Н.К. Бари

Теория рядов

Курс математического анализа. Часть 4

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н.К. Бари
Н11 Теория рядов: Курс математического анализа. Часть 4 / Н.К. Бари – М.: Книга по Требованию, 2014. – 142 с.

ISBN 978-5-458-34270-4

Учебник для высших педагогических учебных заведений

ISBN 978-5-458-34270-4

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	Строка	Напечатано:	Следует:
77	9 св.	$\|a_1x'\| + 2\|a_2x'\|^2 + 3\|a_3x'\|^3 + \ldots + n\|a_nx'\|^n + \ldots$	$\|a_1\|\,\|x'\| + 2\|a_2\|\,\|x'\|^2 + 3\|a_3\|\,\|x'\|^3 + \ldots + n\|a_n\|\,\|x'\|^n + \ldots$
77	11 св.	$\|a_1x'\| + \|a_2x'\|^2 + \|a_3x'\|^3 + \ldots + \|a_nx'\|^n + \ldots$	$\|a_1\|\,\|x'\| + \|a_2\|\,\|x'\|^2 + \|a_3\|\,\|x'\|^3 + \ldots + \|a_n\|\,\|x'\|^n + \ldots$
77	12 св.	$\|a_nx'\|^n < n\|a_nx'\|^n$	$\|a_n\|\,\|x'\|^n < n\|a_n\|\,\|x'\|^n$

Бари — Теория рядов

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава I.

Числовые ряды.

Стр.

§ 1. Бесконечные последовательности 7
§ 2. О пределе последовательности 9
§ 3. Критерий Коши 12
§ 4. Понятие о ряде 12
§ 5. Остаточный член ряда . . 14
§ 6. Простейшие операции над рядами 15
§ 7. Необходимый признак сходимости 17
§ 8. Теорема Коши 18
§ 9. Ряды с положительными членами 19
§ 10. Признаки Даламбера и Коши 21
§ 11. Интегральный признак Коши 26
§ 12. О перестановке членов ряда 33
§ 13. Об абсолютной и условной сходимости 34
§ 14. Знакочередующиеся ряды 35
§ 15. О достаточных признаках сходимости рядов 38
§ 16. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов . 40
§ 17. Арифметические операции над рядами 46

Глава II.

Функциональные ряды.

§ 18. Общее понятие о функциональном ряде и его сходимости 53
§ 19. Непрерывность суммы ряда 54
§ 20. Интегрирование рядов . . 57
§ 21. Диференцирование рядов 62
§ 22. Непрерывная функция без производной 64

Глава III.

Степенные ряды.

§ 23. Введение 69
§ 24. Интервал сходимости . . . 70
§ 25. Непрерывность суммы степенного ряда 75
§ 26. Диференцирование степенного ряда 75
§ 27. Ряд Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд . . 78
§ 28. Интегрирование степенных рядов 79
§ 29. Ряды Тейлора и Маклорена 81
§ 30. Разложение в ряд для функции e^x 84
§ 31. Разложение в ряд функций $\sin x$ и $\cos x$ 86
§ 32. Формулы Тейлора и Маклорена. Остаточный член в форме Лагранжа 89
§ 33. Остаточный член в форме Коши 94

	Стр.
§ 34. Приложение формулы Тейлора к задаче об отыскании максимума и минимума	97
§ 35. Сходимость рядов Тейлора и Маклорена	101
§ 36. Разложение в ряд $\ln(1+x)$	104
§ 37. Составление таблиц логарифмов	105
§ 38. Биномиальный ряд	109
§ 39. Разложение в ряд $\arcsin x$	111
§ 40. Вычисление эллиптических интегралов при помощи теории рядов . .	112
§ 41. Другие примеры вычисления интегралов при помощи рядов	116

Глава IV.

Ряды Фурье.

§ 42. Понятие о тригонометрическом ряде	119
§ 43. Определение коэфициентов по формулам Фурье . . .	120
§ 44. О функциях, изобразимых рядами Фурье	125
§ 45. Примеры разложения функций в ряд Фурье . .	126
§ 46. Сходимость рядов Фурье в простейших случаях . .	128
§ 47. Теорема Дирихле	131
§ 48. Среднее квадратическое уклонение тригонометрического многочлена от заданной функции	133
§ 49. Равенство Парсеваля. Теорема единственности . . .	138

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

§ 1. Бесконечные последовательности.

Самые разнообразные вопросы Анализа приводят нас к необходимости изучать *бесконечные последовательности* чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

т. е. совокупности чисел, расположенных в определенном порядке, и такие, что за каждым числом последовательности поставлено еще число. Это имеет место, например, в последовательности всех целых чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots.$$

Бесконечную последовательность чисел мы считаем заданной, если дан способ вычислить любой ее член, когда указано то место в последовательности, на котором он стоит, т. е. дан способ вычислить a_n при заданном n, например последовательности

$$1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots,$$

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots,$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots,$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots$$

являются заданными.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ можно рассматривать как значения некоторой переменной величины, изменяющейся вместе с изменением номера n. Эта переменная величина последовательно принимает значение a_1, затем a_2, затем a_3 и т. д.

Из теории пределов нам известно, что переменная величина может изменяться самыми разнообразными способами, но один из наиболее важных случаев тот, когда переменная величина *стремится к некоторому пределу*.

Из теории пределов мы знаем, что число A будет пределом переменной величины a_n, если как угодно малому положительному числу ε можно всегда привести в соответствие такое целое число p, что разность между A и a_n по абсолютной величине меньше ε, как только n превосходит p, т. е.

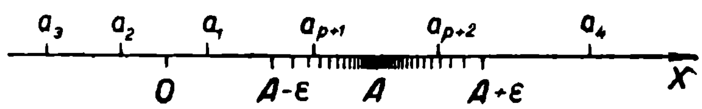
$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad n > p.$$

Если n-й член a_n последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет своим пределом число A, то мы будем кратко говорить, *что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет пределом A, или последовательность сходится к числу A.*

Другими словами, как бы мало ни было число ε, все члены последовательности, начиная с члена a_{p+1}, заключены между $A-\varepsilon$ и $A+\varepsilon$; членов последовательности, которые меньше $A-\varepsilon$ или больше $A+\varepsilon$, имеется лишь конечное число, и эти члены не оказывают влияния ни на существование предела, ни на его величину.

Например, из вышенаписанных последовательностей вторая и третья имеют пределы, так как $\frac{1}{n^2}$ стремится к 0, а $\frac{2^n-1}{2^n}$ стремится к 1, когда n неограниченно возрастает.

Если мы отметим на оси OX (черт. 1) точки с абсциссами $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то в случае, когда последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет пределом число A, все точки нашей последовательности, начиная с a_{p+1}, окажутся от A на расстоянии меньшем, чем ε.



Черт. 1.

Иначе говоря, все эти точки в конце концов попадут в интервал с центром в точке A и как угодно малой длины; вне этого интервала лежит лишь конечное число точек нашей последовательности.

Если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет A своим пределом, то все ее члены, начиная с некоторого, заключены между $A-\varepsilon$ и $A+\varepsilon$; значит, если A не равно нулю, то все члены последовательности, начиная с некоторого, будут иметь тот же знак, что и A, в чем можно убедиться, взяв ε меньшим, чем абсолютная величина A. Обратно, если в последовательности нет отрицательных членов или их только конечное число, то A не может быть отрицательным, так как если бы оно было отрицательным, то все члены, начиная с некоторого, оказались бы отрицательными. Значит, если все члены последовательности или все, кроме конечного числа, положительны или равны нулю, то и предел может быть только положительным или равным нулю. Точно так же, если все члены последовательности, кроме, быть может, конечного числа, отрицательны или равны нулю, то и предел может быть только отрицательным или равным нулю. Вообще, если члены последовательности не превосходят какое-нибудь число B, то и предел ее не может превосходить B.

Если нам известно, что последовательность сходится к A, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

то при достаточно большом n можно рассматривать a_n как приближенную величину для A; эту приближенную величину мы можем вычислить, когда последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задана. Часто бывает, что нет другого способа вычислить A, кроме как рассматривать ее как предел заданной последовательности. Тогда члены этой последовательности дают для A приближенные значения, причем эти значения как угодно близки к A, если только мы будем брать достаточно далекие члены в нашей последовательности. Именно таким образом в элементарной геометрии вычисляют приближенно длину окружности для круга данного радиуса. Для этого вычисляют периметр вписанного в эту окружность или описанного около нее правильного многоугольника с очень большим числом сторон.

§ 2. О пределе последовательности.

Когда последовательность задана, чрезвычайно важно установить, имеет ли она предел, даже если мы не умеем вычислить этот предел.

Рассмотрим некоторые случаи, когда существование предела устанавливается легко.

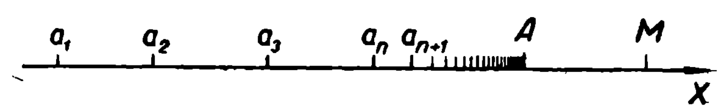
Допустим, что члены последовательности идут все время возрастая или хотя бы не убывая, т. е.

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots .$$

Такая последовательность называется *возрастающей*.

Если изображать числа этой последовательности в виде точек, лежащих на прямой, то эти точки движутся все время вправо, так как каждая точка, по условию, либо правее предыдущей, либо с ней совпадает.

Могут представиться два случая: или a_n неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n, т. е., каково бы ни было число N, все члены нашей последовательности, начиная с некоторого, превосходят N. Так будет, например, в случае последовательности всех целых чисел: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Или же все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ меньше некоторого постоянного числа M. В этом случае последовательность называется *ограниченной сверху*.



Черт. 2.

Можно доказать, что **всякая возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел** [1]).

Доказательства этого предложения мы приводить не будем. Но для пояснения заметим, что геометрически возрастающая последовательность, ограниченная сверху, представляется в виде последовательности точек, движущихся вправо, но остающихся все время левее некоторой постоянной точки M; поэтому с точки зрения интуиции вполне естественно, что эти точки в конце концов скопляются около некоторой точки A, лежащей тоже левее M или совпадающей с M (черт. 2).

В случае же, когда a_n неограниченно возрастает вместе с n, точки движутся вправо, неограниченно удаляясь; в этом случае можно условно писать

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty .$$

Примером *возрастающей* последовательности, ограниченной сверху, может служить последовательность периметров вписанных в окружность правильных многоугольников с возрастающим числом сторон; каждый из

[1]) См. проф. Жегалкин и доц. Слудская, Введение в анализ, ч. I, Курс математического анализа для педвузов, гл. XI, § 93.

этих периметров меньше, чем, например, периметр любого многоугольника, описанного около этой же окружности. Длина окружности и есть предел этой последовательности периметров.

Совершенно аналогично мы назовем последовательность *убывающей*, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots .$$

Если все члены последовательности превосходят некоторое число L, мы назовем ее **ограниченной снизу**, и можно доказать, что **всякая убывающая последовательность, ограниченная снизу, имеет предел.** В случае, когда для всякого отрицательного числа N все члены последовательности, начиная с некоторого, будут меньше N, как, например, для $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$, то можно условно писать

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty.$$

Часто приходится рассматривать одновременно две последовательности, из которых одна возрастающая

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots,$$

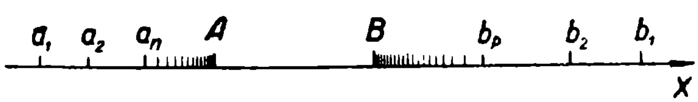
а другая убывающая

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots,$$

причем, кроме того, известно, что каждый член первой последовательности меньше любого члена второй последовательности, т. е.

$$a_n < b_p \text{ для любых } n \text{ и } p.$$

В этом случае первая последовательность должна иметь предел A, так как она возрастающая и ограниченная сверху, а вторая должна иметь предел B, так как она убывающая и ограниченная снизу (черт. 3). Ясно, что для любых n и p мы имеем $a_n \leqslant A \leqslant b_p$ и $a_n \leqslant B \leqslant b_p$. Нетрудно убедиться, что $A \leqslant B$. Если бы мы имели $A > B$, то, взяв n и p достаточно большими для того, чтобы a_n отличалось от A меньше чем на ε, а b_p отличалось бы от B меньше чем на ε, мы получили бы



Черт. 3.

$$a_n - b_p > (A - \varepsilon) - (B + \varepsilon) = A - B - 2\varepsilon,$$

а так как ε как угодно мало, то отсюда следовало бы, что $a_n - b_p > 0$ и, значит, $a_n > b_p$, что противоречит условию; итак $A \leqslant B$. Особенно интересен случай, когда известно, что $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда разность $B - A$, которая должна быть меньше $b_n - a_n$ при всяком n, оказывается необходимо равной нулю, т. е. $A = B$. В этом случае числа a_n дают приближения числа A по недостатку, а числа b_n — приближения по избытку с любой степенью точности.

Именно так бывает, когда мы хотим вычислить какое-нибудь иррациональное число, например $\sqrt{2}$, и берем для этого десятичные дроби, останавливая вычисление на первом, потом на втором, ..., на n-м десятичном знаке. Так как мы каждый раз можем взять приближение по недостатку или по избытку, то мы получаем две последовательности:

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;\ 1,414213;\ \ldots,$$
$$2;\ 1,5;\ 1,42;\ 1,415;\ 1,4143;\ 1,41422;\ 1,414214;\ \ldots,$$

из которых первая возрастает и ограничена сверху, вторая убывает и ограничена снизу, кроме того, каждый член первой последовательности меньше каждого члена второй последовательности, а разность между n-м членом второй последовательности и первой последовательности есть $\frac{1}{10^{n-1}}$, а потому она стремится к нулю при неограниченно возрастающем n.

Рассмотрим теперь последовательности, которые не имеют пределов. Таковы, например, последовательности:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots,$$
$$2,\ -4,\ +8,\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\cdot 2^n,\ \ldots,$$
$$-1,\ +1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots,$$
$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1},\ \ldots.$$

Такие последовательности иногда называют расходящимися. Последовательность может не иметь предела потому, что ее n-й член a_n неограниченно возрастает, как, например, в случае $a_n = n^2$. И хотя в этом случае условно пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, но следует считать, что последовательность не имеет предела. Отсутствие предела может, как во втором примере, где $a_n = (-1)^{n+1}\cdot 2^n$, быть вызвано тем, что a_n *по абсолютной величине* неограниченно возрастает. В примерах третьем и четвертом n-й член последовательности остается ограниченным по абсолютной величине: в третьем примере $|a_n| = 1$ при всяком n, в четвертом $|a_n| < 1$ при всяком n. Однако обе эти последовательности не имеют пределов, так как при неограниченном возрастании n числа a_n вместо того, чтобы приближаться к одному числу, оказываются попеременно то вблизи -1, то вблизи $+1$ (или в самых этих точках, как в третьем примере).

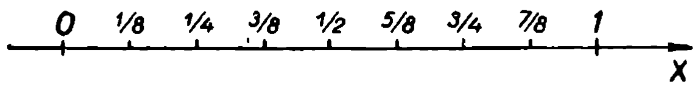
В двух последних примерах последовательность может быть рассматриваема как составленная из двух последовательностей, из которых одна имеет пределом -1, а другая $+1$. Но, разумеется, можно придумать гораздо более сложные случаи расходимости. Так, например, у последовательности

$$\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\ \ldots,\ \frac{2^n-1}{2^n},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots$$

не только нет никакого предела, но для любого числа x, заключенного между 0 и 1, и для всякого положительного ε можно найти в нашей последовательности число a_n, которое отличается от x меньше чем на ε. Для этого достаточно взять m настолько большим, чтобы $\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$; тогда наше число x окажется либо совпадающим с одним из чисел $\frac{1}{2^m}, \frac{3}{2^m}, \dots, \frac{2^m-1}{2^m}$, либо лежащим между двумя соседними из этих чисел, а так как расстояние между такой парой соседних чисел $=\frac{2}{2^m}=\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$, то, обозначая через a_n одно из этих чисел, ближайшее к x, мы видим, что $|a_n - x| < \varepsilon$.

Геометрически можно сказать, что в примере

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots, +(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \dots$$



Черт. 4.

точки последовательности группировались вблизи двух точек: -1 и $+1$, а в только что рассмотренном примере они группируются вблизи любой точки отрезка (0,1) (на черт. 4 показано расположение первых 7 точек нашей последовательности).

§ 3. Критерий Коши.

Полное решение вопроса о том, когда последовательность имеет предел, дается следующей теоремой Коши:

Для того чтобы последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы каждому положительному числу ε соответствовало такое целое число p, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для всех целых чисел n и m, превосходящих p.

Доказательство необходимости этого условия чрезвычайно просто. Если последовательность имеет предел A, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, следовательно, все члены последовательности, начиная с некоторого, например $p+1$-го, заключены в интервале $(A-\eta, A+\eta)$, а потому разность любых двух из этих членов меньше 2η; достаточно взять $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$, чтобы убедиться в справедливости неравенства $|a_n - a_m| < \varepsilon$ для $n > p$ и $m > p$.

Доказательства достаточности этого условия мы приводить не будем, а дадим лишь некоторое пояснение. Если условие выполнено, то все члены последовательности, начиная с a_{p+1}, принадлежат интервалу $(a_p - \varepsilon, a_p + \varepsilon)$, длина которого как угодно мала. Если числа a_n рассматривать как точки, то можно предвидеть, что точки $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сгруппируются около некоторой точки A (см. черт. 1).

§ 4. Понятие о ряде.

Если дана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, то, соединяя их в том порядке, в котором они даны, знаком плюс, как если бы мы их складывали, мы получим символ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

носящий название *ряда*; числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются ***членами*** ряда.