Н. К. Смоленцев

Основы теории вейвлетов

Вейвлеты в MATLAB

Издание третье, дополненное и переработанное

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направления подготовки и специальностям «Математика», «Математика. Прикладная математика»

ДМК ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Москва

УДК 519.6
ББК В162я73
С51

С51 **Смоленцев Н. К.**
Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 448 с.: ил.

ISBN 5-94074-415-X

Данная книга может служить учебником по теории вейвлетов и их применениям в системе MATLAB. В издание включены сведения по дискретному преобразованию Фурье, фильтрам и разложению сигналов, а также впервые в учебной литературе представлено построение вейвлетов с произвольным натуральным коэффициентом масштабирования N и дано изложение теории вейвлетов на однородных пространствах. Кроме основ теории вейвлетов дается описание основных функций вейвлет-анализа в системе MATLAB. Рассмотрены примеры использования вейвлет-анализа для исследования кардиосигналов и данных фондового рынка.

Книга предназначена студентам высших учебных заведений, специализирующимся на изучении математики и инженерных наук, и будет полезна специалистам-практикам, использующим вейвлеты в своей работе.

УДК 519.6
ББК В162я73

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Материал, изложенный в данной книге, многократно проверен. Но поскольку вероятность технических ошибок все равно существует, издательство не может гарантировать абсолютную точность и правильность приводимых сведений. В связи с этим издательство не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

Смоленцев Николай Константинович

Основы теории вейвлетов

Вейвлеты в MATLAB

Главный редактор *Мовчан Д. А.*
dm@dmk-press.ru
Корректор *Синяева Г. И.*
Верстка *Чаннова А. А.*
Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

Подписано в печать 06.12.2008. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Гарнитура «Петербург».

Печать офсетная. Усл. печ. л. 42. Тираж 1500 экз.

Издательство ДМК Пресс
Web-сайт издательства: www.dmk-press.ru
Internet-магазин: www.abook.ru

ISBN 5-94074-415-X

© Смоленцев Н. К., 2008
© Оформление, издание, ДМК Пресс, 2009

Краткое содержание

Предисловие 12

Часть I
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ 15

Глава 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ 17

Глава 2
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ 71

Часть II
ВЕЙВЛЕТЫ В MATLAB 243

Глава 3
ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В MATLAB 245

Глава 4
ГЛАВНОЕ МЕНЮ
ПАКЕТА WAVELET TOOLBOX 367

Приложение
СПИСОК ФУНКЦИЙ WAVELET TOOLBOX 439

Предметный указатель 443

Список литературы 446

Содержание

Предисловие 12

Часть I
Основы теории вейвлетов

Глава 1
Преобразование Фурье 17

1.1. Предварительные понятия 18

1.2. Ряды Фурье 19

1.3. Преобразование Фурье 23

1.3.1. Преобразование Фурье в L1(R) 24
1.3.2. Преобразование Фурье в L2(R) 25
1.3.3. Свойства преобразования Фурье 26
1.3.4. Примеры 28
1.3.5. Теорема Пэли-Винера 29
1.3.6. Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции 30
1.3.7. Формула суммирования Пуассона 30
1.3.8. Оконное преобразование Фурье 31
1.3.9. Преобразование Фурье обобщенных функций 32
1.3.10. Примеры 35

1.4. Преобразование Фурье дискретных сигналов ... 35

1.4.1. Дискретизация 35
1.4.2. Дискретное преобразование Фурье длины N 38
1.4.3. Преобразование Фурье числовой последовательности 40
1.4.4. Z-преобразование 42

1.4.5. Примеры 43

1.5. Фильтры 45

1.5.1. Фильтрация непрерывных сигналов 46
1.5.2. Примеры фильтров 48
1.5.3. Цифровые фильтры 50
1.5.4. Примеры цифровых фильтров 51

1.6. Разложение сигнала на низкочастотную и высокочастотную составляющие 54

1.6.1. Разложение идеальными фильтрами 55
1.6.2. Восстановление идеальными фильтрами 59
1.6.3. Общий случай 60
1.6.4. Примеры 64
1.6.5. Многоуровневый анализ сигналов 68

Глава 2
Основы теории вейвлетов 71

2.1. Вейвлеты Хаара 72

2.1.1. Масштабирующая последовательность подпространств 73
2.1.2. Пространства вейвлетов 75
2.1.3. Операторы проектирования 79

2.2. Масштабирующие функции 82

2.2.1. Примеры и общие свойства масштабирующих функций 82
2.2.2. Построение масштабирующей функции 86

2.3. Ортогональный кратномасштабный анализ 92

2.3.1. Ортогональное кратномасштабное разложение 92
2.3.2. Вейвлеты 96
2.3.3. О единственности порождающих функций 101
2.3.4. Неортогональный случай 102

2.4. Примеры кратномасштабного анализа и вейвлетов 106
2.4.1. Вейвлеты Шеннона–Котельникова 106
2.4.2. Вейвлеты Мейера 109
2.5. Вейвлеты Батла–Лемарье. B-сплайны 115
2.5.1. Вейвлеты на основе B-сплайна степени 1 115
2.5.2. B-сплайны 119
2.5.3. Сплайновые вейвлеты 122
2.6. Вейвлет-преобразование 125
2.6.1. Вейвлет-разложение 125
2.6.2. Быстрое вейвлет-преобразование 128
2.6.3. Вопрос о начальных коэффициентах 129
2.6.4. Восстановление 130
2.6.5. Вейвлет-пакеты 132
2.7. Регулярность и нулевые моменты 136
2.8. Построение вейвлетов Добеши с компактным носителем 142
2.8.1. Частотная функция 143
2.8.2. Симлеты 149
2.9. Койфлеты 151
2.10. Биортогональные вейвлеты 154
2.10.1. Мотивировка и определение 154
2.10.2. Условия на функцию $\varphi(x)$ 156
2.10.3. Функция $\psi(x)$ 157
2.10.4. Построение функции $\widetilde{\varphi}(x)$ 158
2.10.5. Построение функций $\psi(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$ 160
2.10.6. Условия на коэффициенты 161
2.10.7. Симметричные биортогональные вейвлеты 162

2.10.8. Сплайны 163

2.11. Двумерные вейвлеты 166

2.12. Непрерывное вейвлет-преобразование 170

2.12.1. Непрерывное вейвлет-преобразование в одномерном случае 170
2.12.2. Многомерные обобщения непрерывного вейвлет-преобразования 173
2.12.3. Примеры двумерных вейвлетов 180
2.12.4. Вейвлеты на многообразиях 181

2.13. Вейвлеты с коэффициентом масштабирования *N* 191

2.13.1 Масштабирующие функции 192
2.13.2. N-кратномасштабное разложение 194
2.13.3. Вейвлеты с коэффициентом масштабирования *N* 195
2.13.4. Вейвлет-преобразование 196
2.13.5. Разложение и восстановление в неортогональном случае 198

2.14. Примеры *N*-масштабирующих функций и вейвлетов 201

2.14.1. Вейвлеты Хаара с параметром сжатия *N* 201
2.14.2. Вейвлеты Котельникова–Шеннона с параметром сжатия *N* 205
2.14.3. Вырожденные масштабирующие функции и вейвлеты Кантора 207
2.14.4. Сплайновые масштабирующие функции 212
2.14.5. Вейвлеты на основе B-сплайнов 215
2.14.6. Кратные коэффициенты масштабирования 226

2.15. Построение ортогональных вейвлетов с компактным носителем для $N > 2$ 230

2.15.1. Общие конструкции 231
2.14.2. Построение ортогональных вейвлетов с компактным носителем для $N = 3$ 234
2.15.3. Примеры масштабирующих функций и вейвлетов для $N = 3$ 237

Часть II
Вейвлеты в MATLAB

Глава 3
Функции вейвлет-анализа в MATLAB 245

3.1. Вейвлеты в системе MATLAB 246

3.2. Фильтры вейвлетов 256

3.2.1. Масштабирующие фильтры 257
3.2.2. Фильтры разложения и восстановления 259

3.3. Одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование 261

3.4. Многоуровневый одномерный вейвлет-анализ 265

3.5. Непрерывное вейвлет-преобразование cwt ... 272

3.6. Вейвлет-пакеты 276

3.7. Двумерное вейвлет-преобразование 286

3.7.1. Изображения в MATLAB 286
3.7.2. Вейвлет-преобразования двумерных сигналов 288
3.7.3.Основные функции двумерного вейвлет-преобразования 289

3.8. Удаление шума, компрессия 295

3.8.1. Обработка вейвлет-коэффициентов для удаления шума 295
3.8.2. Функции MATLAB для удаления шума 296

3.9. Тестовые сигналы в MATLAB 305
3.9.1. Одномерные тестовые сигналы 305
3.9.2. Изображения 306
3.9.3. Генерирование сигналов 306
3.10. Новые возможности Wavelet Toolbox версии 4.0 309
3.10.1. Создание вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования на основе образца 310
3.10.2. Слияние (наложение) изображений 312
3.10.3. Дробное броуновское движение 316
3.10.4. Методы лифтинга построения новых вейвлетов .. 319
3.10.5. Анализ многомерных сигналов 321
3.11. Вейвлет-анализ кардиосигнала 331
3.11.1. Многоуровневый анализ кардиосигнала 332
3.11.2.Непрерывный вейвлет-анализ кардиосигнала 338
3.11.3. Удаление шума, компрессия и сглаживание кардиосигнала 343
3.11.4. Использование пакетных разложений 345
3.12. Многоканальный вейвлет-анализ экономических данных 347
3.12.1. Многоуровневый анализ данных 347
3.12.2. Программы вейвлет-разложения и восстановления 365

Глава 4
Главное меню пакета Wavelet Toolbox 367
4.1. Просмотр вейвлетов (Wavelet Display) 369
4.2. Одномерный дискретный вейвлет-анализ (Wavelet 1-D) 371

4.2.1. Вейвлет-разложение 371
4.2.2. Выбор различных видов разложения (Display mode) 372
4.2.3. Статистические характеристики коэффициентов разложения 374
4.2.4. Гистограммы (Histogram) 376
4.2.5. Сжатие сигнала 377
4.2.6. Удаление шума 378
4.3. Одномерный пакетный вейвлет-анализ 380
4.3.1. Вейвлет-разложение 381
4.3.2. Возможности раздела для обработки сигнала 381
4.4. Одномерный непрерывный вейвлет-анализ (Continuous Wavelet 1-D) 384
4.4.1. Начало работы 384
4.4.2. Анализ результатов 386
4.5. Комплексный одномерный непрерывный вейвлет-анализ (Complex Continuous Wavelet 1-D) 387
4.6. Удаление шума стационарного одномерного сигнала (SWT De-noising 1-D) 390
4.6.1. Основные понятия 390
4.6.2. Работа с SWT De-noising 1-D 392
4.7. Оценка плотности (Density Estimation 1-D) 396
4.7.1. Идея алгоритма 396
4.7.2. Работа с Density Estimation 1-D 398
4.8. Оценка регрессии (Regression Estimation 1-D) ... 400
4.8.1. Основные понятия 400
4.8.2. Работа с Regression Estimation 1-D 401
4.9. Выбор вейвлет-коэффициентов сигнала (Wavelet Coefficients Selection 1-D) 402