С.Г. Михлин

Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.Г. Михлин
С11 Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин – М.: Книга по Требованию, 2016. – 304 с.

ISBN 978-5-458-28288-8

ISBN 978-5-458-28288-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние два-три десятилетия появилось много работ, в которых задачи, важные как теоретически, так и для приложений, решаются методом интегральных уравнений.

Достаточно, например, отметить работы по статической теории упругости и по задаче обтекания в гидродинамике. Известно также, какую важную роль играет метод интегральных уравнений в теории колебаний, в задачах об устойчивости сжатых стержней и во многих других задачах.

Мне кажется, что назрела необходимость в систематизации обширного материала по приложениям интегральных уравнений, который накопился в журнальной литературе в указанный период. Попыткой такой систематизации и является настоящая книга.

Книга состоит из двух глав, не одинаковых по величине. Первая глава содержит основные факты теории интегральных уравнений, а также методы приближённого их решения. Особое место занимает в этой главе теория сингулярных интегральных уравнений, содержащих главное значение интеграла. Достаточно хорошо разработанная, имеющая многочисленные и весьма плодотворные приложения, она, тем не менее, до сих пор не нашла своего места в курсах интегральных уравнений. Я счёл необходимым дать здесь краткое изложение основ этой теории.

Значительная часть первой главы содержит вещи, излагаемые обычно в курсах интегральных уравнений. Как правило, в таких случаях я излагаю только результат, отсылая читателя за доказательством к соответствующим курсам.

Везде, где это представлялось возможным, результаты теории иллюстрируются численными примерами.

Вторая глава, значительно превосходящая первую по объёму, посвящена приложениям. Перечень задач, решаемых во второй главе, ясен из оглавления. Здесь отмечу, что я остановил своё внимание преимущественно на задачах теории упругости и гидродинамики. В этом сказались не только личные вкусы автора, но и то, что в этих двух областях приложения интегральных уравнений наиболее многочисленны. Далее, я ограничиваюсь преимущественно линейными и плоскими задачами. Метод интегральных уравнений часто упрекают, и не без известных оснований, в недостаточной эффективности. Этот упрёк особенно справедлив по отношению к трёхмерным задачам. Желая ограничиться теми случаями, когда возможно получить эффективное решение, я был вынужден отказаться от рассмотрения пространственных задач.

За всякие указания недочётов буду весьма признателен.

Ленинград
Июль 1944 г.

С. Михлин

ГЛАВА I

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА

1. Классификация интегральных уравнений. Многочисленные задачи механики, математической физики и техники приводят к рассмотрению уравнений вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция. Эти уравнения называются *интегральными*, так как неизвестная функция содержится в них под знаком интеграла.

Мы не будем здесь приводить этих задач, так как большое их число будет разобрано во второй главе, и приступим непосредственно к изучению самих уравнений.

Входящие в интегральное уравнение (1) известные элементы носят следующие названия: функция $f(x)$ называется правой частью, функция $K(x, s)$ — ядром, и численный множитель λ — параметром уравнения. Вводить параметр не обязательно; его можно всегда сделать равным единице, если обозначить произведение $\lambda K(x, s)$ через $K_1(x, s)$ и рассматривать $K_1(x, s)$ как новое ядро. Мы увидим, однако, что введение этого параметра оказывается очень полезным при изучении интегральных уравнений.

Мы будем считать, что пределы a и b — конечные постоянные.

Заметим, что параметр λ и функции $\varphi(x)$, $K(x, s)$ и $f(x)$ могут принимать как действительные, так и комплексные значения.

Характер интегрального уравнения в существенном определяется свойствами его ядра. В приложениях часто приходится иметь дело с непрерывным ядром, но встречаются и разрывные ядра. Мы будем рассматривать следующие три типа интегральных уравнений:

1. Если ядро $K(x, s)$ непрерывно при $a \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant s \leqslant b$ или, по крайней мере, если разрывы ядра таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)|\, dx\, ds,$$

имеет конечное значение, то мы будем называть уравнение (1) *уравнением типа Фредгольма*.

2. Если ядро имеет вид

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x - s|^\alpha},$$

где $H(x, s)$ ограничена, а α — постоянная, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \alpha < 1,$$

то мы будем называть уравнение (1) *уравнением со слабой особенностью*.

3. К третьему типу интегральных уравнений мы придём, если будем рассматривать ядра вида

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{x - s},$$

где числитель $A(x, s)$ — дифференцируемая функция от x и s[1]). В этом случае интеграл

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds = \int_a^b \frac{A(x, s)}{x - s}\varphi(s)\, ds,$$

входящий в уравнение (1), расходится. Однако, при весьма широких предположениях относительно функции $\varphi(x)$

---

[1]) Это допущенне можно заменить менее сильным.

существует главное значение этого интеграла, т. е. предел [1]):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{x-\varepsilon} K(x,\ s)\varphi(s)\,ds+\int\limits_{x+\varepsilon}^{b} K(x,\ s)\varphi(s)\,ds\right).$$

Если теперь в уравнении (1) понимать расходящийся интеграл в смысле его главного значения, то мы приходим к третьему типу интегральных уравнений, которые мы будем называть *сингулярными*.

Приведём несколько примеров.

а) Уравнение

$$\varphi(x)-\int\limits_0^1 (x^2+s^2)\,\varphi(s)\,ds=x^2$$

— типа Фредгольма, так как его ядро $K(x,\ s)=x^2+s^2$ непрерывно при $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant s\leqslant 1$. В этом уравнении $\lambda=1$, $f(x)=x^2$.

б) Уравнение

$$\varphi(x)-\int\limits_0^l \ln|x-s|\,\varphi(s)\,ds=f(x)$$

— также фредгольмовское, так как, хотя его ядро терпит разрыв при $x=s$, но двойной интеграл

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^l \ln^2|x-s|\,dx\,ds$$

конечен.

в) Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}\,ds=f(x);\quad 0<\alpha<1. \qquad (*)$$

Пусть $f(x)$ определена и, скажем, непрерывна в промежутке $0\leqslant x\leqslant a$. Тогда наше уравнение имеет смысл рассматривать в этом промежутке. Оно подходит под

---

[1]) Подробнее о понятии главного значения интеграла см. § 3, пп. 20 и 21.

общий вид (1), хотя это и не так очевидно, как в первых двух примерах. Чтобы убедиться в том, что уравнение (*), действительно, подходит под тип (1), положим

$$K(x,\ s)=\begin{cases}(x-s)^{-\alpha}, & s\leqslant x,\\ 0, & s>x.\end{cases}$$

Теперь уравнение (*) записывается в виде (1):

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^a K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x).$$

Уравнение (*) — со слабой особенностью; оно будет одновременно и фредгольмовским, если $0<\alpha<\frac{1}{2}$, так как тогда двойной интеграл

$$\int_0^a\int_0^a K^2(x,\ s)\,dx\,ds=\int_0^a dx\int_0^x\frac{ds}{(x-s)^{2\alpha}}=\frac{a^{2-2\alpha}}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}$$

конечен.

г) Уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,\varphi(s)\,ds=f(x),$$

в котором интеграл понимается в смысле его главного значения, — сингулярное, так как его ядро можно представить в виде

$$\frac{1}{x-s}\,(x-s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2},$$

а функция

$$(x-s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}$$

непрерывна и дифференцируема в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

По поводу нашей классификации необходимо заметить следующее. Прежде всего, она — неполная; можно указать многие типы интегральных уравнений, не подходящие под перечисленные три. Мы, однако, ограничиваемся только этими тремя, как особо важными для приложений. Далее, различие между уравнениями типа Фредгольма и уравнениями со слабой особенностью не очень существенно. За некоторыми исключениями, важнейшие результаты теории совпадают для уравнений обоих типов.

В ряде случаев приходится рассматривать интегральные уравнения, в которых неизвестная функция определена не на отрезке оси x, а на некоторой кривой, плоской или пространственной, или на области, двух- или трёхмерной. Первый случай не представляет ничего нового: достаточно в качестве независимой переменной ввести длину дуги кривой или иной параметр, определяющий положение точки на кривой, и мы приходим к рассмотренному уже типу уравнений.

Если неизвестная функция определена в n-мерной области Ω (в случаях, интересных для приложений, n обычно равняется двум или трём, вообще же n может быть любым), то вместо (1) мы будем иметь дело с уравнением

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\Omega} K(M, M_1) \varphi(M_1) dM_1 = f(M), \tag{2}$$

где M и M_1 — точки области Ω, а dM_1 — элемент области. Попрежнему будем называть λ параметром, функцию $K(M, M_1)$ — ядром и $f(M)$ — правой частью интегрального уравнения (2). Классифицировать уравнения типа (2) мы будем следующим образом.

Если интеграл

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K^2(M, M_1)| \, dM \, dM_1$$

имеет конечное значение, то мы отнесём уравнение (2) к типу Фредгольма. В частности, уравнение (2) будет фредгольмовским, если ядро непрерывно или хотя бы ограничено.

Обозначим через r расстояние между точками M и M_1. Мы отнесём уравнение (2) к типу уравнений со слабой особенностью, если его ядро имеет вид

$$K(M, M_1) = \frac{H(M, M_1)}{r^{\alpha}},$$

где $H(M, M_1)$ — ограниченная функция и α лежит в пределах $0 < \alpha < n$.

Можно дать определение и сингулярного интегрального уравнения с несколькими независимыми переменными. Мы этого делать не будем, потому что такие уравнения менее интересны для приложений.

Интегральное уравнение называется *однородным*, если его правая часть тождественно равна нулю. Однородное уравнение, следовательно, имеет вид

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=0, \tag{3}$$

или, соответственно,

$$\varphi(M)-\lambda\int_\Omega K(M, M_1)\varphi(M_1)\,dM_1=0. \tag{4}$$

Если правая часть не равна тождественно нулю, то уравнение называется *неоднородным*.

Теория, а также практические методы решения уравнений Фредгольма и уравнений со слабой особенностью полностью совпадают для случаев как одной, так и нескольких независимых переменных. Мы будем поэтому рассматривать в ближайших параграфах только уравнения с одной независимой переменной. Сформулировать полученные результаты для случая нескольких независимых переменных не составит никакого труда.

Уравнения вида (1) и (2) называются *интегральными уравнениями второго рода*, в отличие от *уравнений первого рода*, которые имеют вид

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \tag{5}$$

или, в случае нескольких переменных,

$$\int_\Omega K(M, M_1)\varphi(M_1)\,dM_1=f(M). \tag{6}$$

Большое значение для приложений имеют сингулярные уравнения первого рода; уравнения Фредгольма первого рода в этом плане значительно менее интересны, и мы ими не будем заниматься.

2. Метод последовательных приближений. Приступим к решению интегральных уравнений. В пунктах 2—9 этого