Математическое просвещение

Сборник статей по элементарной и началам высшей математики. Выпуск 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М34

М34 Математическое просвещение: Сборник статей по элементарной и началам высшей математики. Выпуск 1 / – М.: Книга по Требованию, 2014. – 72 с.

ISBN 978-5-458-25362-8

Предпринятое ГТТН издание сборников «Математическое просвещение» имеет своею задачей пойти навстречу существующему среди учащих и учащихся средних школ и техникумов усиленному запросу на математическую литературу, которая дополняла бы, расширяла и углубляла их математические знания. Темы выпуска: О делении сторон треугольника пропорционально n-м степеням прилежащих сторон - Геометрическое доказательство теоремы Вильсона - О рациональных треугольниках - Геометрическое суммирование одного ряда - Заметка о третьем случае равенства треугольников - Об описанных четырехугольниках - Общая формула для производной n-го порядка степени некоторой функции - Единая схема вычисления частного интеграла линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и особенной правой частью - Об алгебраических вычислениях - Смесь. Об одной формуле - Упражнения для учащихся.

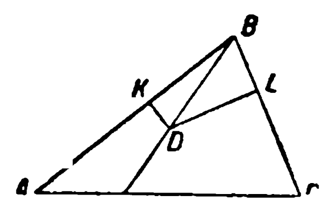
ISBN 978-5-458-25362-8

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

О ДЕЛЕНИИ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА ПРОПОРЦИОНАЛЬНО n-м СТЕПЕНЯМ ПРИЛЕЖАЩИХ СТОРОН

С. И. Зетель (Москва)

Впервые, повидимому, эта задача была поставлена и решена М. Пудра (M. Poudra) в его заметке, помещенной в «*Nouvelles Annales de Mathématiques*» в 1856 г. М. д'Окань (M. d'Ocagne) в 1883 г. поместил в том же журнале статью по этому же вопросу. Не будучи знаком с работами Пудра и д'Оканя, я в 1929 г. поместил в «Математическом образовании» № 2—3 статью «О построении и свойствах некоторых чевиан», где дал два способа построения прямых, делящих сторону треугольника в отношении n-х степеней прилежащих сторон. Один из данных мною способов построения тождественен способу д'Оканя. Это построение дает возможность перейти от прямых, делящих сторону треугольника в отношении n-х степеней прилежащих сторон, — в дальнейшем эти прямые будем называть «прямыми n», — к «прямым $n+2$».



Фиг. 1.

В настоящей заметке я хочу дать один чрезвычайно простой способ деления стороны треугольника пропорционально n-м степеням прилежащих сторон путем перехода от «прямых n» к «прямым $n+1$». Предварительно докажем две леммы.

Лемма I. *«Прямая n» делит угол, из вершины которого она выходит, на два угла так, что синусы этих углов пропорциональны $n-1$ степеням прилежащих сторон.*

Доказательство. Дан треугольник ABC ($AB \neq BC$). Основание «прямой n» обозначим через β_n (фиг. 1).

Тогда имеем:

$$\frac{\text{пл}\,\triangle A\beta_n B}{\text{пл}\,\triangle B\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{\text{пл}\,\triangle A\beta_n B}{\text{пл}\,\triangle B\beta_n C} = \frac{AB \cdot \beta_n B \cdot \sin(AB\beta_n)}{BC \cdot \beta_n B \cdot \sin(\beta_n BC)} = \frac{c \sin(AB\beta_n)}{a \sin(\beta_n BC)}. \qquad (2)$$

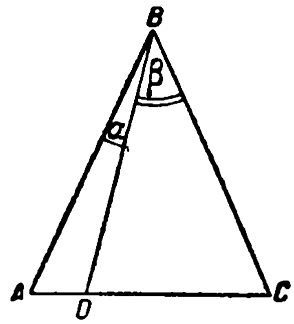
Сравнивая равенства (1) и (2), получаем:

$$\frac{c^n}{a^n} = \frac{c \sin(AB\beta_n)}{a \sin(\beta_n BC)}.$$

следовательно,

$$\frac{\sin(AB\beta_n)}{\sin(\beta_n BC)} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}. \tag{3}$$

Лемма II. *Прямая, исходящая из вершины равнобедренного треугольника, делит основание на части, пропорциональные синусам противолежащих углов.*



Фиг. 2.

Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$ (фиг. 2). Из рассмотрения треугольников ADB и BDC получим:

$$\frac{\text{пл}\,\triangle ADB}{\text{пл}\,\triangle BDC} = \frac{AD}{DC},$$

$$\frac{\text{пл}\,\triangle ADB}{\text{пл}\,\triangle BDC} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin\alpha}{BC \cdot BD \cdot \sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

отсюда следует:

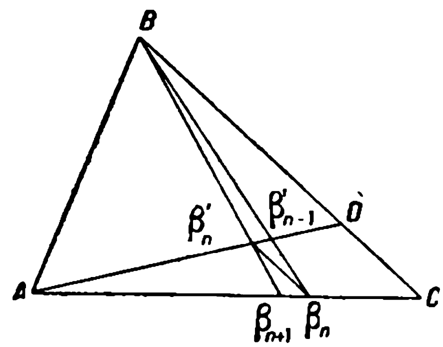
$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{4}$$

Дан треугольник ABC (фиг. 3). Отложим на стороне BC отрезок $BD = AB$ и соединим A с D. Докажем следующую теорему: *прямая $B\beta_n$, делящая сторону AC в отношении n-х степеней прилежащих сторон, делит отрезок AD в отношении $(n-1)$-х степеней тех же сторон*, т. е. если

$$\frac{A\beta_n}{\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n},$$

то

$$\frac{A\beta'_{n-1}}{\beta'_{n-1}D} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$



Фиг. 3.

Действительно, на основании первой леммы имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

На основании второй леммы получаем:

$$\frac{A\beta'_{n-1}}{\beta'_{n-1}D} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Легко доказать и обратную теорему: *прямая, делящая отрезок AD в отношении n-х степеней прилежащих сторон AB и BC, делит сторону AC в отношении $(n+1)$-х степеней.*

Доказанная теорема дает возможность переходить от «прямых n» к «прямым $n+1$», а обратная теорема — от «прямых n» к «прямым $n-1$». Пусть $B\beta_n$ (фиг. 3) — «прямая n». Проводим из точки β_n прямую $\beta_n\beta'_n$ параллельно BC до пересечения в точке β'_n прямой AD.

$$\frac{A\beta'_n}{\beta'_n D} = \frac{A\beta_n}{\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n}.$$

Прямая, исходящая из вершины B и проходящая через точку β_n', является «прямой $n+1$».

Интересны частные случаи.

Прямая, делящая сторону в отношении нулевых степеней прилежащих сторон, есть медиана. Указанное построение дает возможность переходить от медианы к биссектрисе; от биссектрисы к симедиане — прямой, делящей сторону треугольника в отношении квадратов прилежащих сторон.

Итак, задача о построении интересовавших нас прямых разрешена. Рассмотрим некоторые свойства этих прямых.

1. Из леммы первой непосредственно следует, что *«прямая n» является геометрическим местом точек, расстояния от которых до прилежащих сторон треугольника пропорциональны* $(n-1)$-м *степеням прилежащих сторон.*

Действительно, пусть $B\beta_n$ — «прямая n» (фиг. 1). Из произвольной точки D этой прямой опустим перпендикуляры на стороны.

$$DK \perp AB; \quad DK = BD\sin(KBD),$$
$$DL \perp BC; \quad DL = BD\sin(LBD),$$

следовательно,

$$\frac{DK}{DL} = \frac{\sin(KBD)}{\sin(LBD)} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

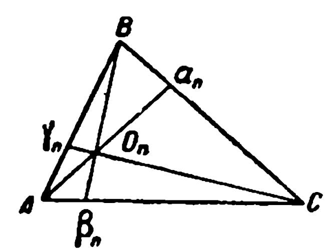
2. Из теоремы Чевы следует, что *прямые, исходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны в отношении n-х степеней прилежащих сторон, пересекаются в одной точке.*

Пусть α_n, β_n, γ_n — основания «прямых n», соответственно выходящих из вершин A, B, C (фиг. 4). Тогда имеем:

$$\frac{A\beta_n}{\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n}; \quad \frac{C\alpha_n}{\alpha_n B} = \frac{b^n}{c^n}; \quad \frac{B\gamma_n}{\gamma_n A} = \frac{a^n}{b^n},$$

откуда

$$\frac{A\beta_n \cdot C\alpha_n \cdot B\gamma_n}{\beta_n C \cdot \alpha_n B \cdot \gamma_n A} = 1. \qquad (5)$$



Фиг. 4.

Равенство (5) показывает, что «прямые n», проведенные из вершины треугольника, пересекаются в одной точке.

3. Точку пересечения «прямых n» будем обозначать через O_n. Определим расстояние от точки O_n до сторон a, b, c треугольника. Пусть эти расстояния соответственно выражаются через x, y, z. Тогда

$$\frac{x}{a^{n-1}} = \frac{y}{b^{n-1}} = \frac{z}{c^{n-1}},$$

$$\frac{ax}{a^n} = \frac{by}{b^n} = \frac{cz}{c^n} = \frac{ax+by+cz}{a^n+b^n+c^n} = \frac{2S}{a^n+b^n+c^n},$$

де S — площадь треугольника.

Отсюда

$$x = \frac{2Sa^{n-1}}{a^n + b^n + c^n} = \frac{h_a a^n}{a^n + b^n + c^n}. \qquad (6)$$

Рассмотрим частные случаи. Расстояние от точки O_0 (точка пересечения медиан) до сторон треугольника получим, положив в равенстве (6) $n = 0$:

$$x = \frac{h_a}{3}.$$

Расстояние от точки O_1 (точка пересечения биссектрис) до сторон треугольника

$$x = \frac{2S}{2p} = r,$$

где r — радиус круга, вписанного в треугольник.

При $n = 2$ и $a^2 = b^2 + c^2$ имеем:

$$x = \frac{ha^2}{2a^2} = \frac{h}{2}.$$

Следовательно, в прямоугольном треугольнике симедианы пересекаются на середине высоты, опущенной из вершины прямого угла.

Итак, точка пересечения симедиан прямоугольного треугольника находится на средней линии треугольника, параллельной большей стороне.

В заключение решим такую задачу: стороны треугольника выражаются целыми числами. Можно ли найти такое целое n, при котором «прямые n» пересекаются на средней линии треугольника, параллельной большей стороне. Исключив случай прямоугольного треугольника, мы должны дать отрицательный ответ: ни при каком целом n «прямые n» не могут пересечься на средней линии, параллельной большей стороне треугольника.

Действительно, пусть $x = \frac{h}{2}$, тогда из равенства (6) имеем:

$$\frac{h_a}{2} = \frac{h_a a^n}{a^n + b^n + c^n},$$

откуда

$$a^n = b^n + c^n. \qquad (7)$$

На основании теоремы Ферма заключаем, что равенство (7) не имеет места ни при каком целом n ($n = 1$ исключается, так как a, b и c — стороны треугольника, а $n = 2$ исключено по условию[1]).

[1]) Решение этой задачи основано на теореме Ферма, общего доказательства которой, как известно, до сих пор не существует. Поэтому изложенное решение можно считать справедливым только для тех значений n, для которых теорема Ферма доказана.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ВИЛЬСОНА

А. В. (Москва)

1. Известная теорема Вильсона: *если p — простое число, то $(p-1)!+1$ кратно p*, имеет обширную литературу, которая вплоть до последнего времени продолжает пополняться. О ней писали Варинг, Лагранж, Эйлер, Гаусс, Штейнер, Кэли, Дирихле, Кронекер, Риччи; здесь упомянуты имена только наиболее выдающихся математиков. Из геометрических доказательств этой теоремы по своей простоте и наглядности выделяется доказательство, приводимое Арт. Кэли (Cayley Art., *Messenger of Mathematics*, 1883, XII, стр. 41; *Math. Pap.*, t. XII, n° 807; *Mathesis* (2), VII, 1897).

2. Пусть n — простое число. Перенумеруем вершины правильного n-угольника в порядке обхода контура: $1, 2, 3, \ldots, n$. Если соединим их диагоналями последовательно через одну, потом через две, через три и т. д., то, кроме правильного многоугольника $123\ldots$, получим еще $(n-2)$ многоугольников $135\ldots$, $147\ldots$, $159\ldots$ и т. д. Эти $(n-1)$ многоугольников попарно тождественны, так как при соединении вершин через k и через $(n-k-2)$ получаем тождественные многоугольники. Число различных правильных многоугольников, полученных этим путем, равно $\frac{1}{2}(n-1)$.

3. Если соединим вершины в каком-либо другом порядке, например в порядке $13245\ldots$, то получим неправильный многоугольник; повертывая этот многоугольник так, чтобы номера его вершин заменялись следующими по порядку числами (число n заменяется при этом единицей), получим n неправильных многоугольников. В вышеуказанном примере это будут многоугольники $13245\ldots$, $24356\ldots$, $35467\ldots$, $\ldots$, $2134\ldots$ Если таким путем образуем все возможные неправильные многоугольники, то число их будет кратно n; но, как и в случае правильных многоугольников, они по два тождественны; именно две последовательности вершин, прямая и обратная, дают один и тот же многоугольник.

4. Если в последовательности вершин $123\ldots$ сделать все возможные перестановки $(n-1)$ вершин $23\ldots$, то получим все возможные (правильные и неправильные) многоугольники; их число будет равно $1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)=(n-1)!$; они опять будут попарно тождественны, так что действительное их число $\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)$.

5. Сопоставляя результаты (2) и (4), видим, что число неправильных многоугольников будет равно:

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}[1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)+1-n]=$$
$$=\frac{1}{2}[(n-1)!+1-n].$$

По (3) это число должно делиться на n; следовательно $(n-1)!+1$ кратно n.

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

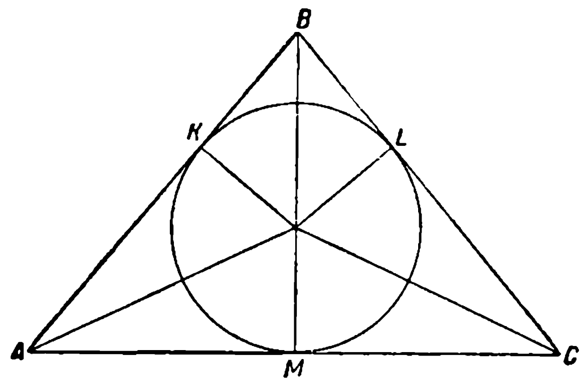
И. И. Чистяков (Москва)

1. Вопрос о рациональных треугольниках, т. е. таких, стороны и площадь которых могут быть выражены рациональными и, в частности, целыми числами, представляет значительный научно-педагогический интерес, так как позволяет установить связь между двумя основными отделами математики: геометрией и алгеброй. Имеет он и большое историческое значение, ибо еще Пифагор и Платон в древней Греции занимались им и дали впервые способы для выражения сторон рациональных *прямоугольных* треугольников. Позднее этим же вопросом интересовались индусские и арабские ученые, которые получили соответствующие формулы и для косоугольных треугольников, а также для некоторых видов четырехугольников. Этот интерес унаследовали и сменившие арабских ученых средневековые и позднейшие европейские математики. Связь этого вопроса с весьма важными отделами теории чисел имела своим последствием то, что его должны были касаться ученые, занимавшиеся неопределенным анализом и теориею чисел. Поэтому вопрос о рациональных треугольниках имеет весьма большую литературу. Однако он является, с одной стороны, настолько разносторонним и богатым содержанием, а с другой — сравнительно легким для разработки элементарными средствами, что статьи, заметки и задачи, к нему относящиеся, не перестают появляться на страницах математических хрестоматий и журналов. В общем он представляет превосходный материал для занятий учащихся в математических кружках, почему ему и посвящается настоящая статья.

Следует, однако, заметить, что особенно разработанной является статья о рациональных прямоугольных, или так называемых пифагоровых треугольниках; вопрос же о формулах для *косоугольных* рациональных треугольников значительно менее освещен ввиду несколько большей степени его трудности. В русских учебниках алгебраический вывод формул для рациональных косоугольных треугольников имеется в геометрии Давидова и в сборнике алгебраических задач Верещагина. Такой же характер имеет и вывод соответствующих формул, данный Бахманом в книге Bachmann: Die niedere Zahlentheorie, Bd. II, 1910 (перев. в журнале «Математическое образование», 1916 г.); кроме того, он отличается большою сложностью. В настоящей статье предлагается вывод формул для рациональных косоугольных треугольников, отличающийся большою простотой и основанный на геометрических соображениях; кроме того, здесь же рассматриваются частные случаи общего вопроса, могущие представить алгебраический и геометрический интерес.

2. Предлагаемый вывод основывается на свойствах отрезков, на которые разделяются стороны треугольника точками касания вписанной в этот треугольник окружности. Пусть (см. чертеж) в

косоугольный треугольник ABC со сторонами a, b, c вписана окружность радиуса r, касающаяся сторон треугольника в точках K, L, M; называя отрезки от вершин треугольника до точек касания соответственно через x, y, z, имеем:



$$AK = AM = x;$$
$$BK = BL = y;$$
$$CL = CM = z.$$

Обозначая далее периметр треугольника $2p$, имеем:

$$x + y + z = p;$$

а так как в то же время, как видно из чертежа:

$$x + y = c;\ x + z = b;\ y + z = a,$$

то для отрезков x, y, z получим обычно приводимые в курсах тригонометрии выражения:

$$x = p - a;\quad y = p - b;\quad z = p - c.$$

Исследуем свойства этих отрезков; пусть для определенности

$$A < B < C;$$

тогда и

$$a < b < c,$$

т. е.

$$y + z < x + z < x + y,$$

или

$$z < y < x,$$

следовательно, рассматриваемые отрезки идут по величине в обратном порядке сравнительно со сторонами и углами. Легко видеть, далее, что углы, получающиеся от соединения центра вписанного круга с вершинами треугольника — все тупые, ибо если бы, например, угол AOC был прямой, то $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = 90^\circ$ и стороны AB и CB были бы параллельны, а если бы он был острым, то они расходились бы. Поэтому, очевидно, $r < \sqrt{zy}$, и подавно $r < \sqrt{xy}$ и $r < \sqrt{xz}$, откуда $r < \sqrt[3]{xyz}$.

Ясно, далее, что если $r < z$, то треугольник будет остроугольным; при $r = z$ — прямоугольным и при $r > z$ — тупоугольным. Заметим, наконец, что любым отрезкам x, y, z непременно будет соответствовать определенный треугольник, ибо сумма двух сторон его всегда будет больше третьей, что следует из условия:

$$c < a + b, \text{ или } (x + y) < (y + z) + (x + z),$$

но последнее неравенство всегда справедливо.

3. Выражая двояким образом площадь треугольника, имеем:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r \cdot p,$$

или

$$\sqrt{pxyz} = rp,$$

откуда

$$xyz = (x + y + z) \cdot r^2. \tag{I}$$

Этим уравнением мы и воспользуемся для вывода формул сторон рациональных треугольников. Начнем с частного случая — прямоугольного треугольника, тогда $C = 90^\circ$ и $r = z$. Уравнение (I) примет тогда вид:

$$xyz = (x + y + z)\,z^2,$$

или

$$xy = (x + y + z)\,z,$$

откуда

$$x = \frac{yz + z^2}{y - z}. \tag{a}$$

Поэтому для определения отрезков сторон рационального прямоугольного треугольника можно взять произвольной величины отрезки z и $y > z$, тогда x определится по формуле (a). Величина сторон прямоугольного треугольника определится при этом по формулам:

$$a = y + z; \quad b = x + z = \frac{2yz}{y - z} \quad \text{и} \quad c = x + y = \frac{y^2 + z^2}{y - z}. \tag{b}$$

Например, при $z = 1$ и $y = 2$ имеем: $x = 3$ и $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, т. е. так называемый египетский прямоугольный треугольник. При $z = 3$, $y = 5$ получим $x = 12$ и $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$ и т. д. Вместо найденных выражений для сторон треугольника (b) можно взять величины, им пропорциональные:

$$a = k(y + z); \quad b = k\frac{2yz}{y - z}; \quad c = k\frac{y^2 + z^2}{y - z}.$$

Полагая $k = y - z$, получим известные из древности формулы, выражающие стороны прямоугольного треугольника в целых числах:

$$a = y^2 - z^2; \quad b = 2yz; \quad c = y^2 + z^2,$$

где y и z — произвольные целые числа. При $y - z = 1$ найдем выражения:

$$a = 2z + 1; \quad b = 2z^2 + 2z; \quad c = 2z^2 + 2z + 1,$$

которые приписываются Пифагору,

Ввиду практической важности знания чисел, выражающих стороны рациональных прямоугольных треугольников, например, при составлении геометрических задач на вычисление, приводим таблицу их, не превышающих 100:

3, 4, 5	9, 40, 41	16, 63, 65	36, 77, 85
5, 12, 13	11, 60, 61	20, 21, 29	39, 80, 89
8, 15, 17	12, 35, 37	28, 45, 53	48, 55, 73
7, 24, 25	13, 84, 85	33, 56, 65	65, 72, 97

Пусть требуется найти стороны рационального прямоугольного треугольника при условии, что они составляют арифметическую прогрессию. Тогда $c - b = b - a$, или

$$\frac{y^2+z^2}{y-z} - \frac{2yz}{y-z} = \frac{2yz}{y-z} - (y+z),$$

или по упрощении:

$$2y^2 = 4yz; \quad y = 2z,$$

откуда

$$a = 3z^2; \quad b = 4z^2; \quad c = 5z^2,$$

т. е. стороны таких треугольников пропорциональны сторонам египетского треугольника.

4. Переходя к общему случаю, из уравнения (I) имеем:

$$x = \frac{(y+z)r^2}{yz - r^2}. \qquad \text{(II)}$$

Поэтому, беря отрезки y, z и r произвольно, но при условии $r < \sqrt{yz}$, мы получим по формуле (II) величину отрезка x, а затем попарным сложением чисел x, y, z найдем стороны рационального треугольника.

Так, при $z = 6$, $y = 7$ и $r = 4$ найдем $x = \frac{13 \cdot 16}{42 - 16} = 8$ и $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

При $r = \frac{3}{2}$, $z = 3$, $y = 12$ получим $x = 1$ и $a = 15$, $b = 4$, $c = 13$.

Эти два примера были известны еще в древности.

Делая $z = 1$, $y = 2$ и $r = \frac{4}{3}$, получим: $x = 24$, откуда $a = 3$, $b = 25$, $c = 26$.

Чтобы составить выражения сторон треугольника, нужно сложить попарно отрезки x, y, z; получим:

$$a = y + z; \quad b = x + z = \frac{y(r^2+z^2)}{yz - r^2}; \quad c = x + y = \frac{z(r^2+y^2)}{yz - r^2}.$$

Вместо найденных значений можно взять числа, им пропорциональные:

$$a = k \cdot (y+z); \quad b = k \cdot \frac{y(r^2+z^2)}{yz - r^2}; \quad c = k \cdot \frac{z(r^2+y^2)}{yz - r^2}.$$

Полагая $k = yz - r^2$, получим выражения, дающие стороны треугольника в целых числах:

$$a = (y + z)(yz - r^2); \quad b = y(r^2 + z^2); \quad c = z(r^2 + y^2).$$

Давая в этих формулах произвольные значения числам y, z и $r < \sqrt{yz}$, можно получить сколько угодно целых чисел для сторон рациональных треугольников. Однако проще получить сначала отрезки x, y, z, а затем сложением их найти стороны треугольника. При этом вычисления можно вести по такому плану: в выражении $x = \frac{(y+z)r^2}{yz - r^2}$ давать знаменателю $d = yz - r^2$ значения 1, 2, 3, 4, . . . ; для каждого значения d можно полагать $r = 1$, 2, 3, 4, . . . , тогда y и z можно найти из выражения $yz = r^2 + d$ путем разложения его на множители. Подставляя эти значения вместо y и z в формулу для x, выбираем из получающихся чисел целые значения; при получении же дробных значений для x увеличиваем пропорционально x, y, z так, чтобы получились целые числа. Чтобы при этом не получать прямоугольных треугольников, следует устранить из рассмотрения те случаи, когда один из отрезков x, y, z равен r.

Пусть, например, $d = 4$. Полагая $r = 1$, найдем $yz = 5$, откуда возможно лишь $z = 1$, $y = 5$, что дает прямоугольный треугольник. При $r = 2$ найдем $yz = 8$; полагая $z = 1$, $y = 8$, получим $x = 9$ и $a = 9$, $b = 10$, $c = 17$.

Если же взять $y = 4$, а $z = 2$, то получим прямоугольный треугольник.

При $r = 3$ найдем $yz = 13$, откуда $z = 1$, $y = 13$, что для x дает $\frac{63}{2}$. Удваивая полученные числа, имеем:

$$x = 63, \quad y = 26, \quad z = 2 \quad \text{и} \quad a = 28, \quad b = 65, \quad c = 89.$$

При $r = 4$ $yz = 20$. Полагая $z = 1$, $y = 20$, имеем $x = 84$, следовательно, $a = 21$, $b = 85$, $c = 104$; если же взять $z = 2$, $y = 10$, то $x = 48$ и $a = 12$, $b = 50$, $c = 58$, что по сокращении дает $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$. Наконец, при $z = 4$, $y = 5$ получился бы прямоугольный треугольник.

Поступая изложенным образом, можно получить сколь угодно большую таблицу чисел для сторон рациональных треугольников.

Наиболее полная таблица чисел, выражающих стороны рациональных косоугольных треугольников и не превышающих 100, была помещена в 1914 г. в журнале «*Mathematical questions and solutions*», *Vol.* XXV; в 1915 г. к ней было сделано дополнение, после чего число названных треугольников доведено до 140. Однако это число не является полным, и, пользуясь вышеуказанным методом, нам удалось получить ряд треугольников, не приведенных в упомянутой таблице.