop. 2). Если предполагать только, что ν_{L_0} биективен, то из (18) следует, что гомоморфизм $\nu_{L_0} \circ T(w) = T'(w) \circ \nu_E$ инъективен и, таким образом, ν_E также инъективен. Если предполагать, что ν_{L_0} и ν_{L_1}