

Н. Лузин

**Интеграл и
тригонометрический ряд**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. Лузин**
Интеграл и тригонометрический ряд / Н. Лузин – М.: Книга по Требованию,
2021. – 244 с.

ISBN 978-5-458-56923-1

ISBN 978-5-458-56923-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

поэтому та теорія, которая не соприкасается, прямо или косвенно, съ аналитическими выраженіями, такая теорія неизбѣжно занимаетъ изолированное положеніе среди другихъ вѣтвей математики.

Поэтому, если не хотятъ, чтобы теорія функцій дѣйствительнаго переменнаго была теоріей, замкнутой въ себѣ и не оказывающей вліянія на другія математическія теоріи, нужно поставить въ связь аналитическія выраженія съ одной стороны, опредѣленія и понятія теоріи функцій дѣйствительнаго переменнаго съ другой стороны. Этимъ путемъ естественно приходимъ къ слѣдующей задачѣ, связывающей анализъ и теорію функцій:

дано структурное свойство функцій. Найти аналитическія выраженія, изображающія эту функцію.

Рѣшеніе этой задачи въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ вполне возможно. Достаточно указать на извѣстную теорему Weierstrass'а о представимости всякой непрерывной функціи равномерно-сходящимся рядомъ полиномовъ, или на то, что всякая функція непрерывная съ ограниченнымъ измѣненіемъ представима равномерно-сходящимся тригонометрическимъ рядомъ.

Но легко видѣть, что для классическаго анализа эта, только-что поставленная задача не имѣетъ основной важности. Въ самомъ дѣлѣ, эта задача отправляется отъ *класса* функцій и ищетъ представляющее функцію аналитическое выраженіе. Но методъ теоріи функцій дѣйствительнаго переменнаго есть, по преимуществу, логическій методъ, и тѣ классы функцій, которые, слѣдуя этому методу, встрѣчаются первыми, являясь логически наиболѣе важными и простыми, могутъ совсѣмъ не играть важной роли для другихъ математическихъ дисциплинъ и для классическаго анализа, развитіе котораго, какъ извѣстно, было въ значительной степени обязано задачамъ, поставленнымъ естествознаніемъ. Поэтому для анализа несравненно болѣшую важность имѣетъ слѣдующая вторая задача, обратная первой:

данъ классъ аналитическихъ выраженій. Найти необходимое

и достаточное структурное свойство функций, изображаемых этимъ классомъ аналитическихъ выражений.

Возможность рѣшенія этой задачи въ различныхъ частныхъ случаяхъ показана важными работами René Baire'a. Въ 1898 году R. Baire далъ ¹⁾ слѣдующій замѣчательный результатъ: для того, чтобы функция $f(x)$ была суммою сходящагося всюду ряда полиномовъ $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была точечно-разрывной на всякомъ совершенномъ множествѣ.

Поставленная общая задача имѣетъ большое значеніе для анализа. Всякій разъ, какъ намъ удастся найти искомое необходимое и достаточное структурное свойство функций, изображаемыхъ даннымъ классомъ аналитическихъ выражений, мы вмѣстѣ съ тѣмъ получаемъ критерій для того, чтобы судить à priori о томъ, будетъ ли представима или нѣтъ какая-либо данная функция $f(x)$ этими аналитическими выражениями. Другими словами, найденное структурное свойство характеризуетъ данный классъ аналитическихъ выражений и показываетъ изобразительную мощностъ разсматриваемыхъ аналитическихъ выражений.

2. Слѣдуя этому пути, открытому Baire'омъ, можно встрѣтить много интересныхъ проблемъ; среди этихъ проблемъ наибольшій интересъ представляютъ задачи, связанныя съ тригонометрическими рядами.

Хотя система тригонометрическихъ функций

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos nx \dots \\ & \sin x \sin 2x \sin 3x \dots \sin nx \dots \end{aligned}$$

является лишь частнымъ случаемъ ортогональной системы функций, однако изученіе этой частной системы функций представляетъ значительный интересъ въ виду тѣхъ особен-

¹⁾ R. Baire, Comptes-Rendus, t. 126, 1898 г., стран. 884—887; «Sur les fonctions de variables réelles» (Annali di Matematica, t. 3, série III, 1899 г., стран. 62).

ныхъ свойствъ, которыя присущи именно этой системѣ функцій¹⁾. Такъ, подобно этому, среди всѣхъ дѣйствительныхъ чиселъ представляетъ особый интересъ изученіе *цѣлыхъ* чиселъ. Нужно замѣтить, что теоріи тригонометрическихъ рядовъ математическое знаніе обязано многими общими понятіями и опредѣленіями; между прочимъ, теорія тригонометрическихъ рядовъ послужила исходнымъ пунктомъ для работъ G. Cantor'a.

Слѣдую пути Baire'a, естественно поставить слѣдующую задачу относительно тригонометрическихъ рядовъ:

найти необходимое и достаточное условіе для того, чтобы функція $f(x)$ была представима тригонометрическимъ рядомъ, т.-е. чтобы имѣли $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ²⁾.

Цѣль предлагаемой работы есть разсмотрѣніе вопросовъ, группирующихся около этой задачи.

3. Поставленная, такимъ образомъ, задача эквивалентна задачѣ изученія тригонометрическаго ряда вообще и представляетъ большія трудности, такъ какъ анализъ въ настоящее время не обладаетъ достаточно общимъ методомъ для этого изученія. Относительно общаго тригонометрическаго ряда у насъ нѣтъ почти ничего, что можно было бы сказать. Поэтому естественно на первое время стараться ограничить область изслѣдованія и разсматривать классы тригонометрическихъ рядовъ, наиболѣе доступные для изученія. Такимъ классомъ является *классъ тригонометрическихъ рядовъ Fourier*.

¹⁾ Дифференцированіе и интегрированіе тригонометрической системы функцій приводитъ (до факторовъ) опять къ этой же системѣ функцій. Интересно было бы знать, существуетъ ли *другая* ортогональная система функцій съ этимъ свойствомъ.

²⁾ Символь Hurwitz'a; мы пишемъ $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ всякій разъ, какъ рядъ, стоящій направо, суммируемъ какимъ-либо процессомъ къ функціи $f(x)$.

Какъ известно, *тригонометрическимъ рядомъ Fourier* называется рядъ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

коэффициенты котораго опредѣлены формулами Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Изученіе тригонометрическаго ряда Fourier представляетъ несравненно большую доступность, чѣмъ изученіе общаго тригонометрическаго ряда, такъ какъ сумма $S_n(x)$ первыхъ $n+1$ членовъ ряда Fourier можетъ быть написана въ видѣ

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

и, такимъ образомъ, многіе вопросы, напримѣръ, вопросы о сходимости, суммируемости ряда Fourier сводятся къ изученію *структуры* функции $f(x)$, разсмотрѣніе же *коэффициентовъ* ряда дѣлается въ этихъ вопросахъ излишнимъ¹⁾. Этимъ путемъ классической теоріей получены многочисленные результаты.

Поэтому естественно желать ограничиться, первое время, изученіемъ лишь класса рядовъ Fourier и искать границы этого класса или признакъ, отличающій тригонометрическій рядъ Fourier отъ тригонометрическаго ряда не-Fourier. Но, слѣдуя этому пути, мы встрѣчаемся съ большою трудностью.

4. Понятіе ряда Fourier не есть понятіе вполне опредѣленное и устойчивое, но всецѣло зависитъ отъ *понятія опредѣленнаго интеграла*. Принимая въ формулахъ Fourier все болѣе и болѣе общее опредѣленіе интеграла (Cauchy, Riemann'a,

¹⁾ Самое трудное въ теоріи тригонометрическихъ рядовъ — это изслѣдованіе закона теченія *величинъ* коэффициентовъ ряда. Проще имѣть дѣло со строеніемъ функции, чѣмъ съ закономъ величинъ коэффициентовъ.

Dirichlet, Harnack'a, Lebesgue'a, Denjoy), мы расширяемъ все болѣе и болѣе классъ тригонометрическихъ рядовъ Fourier.

Формулы Fourier имѣютъ въ виду рѣшеніе слѣдующей задачи анализа:

зная сумму тригонометрическаго ряда, опредѣлить его коэффициенты.

Но, какъ бы ни казалось общимъ опредѣленіе интеграла, данное Denjoy¹⁾, оно не въ силахъ рѣшить этой задачи анализа, такъ какъ можно установить существованіе такихъ *сходящихся* тригонометрическихъ рядовъ, сумма которыхъ неинтегрируема въ смыслѣ Denjoy ни въ какомъ интервалѣ, какъ бы малъ онъ ни былъ. И такъ какъ, съ другой стороны, нѣтъ никакого характеристическаго свойства, которое отличало бы коэффициенты ряда Fourier отъ коэффициентовъ тригонометрическаго ряда не-Fourier²⁾, то нужно думать, что дѣленіе тригонометрическихъ рядовъ на ряды Fourier и не-Fourier не лежитъ въ сущности вещей, а обязано, вообще, лишь незнанію, въ настоящій моментъ, достаточно общей операціи интегрированія.

Отсюда естественно желать найти наиболѣе общее опредѣленіе понятія интеграла съ тѣмъ, чтобы расширить до возможныхъ предѣловъ классъ тригонометрическихъ рядовъ Fourier. Этимъ задача о тригонометрическихъ рядахъ, ихъ сходимости, суммируемости и свойствахъ функций, изображаемыхъ ими, тѣсно связывается съ задачею о нахожденіи возможно болѣе общаго опредѣленія понятія интеграла.

Предлагаемая работа разсматриваетъ вопросы въ этомъ направленіи.

5. Укажемъ вкратцѣ планъ работы и задачи, которыя мы намѣтили разрѣшить.

Въ *первой главѣ* мы дѣлаемъ общій обзоръ строенію и свойствамъ измѣримыхъ множествъ и измѣримыхъ функций.

¹⁾ A. Denjoy, Sur une extension de l'intégrale de M. Lebesgue (Comptes-Rendus, 1 апрѣля 1912) и Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale (Comptes-Rendus, 22 апрѣля 1912 г.).

²⁾ Съ точки зрѣнія ихъ *числовыхъ величинъ*.

Этотъ обзоръ намъ необходимъ для дальнѣйшаго. Основной результатъ этой главы, опубликованный нами ранѣе¹⁾, касается строенія произвольной измѣримой функціи. Согласно этому результату, *всякая измѣримая функція есть непрерывная функція, когда пренебрегаютъ множествомъ мѣры какъ угодно малой.*

Во второй главѣ мы приступаемъ къ отысканію примитивныхъ функцій. Такъ какъ каждый неопредѣленный интегралъ есть примитивная функція для данной, то, стремясь найти самое общее опредѣленіе интеграла, мы естественно приходимъ къ задачѣ: найти необходимое и достаточное условіе для того, чтобы данная функція имѣла примитивную.

Мы даемъ въ этой главѣ полное рѣшеніе этой задачи, которое формулируется такъ: *для того, чтобы данная функція имѣла примитивную, необходимо и достаточно, чтобы она была измѣримой и конечной почти всюду*²⁾.

Въ качествѣ приложенія этой теоремы мы даемъ общее рѣшеніе задачи Dirichlet о гармонической функціи для круга въ томъ ранѣе неразсматривавшемся случаѣ, когда значенія этой функціи на окружности есть произвольная всюду разрывная неограниченная функція.

Въ третьей главѣ мы переходимъ къ отысканію характеристическихъ свойствъ неопредѣленныхъ интеграловъ. Такъ какъ каждая данная функція имѣетъ безконечное множество примитивныхъ функцій, неотличающихся другъ отъ друга на постоянную, то естественно возникаетъ вопросъ, какая именно изъ всѣхъ этихъ примитивныхъ есть неопредѣленный интегралъ, чѣмъ именно послѣдній отличается отъ всѣхъ другихъ примитивныхъ? Мы даемъ полное рѣшеніе этого вопроса для случая неопредѣленного интеграла Lebesgue'a и Denjoy. Для случая неопредѣленного интеграла Lebesgue'a характеристическое свойство таково: *неопредѣленный интег-*

¹⁾ «Sur les propriétés des fonctions mesurables» (Comptes-Rendus, 17 іюня 1912). См. также: «Математическій Сборникъ», т. 28. 1912 г., стр. 282.

²⁾ «Почти всюду» = «presque partout», т.-е. за исключеніемъ множества мѣры нуль.

рала *Lebesgue*'а есть кривая¹⁾ съ наименьшей длиною изъ всѣхъ примитивныхъ кривыхъ. Для того, чтобы рѣшить этотъ вопросъ для неопредѣленного интеграла *Denjoy*, мы были вынуждены обобщить понятіе функции съ ограниченнымъ измѣненіемъ.

Конецъ этой главы посвященъ опредѣленію интеграла, недавно предложенному *Borel*'емъ²⁾. Мы показываемъ, что это опредѣленіе менѣе обще, чѣмъ опредѣленіе *Denjoy*.

Вопросъ, изучаемый въ четвертой главѣ, далеко не рѣшенъ нами съ тою полнотою, съ какою рѣшены задачи въ предыдущихъ главахъ. Въ этой главѣ мы ставимъ задачу объ отысканіи въ самомъ общемъ случаѣ неопредѣленного интеграла въ семействѣ всѣхъ примитивныхъ для данной функции. Не рѣшивъ этой задачи во всей общности, мы ограничиваемся изложеніемъ частныхъ результатовъ, найденныхъ нами по этому вопросу: именно, мы опредѣляемъ тотъ узкій классъ примитивныхъ, въ которомъ естественнѣе всего искать неопредѣленный интегралъ.

Далѣе, мы показываемъ, что въ безконечномъ множествѣ случаевъ примитивныя, получаемыя почленнымъ интегрированіемъ рядовъ, принадлежатъ именно къ этому узкому классу примитивныхъ, опредѣленному нами въ этой главѣ.

Въ концѣ главы мы приходимъ къ обобщенію понятія о производной, имѣющему значеніе для теоріи тригонометрическихъ рядовъ.

Въ пятой главѣ мы изучаемъ вопросы, на первый взглядъ несвязанные съ предыдущими, а именно, вопросы о сходимости тригонометрическихъ рядовъ. Цѣль этой главы — подготовка къ задачѣ изображенія функций тригонометрическими рядами. Послѣ краткаго обзора найденныхъ нами ранѣе результатовъ о расходящихся тригонометрическихъ

¹⁾ Мы прибѣгаемъ къ языку геометріи.

²⁾ *Borel*, *Comptes-Rendus*, t. 150 (1910), стран. 375 и 508. См. особенно: *Borel*, *Le calcul des intégrales définies* (*Journal de Mathématiques*, 1914 г., стран. 201).

рядах¹⁾, мы даемъ необходимое и достаточное условіе для сходимости тригонометрическихъ рядовъ Fourier-Lebesgue'a.

Это условіе приводитъ насъ къ новому свойству измѣримыхъ множествъ, невыводимому изъ извѣстныхъ свойствъ множествъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ рѣшеніе задачи: *зная значенія гармонической функціи на окружности, найти значенія на окружности сопряженной гармонической функціи*. Мы даемъ формулы, непосредственно рѣшающія вопросъ.

Конецъ главы посвященъ результатамъ Weyl'я, Hobson'a и Plancherel'я относительно сходимости ортогональныхъ рядовъ, и невозможности обобщенія теоремы Parseval'я.

Наконецъ, въ *шестой главѣ* мы доказываемъ основную теорему, согласно которой, *всякая данная измѣримая функція представима тригонометрическимъ рядомъ, суммируемымъ одновременно методами Poisson'a и Riemann'a къ данной функціи*.

Такъ какъ всякая измѣримая функція имѣетъ безконечное множество тригонометрическихъ рядовъ, изображающихъ ее, то законно поставить задачу: *среди множества всѣхъ тригонометрическихъ рядовъ, изображающихъ данную функцію, опредѣлить одинъ, наиболее тѣсно связанный съ изображаемой функціей*. Мы не смогли рѣшить этой задачи въ общемъ случаѣ и ограничиваемся лишь указаніемъ на то, что всякое частное рѣшеніе этой задачи даетъ рѣшеніе задачи отысканія неопредѣленного интеграла, и указаніемъ вѣроятныхъ результатовъ. Далѣе мы даемъ теорему о возможности интегрированія по-членно тригонометрическихъ рядовъ не Fourier-Lebesgue'a. Глава кончается разсмотрѣніемъ теоріи Riemann'a тригонометрическихъ рядовъ, тѣсно связанной съ поставленными задачами.

¹⁾ См. нашу статью: «Über eine Potenzreihe» (Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911 г.) или «Математическій Сборникъ», т. 28, 1912 г., стран. 295.

Часть результатовъ, содержащихся въ этой работѣ была напечатана въ Comptes-Rendus въ сообщеніяхъ Академіи отъ 17 іюня 1912, 23 сентября 1912, 23 декабря 1912, 2 іюня 1913 гг. и въ статьяхъ, помѣщенныхъ въ «Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911 и въ «Математическомъ Сборникѣ», т. 28, 1912 г., стран. 266—294, 295—302, 461—472.

Николай Лузинъ.

ГЛАВА I.

Строение измѣримыхъ функций.

1. Прежде чѣмъ приступить къ главному предмету изслѣдованія, мы вынуждены предварительно рассмотреть строение и свойства измѣримыхъ множествъ и измѣримыхъ функций. Мы ограничиваемся классомъ *измѣримыхъ* функций и множествъ потому, что никогда не встрѣтимся съ неизмѣрими функцией и множествомъ¹⁾. Въ силу работъ Baire'a и Lebesgue'a²⁾ всякая опредѣленная операція анализа, всякое аналитическое выраженіе приводятъ въ результатъ непременно

¹⁾ Самое *существованіе* неизмѣримаго множества не является общепризнаннымъ. Всякое построеніе *примѣра* неизмѣримаго множества *необходимо* должно употребить принципъ произвольнаго выбора (Auswahlprinzip, аксіома Zermelo). А этотъ послѣдній принципъ вызываетъ серьезныя сомнѣнія, такъ какъ, повидимому, онъ стоитъ въ тѣсной связи съ парадоксами абстрактной теоріи множествъ. Принципъ произвольнаго выбора необходимъ лишь для теоріи трансфинитныхъ чиселъ и для теоріи алефовъ (aleph), но для классическаго анализа и для теоріи функций онъ не необходимъ.

Никакой частный примѣръ неизмѣримаго множества не можетъ быть опредѣленнымъ съ тою полнотою, которую Kronecker требовалъ вообще для всякаго математическаго опредѣленія. См. по этому поводу: *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (Bulletin de la Société mathématique, 1905, т. 33, стран. 261—273). Lebesgue. — *Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo* (Bulletin de la Société mathématique, 1907, т. 35, стран. 202—212). Russell. — *Sur les axiomes de l'infini et du transfini* (Bulletin de la Société mathématique, 1911) и Borel. — *Le calcul des intégrales définies* (Journal de Mathématiques, 1914, стран. 159—210).

²⁾ Baire. — *Sur les fonctions de variables réelles* (Annali di matematica, 1899). Lebesgue. — *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de Mathématiques, 1905, стран. 139—216).