Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 4

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.Н. Бончковский

Р11 Математическое просвещение. Выпуск 4 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 152 с.

ISBN 978-5-458-25359-8

Сборники «Математическое просвещение» содержат оригинальные статьи по элементарным разделам математики, по методике и истории математики, отделы текущей жизни, задач, библиографии и т. д. Сборники рассчитаны на учащуюся молодежь и преподавателей средних школ, рабфаков, техникумов и других учебных заведений. Темы выпуска: Исследование функции третьей степени на максимум и минимум элементарными средствами - Об уравнении - Соотношения Эйлера между кругом, описанным около треугольника, и кругами, касательными к трем сторонам треугольника - Вычисление площадей некоторых треугольников проекции - Некоторые свойства прямых Чевы - Заполнение пространства тетраэдрами - Геометрия Понселе - О геометрических аксиомах расположения системы Гильберта - О выводе выражений для меры кривизны и меры кручения - Элементарное доказательство обобщенной теоремы умножения гамма-функций - Нахождение рациональных корней численного уравнения - О формуле Кардана - Об одном свойстве системы двух кругов - Два свойства астроиды - Кривые, связанные со взаимными окружностями - Обобщенные конхоидальные кривые - Циссоиды эллипса и гиперболы - Упрощенный способ графического определения коэффициентов ряда Фурье.

ISBN 978-5-458-25359-8

и воображения соединялись с неисчерпаемым запасом жизнерадостности, оставив у всех знавших его впечатление и теперь, через десять лет, неизгладимое.

Внешние очертания жизни П. С. Урысона не сложны. Он родился 3 февраля 1898 г. в Одессе. По окончании Московской частной гимназии П. Н. Поповой он поступил в Московский университет (в 1915 г.), причем студентом занимался главным образом физикой. Успех этих занятий (которыми руководил акад. П. П. Лазарев) был настолько значителен, что в результате их появилась печатная работа П. С Урысона о радиации трубок Кулиджа.

Однако в конце университетского курса математические интересы П. С. Урысона под влиянием преподавания профессора (теперь академика) Н. Н. Лузина взяли верх над его интересом к физике, и по окончании университета в 1919 г. он был оставлен при университете по кафедре Н. Н. Лузина. В этот момент он уже окончательно стал математиком.

Блестяще сдав в 1920/21 г. магистрантские экзамены, П. С. Урысон получил в 1921 г. доцентуру в Московском университете, к которой присоединилась в 1923 г. профессура в тогдашнем 2-м университете (теперь — педагогический институт им. А. С. Бубнова). Основные его топологические идеи возникли в 1921 г., после того как проблема топологического определения линии была ему поставлена проф. Д. Ф. Егоровым. С тех пор математическая жизнь П. С. Урысона представляла непрерывную цепь блестящих успехов. Его заграничные поездки в 1923 и 1924 гг. принесли его идеям признание европейских авторитетов и дали ему ряд новых проблем. Как раз последние недели его жизни были полны творческими планами. Все они оборвались 17 августа 1924 г.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СРЕДСТВАМИ

Р. Н. Бончковский (Москва)

1. Широко известен элементарный способ отыскания минимума функции $z = x^2 + px + q$. Для этого приводят ее к виду

$$z = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

и замечают, что функция z достигает минимума тогда, когда член $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ обращается в нуль, т. е. при $x = -\frac{p}{2}$.

Подобным же образом для исследования функции $y = ax^2 + bx + c$ приводят ее к виду

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

и замечают, что при $x = -\frac{b}{2a}$ первый член правой части обращается в нуль и, следовательно, функция y достигает минимума, если $a > 0$, или максимума, если $a < 0$.

Можно указать почти столь же простой способ для отыскания максимума и минимума функции третьей степени.

2. Пусть

$$z = x^3 + px^2 + qx + r.$$

Положим, что

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - m)^2(x - n) + s. \tag{1}$$

Раскрыв в правой части скобки и приведя подобные члены, получим:

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (2m + n)x^2 + (m^2 + 2mn)\,x + (-m^2n + s).$$

Последнее равенство должно быть тождеством, а потому коэфициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях должны быть равны; это дает три уравнения:

$$-(2m + n) = p; \quad m^2 + 2mn = q; \quad -m^2n + s = r. \tag{2}$$

Исключив n из первых двух уравнений, получим:

$$3m^2+2pm+q=0,$$

что дает:

$$m=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-3q}}{3}. \tag{3}$$

Исследуем отдельно три возможных случая.

3. Если $p^2-3q<0$, условие (3) дает для m комплексные значения и, следовательно, функция z не может быть представлена в виде (1). Легко убедиться, что в этом случае функция z возрастает вместе с возрастанием x и поэтому не имеет ни максимума, ни минимума. Действительно,

$$z=x^3+px^2+qx+r=\left(x+\frac{p}{3}\right)^3+\left(q-\frac{p^2}{3}\right)x+\left(r-\frac{p^3}{27}\right). \tag{4}$$

Первый член этой суммы с возрастанием x возрастает. В силу условия $p^2-3q<0$, или $q-\frac{p^2}{3}>0$, коэфициент при x во втором члене положителен и, следовательно, второй член рассматриваемой суммы также возрастает. Последний член суммы, как легко видеть, постоянен. Итак, z есть сумма трех членов, из которых два возрастают, а третий постоянен; значит z есть возрастающая функция. Отсюда видно, что при $p^2-3q<0$ функция z не имеет ни максимума, ни минимума.

4. Если $p^2-3q=0$, то, как видно из (4),

$$z=\left(x+\frac{p}{3}\right)^3+\left(r-\frac{p^3}{27}\right).$$

Функция z есть опять возрастающая функция, так как она составлена из суммы двух функций, из которых первая возрастает, а вторая постоянна. Поэтому при условии $p^2-3q=0$ функция z также не имеет ни максимума, ни минимума.

5. Если, наконец, $p^2-3q>0$, то формула (3) дает два значения для m, которые обозначим m_1 и m_2. С помощью уравнений (2) найдем соответствующие значения коэфициентов n и s. Получим две системы значений:

$$\left.\begin{aligned} m_1&=\frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3}, & n_1&=\frac{-p-2\sqrt{p^2-3q}}{3}, & s_1&=r+m_1^2n_1;\\ m_2&=\frac{-p-\sqrt{p^2-3q}}{3}, & n_2&=\frac{-p+2\sqrt{p^2-3q}}{3}, & s_2&=r+m^2n_2;\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и z можно написать в виде (1) двумя способами:

$$z=(x-m_1)^2(x-n_1)+s_1, \tag{6a}$$

$$z=(x-m_2)^2(x-n_2)+s_2. \tag{6b}$$

Уравнения (5) показывают, что $m_1 \neq n_1$, $m_2 \neq n_2$. Именно, всегда

$$m_1 > n_1, \quad m_2 < n_2. \tag{7}$$

Исследуем теперь выражение (6*a*) вблизи значения $x = m_1$.

Если x несколько (но немного) меньше m_1, так что $n_1 < x < m_1$, то множитель $(x - m_1)^2$ положителен, а множитель $(x - n_1)$ имеет знак числа $(m_1 - n_1)$, т. е., как видно из условия (7), положителен, а значит и весь первый член положителен.

При $x = m_1$ множитель $(x - m_1)^2$ обращается в нуль, а значит и весь первый член равен нулю.

Если же x несколько (но немного) больше m_1, то множитель $(x - m_1)^2$ положителен, а множитель $(x - n_1)$ имеет знак числа $(m_1 - n_1)$, т. е. положителен, а значит и весь первый член положителен.

Изложенное показывает, что при $x = m_1$ первый член выражения (6*a*) имеет минимум, равный нулю, следовательно, функция z имеет минимум, равный s_1.

Исследуем теперь выражение (6*b*).

Если x несколько (но немного) меньше m_2, то множитель $(x - m_2)^2$ положителен, а множитель $(x - n_2)$ имеет знак числа $(m_2 - n_2)$, т. е. отрицателен. Следовательно, весь первый член выражения (6*b*) отрицателен.

Если же $x = m_2$, то множитель $(x - m_2)^2$ обращается в нуль и весь первый член равен нулю.

Если, наконец, x несколько (но немного) больше m_2, то множитель $(x - m_2)^2$ положителен, а множитель $(x - n_2)$ имеет знак числа $(m_2 - n_2)$, т. е. отрицателен, и весь первый член отрицателен.

Это показывает, что при $x = m_2$ первый член выражения (6*b*) имеет максимум, равный нулю, следовательно, функция z имеет максимум, равный s_2.

6. Изложенный способ исследования функции 3-й степени можно представить в виде следующей схемы.

Составляем выражение $p^2 - 3q$. Если $p^2 - 3q \leqslant 0$, функция не имеет экстрем и надобность в дальнейшем исследовании отпадает. Если же $p^2 - 3q > 0$, то находим два значения m по формуле:

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}.$$

По формулам

$$n = -(2m + p), \quad s = r + m^2 n$$

находим соответствующие значения n и s. Получаем две системы значений:

$$m_1, n_1, s_1 \quad (m_1 > n_1); \quad m_2, n_2, s_2 \quad (m_2 < n_2).$$

Функция имеет минимум при $x = m_1$, равный s_1, и максимум при $x = m_2$, равный s_2.

7. Если функция y имеет вид

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

то ее можно преобразовать так:

$$y = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right),$$

и положив $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r = \frac{d}{a}$, будем иметь:

$$y = a(x^3 + px^2 + qx + r) = az.$$

Поэтому, при $a > 0$ функция y имеет максимум и минимум при тех же значениях x, что и функция z, а при $a < 0$ функция y имеет максимум при том значении x, при котором z имеет минимум, и минимум при том значении x, при котором z имеет максимум.

Пример 1. $z = x^3 + 5x + 2$.

Дубнов, Задачник по диференциальному исчислению, задача № 560.

Решение.

$$p^2 - 3q = -15 < 0.$$

Следовательно, функция не имеет экстрем.

Пример 2. $y = \frac{1}{10}(2x^3 - 6x^2 - 18x + 15)$.

Там же, № 557.

Решение.

$$z = x^3 - 3x^2 - 9x + \frac{15}{2}.$$

$$p^2 - 3q = 9 + 27 = 36 > 0.$$

Функция имеет экстремы.

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 27}}{3} = \frac{3 \pm 6}{3},$$

$$m_1 = 3, \quad m_2 = -1.$$

$$n_1 = -p - 2m_1 = 3 - 6 = -3, \qquad n_2 = -p - 2m_2 = 3 + 2 = 5.$$

$$s_1 = r + m_1^2 n_1 = \frac{15}{2} - 3^2 \cdot 3 = -\frac{39}{2}, \qquad s_2 = r + m_2^2 n_2 = \frac{15}{2} + 1^2 \cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

Так как $m_1 > n_1$, $m_2 < n_2$, то при $x = 3$ функция z имеет минимум, равный $-\frac{39}{2}$, при $x = -1$ функция z имеет максимум, равный $\frac{25}{2}$. Следовательно, при $x = 3$ функция y имеет минимум, равный $-3{,}9$, при $x = -1$ функция y имеет максимум, равный $2{,}5$.

ОБ УРАВНЕНИИ $\sum\limits_{x=1}^{x=n} N_x^3 = 0$

(Задача Эйлера)

А. В. (Москва)

В тождестве

$$(y_1 - y_2)^3 + (y_2 - y_3)^3 + y_3^3 = y_1^3 - 3y_2(y_1^2 - y_3^2) + 3y_2^2(y_1 - y_3) \qquad (1)$$

положим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3(3m^3+1), \\ y_2 &= (3m^3+1)^3, \\ y_3 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3(3m^3-1). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как

$$3y_2(y_1^2 - y_3^2) = 3(3m^3+1)^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot 2 = \\ = [2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3(3m^3+1)]^3 = y_1^3,$$

$$3y_2^2(y_1 - y_3) = 3(3m^3+1)^6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3 \cdot 2 = [2 \cdot 3 \cdot m(3m^3+1)^2]^3,$$

то из (1) следует:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3(3m^3+1) - (3m^3+1)^3]^3 + [(3m^3+1)^3 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3(3m^3-1)]^3 + \\ + [2^2 \cdot 3^2 \cdot m^3(3m^3-1)]^3 + [-2 \cdot 3 \cdot m(3m^3+1)^2]^3 = 0. \quad (3)$$

Это тождество будет решением уравнения

$$\sum_{x=1}^{x=4} N_x^3 = 0.$$

В тождестве

$$(y_1 - y_2)^3 + (y_2 - y_3)^3 + \sum_{k=3}^{k=n} (y_k - y_{k+1})^3 + y_{n+1}^3 + z^3 =$$

$$= y_1^3 - 3y_2(y_1^2 - y_3^2) + 3y_2^2(y_1 - y_3) - 3\sum_{k=3}^{k=n} [y_k \cdot y_{k+1}(y_k - y_{k+1})] -$$

$$-(z^3 + 3^2)^3 - (2z)^3 - (3z)^3 - (4z)^3 + (z^3)^3 + (3z^2)^3 + (3^2)^3 + (7z)^3. \qquad (4)$$

Положим опять y_1, y_2, y_3 по (2) и

$$y_{k+1} = 2^2 \cdot 3^{2k-2} \cdot m^3(3m^3-1) \quad (k > 2).$$

Тогда

$$3y_k \cdot y_{k+1}(y_k - y_{k+1}) = -[2^3 \cdot 3^{2k-2} \cdot m^3(3m^3-1)]^3,$$

$$y_k - y_{k+1} = -2^5 \cdot 3^{2k-4} \cdot m^3(3m^3-1).$$

Подставив эти выражения в (4), получим:

$$[2^2\cdot 3^2\cdot m^3(3m^3+1)-(3m^3+1)^3]^3+[(3m^3+1)^3-2^2\cdot 3^2\cdot m^3(3m^3-1)]^3+$$

$$+\sum_{k=3}^{k=n}[-2^5\cdot 3^{2k-4}\cdot m^3(3m^3-1)]^3+[2^2\cdot 3^{2k-2}\cdot m^3(3m^3-1)]^3+$$

$$+[-2\cdot 3\cdot m(3m^3+1)^2]^3+\sum_{k=3}^{k=n}[-2^3\cdot 3^{2k-3}\cdot m^3(3m^3-1)]^3+$$

$$+z^3+(z^3+3^2)^3+(2z)^3+(3z)^3+(4z)^3+(-z^3)^3+(-3z^2)^3+ \qquad (5)$$

$$+(-3^2)^3+(-7z)^3=0.$$

Тождество (5), содержашее всего $2n+9$ кубов, будет имегь при

m	n	z	Число кубов
$\neq 0$	>2	$=0$	$2n$
$=0$	>2	$+1$	5
$=0$	>2	-1	7
$=0$	>2	$\neq 0;\ \pm 1$	9
$\neq 0$	3	$+1$	11
$\neq 0$	3	-1	13
$\neq 0$	>2	$\neq 0;\ \pm 1$	$2n+9$

т. е. тождество (5) дает решение уравнения $\sum_{x=1}^{x=n} N_x^3=0$ для произвольного целого числа $n>4$. Для случая $n=4$ решение дает тождество (3).

ИЗ ЛИТЕРАТУРЫ О ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА:

Euler L., O era omnia, Series I, Opera mathematica.
Kronecker L., Werke.
Schwering K., Arch. der Math. und Phys. (3), 2, 1902.
Kuhne H., там же (3), 4.
Веребрюсов А. А., Математический сборник, т. 23.
Агрономов Н. Н., Изв. Ф.-М. о-ва при Казанском университете, 1914 г., т. XII.

СООТНОШЕНИЯ ЭЙЛЕРА МЕЖДУ КРУГОМ, ОПИСАННЫМ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И КРУГАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ К ТРЕМ СТОРОНАМ ЭТОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Б. Гамбье (Париж)

Я рассматриваю треугольник ABC, вписанный в круг центра O и радиуса R, называю I, I', I'', I''' центры вписанного и вневписанных кругов (фиг. 1). Биссектриса AII' пересекает круг O в точке D, и мы имеем $DB = DC = DI = DI'$; биссектриса $AI''I'''$ пересекает круг O в точке D', и мы имеем $D'B = D'C = D'I'' = D'I'''$.

Из некоторой точки P прямой AII', как из центра, я описываю круг радиуса $PQ = r$, касательный к обеим сторонам угла A; пусть $OP = d$. Из подобных треугольников APQ и $DD'C$ имеем:

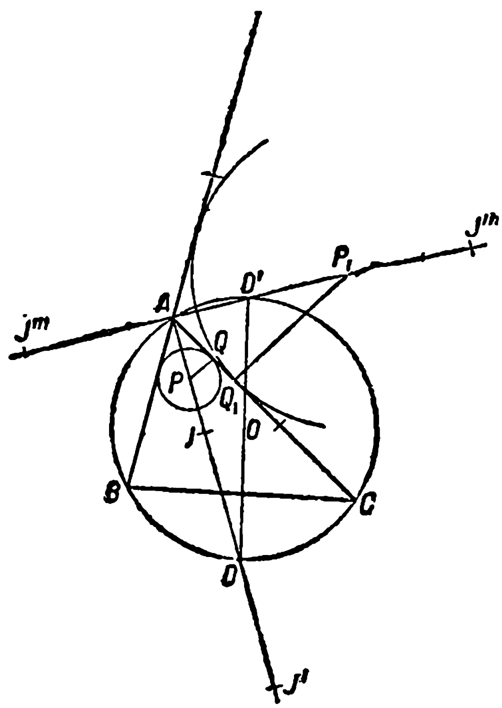
$$\frac{r}{DC} = \frac{AP}{?}$$

или

$$2Rr = AP \cdot DC.$$

Выбирая на AD положительное направление, напишем:

$$\left.\begin{aligned} 2Rr &= AP \cdot ID = AP \cdot DI', \\ d^2 - R^2 &= PA \cdot PD, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Фиг. 1.

откуда, складывая и вычитая, получаем:

$$\left.\begin{aligned} d^2 - R^2 + 2Rr &= AP \cdot ID + AP \cdot DP = AP \cdot IP, \\ d^2 - R^2 - 2Rr &= AP \cdot I'D + AP \cdot DP = AP \cdot I'P. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Доказательство не зависит от положения точки P на AD:

если P совпадает с I, то имеем:

$$d^2 = R^2 - 2Rr; \qquad (3)$$

если P совпадает с I', то имеем:

$$d^2 = R^2 + 2Rr. \qquad (4)$$

Это — так называемые соотношения Эйлера.

Если взять на полупрямой AI'' точку P_1, то имеем аналогично, полагая снова $P_1Q_1 = r$, $OP_1 = d$,

$$2Rr = AP_1 \cdot D'I' = AP_1 \cdot I'''D', \quad d^2 - R^2 = P_1D' \cdot P_1A; \qquad (5)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} d^2-R^2-2rR &= AP_1(I''D'+D'P_1)=AP_1\cdot I''P', \\ d^2-R^2+2rR &= AP_1(I'''D'+D'P_1)=AP_1\cdot I'''P_1. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Пользуясь соотношениями (2) или (6), мы легко доказываем обратные предложения: если два круга центров O и P удовлетворяют соотношению (3) или соотношению (4), то какая-либо точка круга O есть вершина треугольника, вписанного в круг O и имеющего круг P своим вписанным или вневписанным кругом.

Действительно, предположим, что соотношение (3) имеет место: из него заключаем $R>2r$, $d<R-r$; значит, круг P целиком содержится внутри круга O: из точки A круга O я провожу касательные к кругу P, они пересекают вторично круг O в точках B и C; первое соотношение (2) принимает вид $AP\cdot IP=0$, значит, P совпадает с I.

Предположим, наоборот, что соотношение (4) имеет место: из него вытекает $R<d<R+r$. Легко видеть, что если $d<3R$, то оба круга пересекаются; тогда как если $d>3R$, то круг P содержит круг O целиком внутри себя; мы, следовательно, ограничимся случаем $d<3R$.

Я беру точку A на внешней по отношению к кругу P части круга O и начинаю снова то же построение: если круг P вписан в угол BAC, то второе соотношение (2) дает $I'P=0$. Если круг P вписан в один из углов, принадлежащих к BAC, например в угол BAC, то я пользуюсь первым соотношением (6), которое дает $I''P=0$; во всяком случае P совпадает с центром одного из вневписанных кругов треугольника.

Перевел Н. А. Путята.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ НЕКОТОРЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРОЕКЦИЙ

С. И. Зетель (Москва)

1. В плоскости треугольника ABC дана точка. Спроектируем эту точку на стороны треугольника. Треугольник, вершинами которого являются проекции данной точки, называется треугольником проекций этой точки относительно данного треугольника.

В 1874 г. Лемуаном (Lemoine) была предложена следующая задача: вычислить площадь треугольника проекций точки пересечения симедиан (симедианы — прямые, исходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон). Решение этой задачи дано Шадю (Chadu) в „Nouvelles Annalles de Mathématiques" за 1875 г. Площадь искомого треугольника равна

$$\frac{12S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

где S — площадь данного треугольника.