В.Б. Алексеев

Теорема Абеля в задачах и решениях

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.Б. Алексеев

В11 Теорема Абеля в задачах и решениях / В.Б. Алексеев – М.: Книга по Требованию, 2024. – 207 с.

ISBN 978-5-458-25793-0

Из этой книги читатель узнает, как решать алгебраические уравнения 3-й и 4-й степени с одним неизвестным и почему для решения уравнений более высокой степени не существует общих формул (в радикалах). При этом он познакомится с двумя очень важными разделами современной математики - теорией групп и теорией функций комплексного переменного. Одна из основных целей данной книги - дать возможность читателю попробовать свои силы в математике. Для этого почти весь материал представлен в виде определений, примеров и большого числа задач, снабженных указаниями и решениями.

ISBN 978-5-458-25793-0

Предисловие

В курсе средней школы подробно изучаются алгебраические уравнения с одним неизвестным 1-й степени (линейные) и 2-й степени (квадратные). При этом оказывается, что для решения таких уравнений существуют общие формулы, выражающие корни уравнения через его коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. А существуют ли подобные формулы для решения алгебраических уравнений более высоких степеней, знают очень немногие. Оказывается, что для уравнений 3-й и 4-й степени такие формулы тоже существуют. Методы решения этих уравнений мы рассмотрим во «Введении». Если же рассмотреть общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й, то оказывается, что оно не разрешимо в радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни такого уравнения через коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. Это и есть теорема Абеля.

Одна из целей данной книги — познакомить читателя с доказательством теоремы Абеля. Мы не будем здесь подробно рассматривать результаты, полученные несколько позже французским математиком Эваристом Галуа, который рассмотрел не общие, а конкретные алгебраические уравнения с фиксированными числовыми коэффициентами, и для таких уравнений нашел условие, при котором корни уравнения можно выразить через коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. Тем, кто захочет ближе познакомиться с результатами Галуа, можно рекомендовать книгу Постникова М. М. «Теория Галуа»*).

---

*) Постников М. М., Теория Галуа, Физматгиз, 1963.

Из общих результатов Галуа можно, в частности, получить и теорему Абеля. Однако в этой книге мы пойдем по другому пути, который позволит читателю познакомиться с двумя очень важными разделами современной математики — теорией групп и теорией функций комплексного переменного. Читатель узнает, что́ такое (в математике) группа, поле и какими свойствами они обладают. Узнает, что́ такое комплексные числа и почему именно так, а не иначе они определяются. Узнает, что́ такое риманова поверхность и в чем состоит «основная теорема алгебры комплексных чисел».

Автор будет сопровождать читателя на этом пути, но даст ему широкую возможность испытать свои собственные силы. Для этого читателю будет предложено большое число задач. Задачи расположены непосредственно в основном тексте книги и являются фактически составной частью основного текста. Задачи имеют сплошную нумерацию, которая выделена полужирным шрифтом. Если какие-то задачи окажутся читателю не под силу, то ему на помощь придут «Указания, решения и ответы».

Книга содержит много понятий, возможно новых для читателя. Чтобы читатель мог легче в них ориентироваться, в конце книги приведен алфавитный список понятий с указанием страниц, на которых эти понятия определяются.

Книга написана на основе лекций, прочитанных в разные годы профессором Московского университета Владимиром Игоревичем Арнольдом и автором в Московской физико-математической школе-интернате № 18 при МГУ. Автор благодарен В. И. Арнольду, высказавшему ряд ценных замечаний при подготовке рукописи этой книги. Я благодарю также Александра Васильевича Михалева, взявшего на себя большой труд редактирования этой книги и во многом способствовавшего ее улучшению.

В. Б. Алексеев

Введение

Мы начнем эту книгу с рассмотрения вопроса о том, как решаются алгебраические уравнения с одним неизвестным от 1-й до 4-й степени. Методы решения алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени были известны еще математикам древнего мира, методы решения алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени были разработаны лишь в XVI веке.

Общим алгебраическим уравнением с одним неизвестным степени n называется уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором $a_0 \neq 0$*).

При $n = 1$ получаем линейное уравнение

$$a_0x + a_1 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Это уравнение имеет, очевидно, единственное решение

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

при любых значениях коэффициентов.

При $n = 2$ получаем квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

(вместо a_0, a_1, a_2 мы пишем здесь a, b, c, как принято в школе). Разделив обе части этого уравнения на a и положив $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

---

*) Коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n можно пока считать произвольными действительными числами.

После преобразований получаем

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \quad \text{и} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \qquad (2)$$

В курсе средней школы далее рассматривается только случай $\frac{p^2}{4} - q \geqslant 0$. Если же $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то говорят, что равенство (2) не может иметь место и уравнение (1) не имеет действительных корней. Чтобы не возникало таких исключений, нам удобнее будет рассматривать в дальнейшем алгебраические уравнения не в области действительных чисел, а в более широкой области комплексных чисел.

Подробно (вместе с определением) мы будем рассматривать комплексные числа в главе II. Пока читателю достаточно знать или принять на веру следующие утверждения о комплексных числах:

1) множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел, т. е. действительные числа содержатся среди комплексных чисел, так же как, например, целые числа содержатся среди действительных;

2) комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в натуральную степень, причем все эти операции обладают всеми основными свойствами соответствующих операций для действительных чисел;

3) если z — комплексное число, не равное нулю, и n — натуральное число, то существует ровно n корней n-й степени из z, т. е. n комплексных чисел w таких, что $w^n = z$. При $z = 0$ имеем $\sqrt[n]{0} = 0$. Если w_1 и w_2 — корни 2-й степени из числа z, то $w_2 = -w_1$.

Ниже мы не только будем интересоваться как действительными, так и комплексными корнями уравнений, но и в качестве коэффициентов этих уравнений будем рассматривать произвольные комплексные числа. При этом приведенные выше рассуждения о линейных и квадратных уравнениях останутся в силе, что вытекает из указанного выше свойства 2) комплексных чисел.

Продолжим рассмотрение квадратного уравнения. В области комплексных чисел равенство (2) при любых значениях p и q равносильно равенству

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

где под $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ понимается какое-нибудь одно определенное значение корня второй степени.

Таким образом,

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad (3)$$

Переходя к a, b, c, получим

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

Для дальнейшего нам понадобятся два факта, относящиеся к уравнениям 2-й степени:

1) теорема Виета *): комплексные числа x_1 и x_2 в том и только в том случае являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$, если $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Действительно, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то выполняется равенство (3). Отсюда $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Обратно, если $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, то, заменяя p и q в уравнении $x^2+px+q=0$ их выражениями через x_1 и x_2, получим $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=(x-x_1)(x-x_2)=0$, и, следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$;

2) квадратный трехчлен ax^2+bx+c является полным квадратом (т. е.

$$ax^2+bx+c=\left[\sqrt{a}\,(x-x_0)\right]^2$$

для некоторого комплексного числа x_0) тогда и только тогда, когда корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ совпадают (оба они должны равняться x_0). Это имеет место в том и только в том случае (см. формулу (4)), когда $b^2-4ac=0$. Выражение b^2-4ac называется *дискриминантом* квадратного трехчлена.

Рассмотрим теперь приведенное уравнение 3-й степени

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \qquad (5)$$

---

*) Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик.

(Общее уравнение 3-й степени сводится к приведенному делением на a_0.) Сделаем замену $x = y + d$, где d мы выберем позднее. Получим

$$(y + d)^3 + a(y + d)^2 + b(y + d) + c = 0.$$

Раскрыв все скобки и приведя подобные относительно y члены, получим уравнение

$$y^3 + (3d + a)y^2 + (3d^2 + 2ad + b)y + \\ + (d^3 + ad^2 + bd + c) = 0.$$

Коэффициент при y^2 в этом уравнении равен $3d + a$. Поэтому если мы возьмем $d = -\frac{a}{3}$, то после замены $x = y - \frac{a}{3}$ мы приведем уравнение к виду

$$y^3 + py + q = 0, \tag{6}$$

где p и q — некоторые многочлены от a, b, c.

Пусть y_0 — корень уравнения (6). Представив его в виде $y_0 = \alpha + \beta$ (где α и β пока неизвестны), получим

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

и

$$\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta + p) + q = 0. \tag{7}$$

Посмотрим, можно ли на α и β наложить дополнительное условие

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}.$$

В этом случае получим для α и β два уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta = y_0, \\ \alpha\beta = -\frac{p}{3}. \end{cases}$$

По теореме Виета для любого y_0 такие α и β действительно существуют (возможно, комплексные) и являются корнями уравнения

$$w^2 - y_0 w - \frac{p}{3} = 0.$$

Если мы возьмем такие α и β (пока еще неизвестные нам), то уравнение (7) приведется к виду

$$\alpha^3+\beta^3+q=0. \tag{8}$$

Возводя обе части уравнения $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$ в 3-ю степень и объединяя полученное уравнение с (8), будем иметь

$$\begin{cases} \alpha^3+\beta^3=-q, \\ \alpha^3\cdot\beta^3=-\frac{p^3}{27}, \end{cases}$$

откуда по теореме Виета α^3 и β^3 являются корнями уравнения

$$w^2+qw-\frac{p^3}{27}=0.$$

Таким образом,

$$\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \text{ и } \beta^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

где опять под $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ понимается одно определенное значение корня 2-й степени. Отсюда корни уравнения (6) выражаются формулой

$$y_{1,2,3}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

причем для каждого из трех значений первого корня 3-й степени *) нужно брать соответствующее значение второго так, чтобы выполнялось условие $\alpha\beta=-\frac{p}{3}$.

Полученная формула носит название *формулы Кардано* **). Подставив в нее вместо p и q их выражения через a, b, c и вычитая $\frac{a}{3}$, получим формулу для корней уравнения (5). Делая затем замену: $a=\frac{a_1}{a_0}$, $b=\frac{a_2}{a_0}$,

---

*) См. указанное выше свойство 3) комплексных чисел.

**) Дж. Кардано (1501—1576) — итальянский математик.

$c = \frac{a_3}{a_0}$, получим формулу для корней общего уравнений 3-й степени.

Рассмотрим теперь приведенное уравнение 4-й степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{9}$$

(Общее уравнение сводится к приведенному делением на a_0.) Сделав замену переменной $x = y - \frac{a}{4}$, подобную замене, сделанной в случае уравнения 3-й степени, приведем уравнение (9) к виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{10}$$

где p, q и r — некоторые многочлены от a, b, c, d.

Уравнение (10) будем решать методом, который носит название *метода Феррари* *). Преобразуем левую часть уравнения (10) следующим образом:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + qy + \left(r - \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

и

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + \alpha^2 - qy + \frac{p^2}{4} - r\right] = 0, \tag{11}$$

где α — произвольное число. Постараемся теперь подобрать α так, чтобы многочлен 2-й степени относительно y

$$2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right),$$

стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Как было отмечено выше, для того чтобы он был полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого многочлена равнялся нулю, т. е.

$$q^2 - 8\alpha\left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right) = 0. \tag{12}$$

---

*) Л. Феррари (1522—1565) — итальянский математик, ученик Кардано.

Раскрывая скобки, получим для нахождения α уравнение 3-й степени, которое мы умеем решать. Если в качестве α взять один из корней уравнения (12), то выражение, стоящее в квадратных скобках в (11), будет полным квадратом. В этом случае левая часть уравнения (11) является разностью квадратов и поэтому может быть разложена в произведение двух многочленов 2-й степени относительно y. После этого остается решить два получившихся уравнения 2-й степени.

Таким образом, уравнение 4-й степени всегда может быть решено и, более того, можно, аналогично случаю 3-й степени, получить формулу, выражающую корни общего уравнения 4-й степени через коэффициенты уравнения с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.

Долгое время математики пытались найти метод решения в радикалах общего уравнения 5-й степени. Однако в 1824 г. норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802 — 1829) доказал следующую теорему.

Теорема Абеля. *Общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й неразрешимо в радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни общего уравнения степени выше 4-й через коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.*

Мы сможем доказать эту теорему в конце книги. Однако для этого нам потребуются такие математические понятия, как группа, разрешимая группа, функция комплексного переменного, риманова поверхность и т. д. Со всеми этими и другими математическими понятиями мы и познакомим читателя в дальнейшем на страницах этой книги. Начнем мы с рассмотрения очень важного в математике понятия группы.

Глава I

Группы

Исследование алгебраических уравнений в начале XIX века привело математиков к необходимости выделения особого математического понятия — понятия группы. Новое понятие оказалось настолько плодотворным, что не только проникло почти во все разделы современной математики, но и стало играть важную роль в некоторых разделах других наук, например в квантовой механике и в кристаллографии. Исследования, связанные с понятием группы, выросли в отдельную ветвь современной математики — теорию групп. Что же представляет собой понятие группы в математике? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с рассмотрения некоторых примеров.

§ 1. Примеры

Уже в арифметике мы сталкиваемся с операциями, которые двум данным числам ставят в соответствие третье число. Так операция сложения паре чисел (3, 5) ставит в соответствие число 8, а паре (2, 2) число 4. Операция вычитания, если ее рассматривать на множестве всех целых чисел, также ставит в соответствие каждой паре целых чисел определенное целое число. При этом здесь надо указать не только пару чисел, но и порядок этих чисел. Так, паре (5, 3) вычитание ставит в соответствие число 2, а паре (3, 5) число —2. Таким образом, пары (5, 3) и (3, 5) должны рассматриваться как различные.

Пары, в которых задан порядок элементов, мы будем называть *упорядоченными парами*.

Определение. Пусть M — некоторое множество элементов произвольной природы. Если каж-