Ф. Франк

Дифференциальные и интегральные уравнения математической физике. Часть 2

Книга 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ф11

Ф. Франк
Ф11 Дифференциальные и интегральные уравнения математической физике. Часть 2: Книга 1 / Ф. Франк – М.: Книга по Требованию, 2024. – 630 с.

ISBN 978-5-458-25743-5

Предлагаемая книга не есть учебник теоретической физики, она имеет дело только с медленно меняющейся* частью ее, являющейся промежуточным звеном между системой гипотеза и опытом и представляющей собой необходимое орудие в самых различных ее областях. Теория возмущений, разработанная Лапласом и Лагранжем для вычисления влияния одних планет на орбиты других, оказалась полезной в применении к столь важному в квантовой теории спектров изменению энергии атомов в электрическом поле, приводящему к Штарк-эффекту. Методы, открытые Фурье в его теории теплопроводности, Эйнштейн и СмолуховскиЙ применили почти без изменений к выводу законов броуновского движения при различных внешних условиях. Введенные Даламбером, Эйлером и Пуассоном методы вычисления собственных колебаний струн и мембран применяются в волновой механике Шредингера для определения стационарных состояний атомов. Наконец, теория потенциала, созданная Лапласом- и Гауссом, Коши и Риманом, в наше время нашла применение, между прочим, к вычислению поддерживающей силы самолета.

ISBN 978-5-458-25743-5

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ ИЗДАТЕЛЯ К ПЕРВОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая книга не есть учебник теоретической физики, она имеет дело только с „медленно меняющейся“ частью ее, являющейся промежуточным звеном между системой гипотез и опытом и представляющей собой необходимое орудие в самых различных ее областях. Теория возмущений, разработанная Лапласом и Лагранжем для вычисления влияния одних планет на орбиты других, оказалась полезной в применении к столь важному в квантовой теории спектров изменению энергии атомов в электрическом поле, приводящему к Штарк-эффекту. Методы, открытые Фурье в его теории теплопроводности, Эйнштейн и Смолуховский применили почти без изменений к выводу законов броуновского движения при различных внешних условиях. Введенные Даламбером, Эйлером и Пуассоном методы вычисления собственных колебаний струн и мембран применяются в волновой механике Шредингера для определения стационарных состояний атомов. Наконец, теория потенциала, созданная Лапласом и Гауссом, Коши и Риманом, в наше время нашла применение, между прочим, к вычислению поддерживающей силы самолета.

Было бы большой ошибкой предполагать, что область собственно „математической физики“, как мы можем ее назвать, употребляя старый термин, играет, в противоположность миру гениальных гипотез, на которых основана теоретическая физика, лишь подчиненную роль. Наоборот, большинство гипотез высказывалось таким образом, что можно было воспользоваться уже готовым математическим аппаратом и при его помощи привести их в связь с опытом. Уже разработанные теории математической физики часто побуждали фантазию и приводили таким образом к открытию гипотез. Не будем уже говорить о многочисленных теориях, которые в той или иной форме используют схему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами или уравнения потенциала, схему, которая предпочтительна потому, что все ее математические следствия хорошо известны. Но уже в наше время гамильтонова аналогия между световыми лучами и траекториями частиц, так же как и связанная с ней теория интегрирования Гамильтона-Якоби привела Шредингера к его новой волновой механике, представляющей собой по существу превращение формальной аналогии в физическое представление.

Для того чтобы, несмотря на сотрудничество многих авторов, обеспечить за книгой характер учебника, а не справочника, мы придерживались, поскольку было возможно, следующих принципов.

Стремление давать не рефераты о теориях, а только полностью проделанные выводы и вычисления, осуществлялось тем, что материал ограничивался во многих отношениях. Прежде всего, мы отказались от подробного исследования физических гипотез, так же как и от сравнения результатов вычисления с опытами, ограничиваясь в основном лишь собственно математической „промежуточной областью“; при этом в большинстве случаев исключались также все приближенные методы, чем достигалось некоторое единство целого. Мы не стремились также к полноте, но везде давали характерные примеры применения различных математических методов. Ссылки на литературу имеются лишь в тех случаях, когда речь идет о работах, результаты которых еще не вошли в обычные учебники. В конце же отдельных частей или глав имеются краткие указатели учебников, которые по рассматриваемым специальным вопросам содержат больше материала, чем предлагаемая книга.

Выбор подробно излагаемых проблем определялся следующими моментами. Во-первых, возможность иллюстрировать на физических примерах понятия новейшей математики, как, например, касательные преобразования, интегральные инварианты, пространства Римана, задачи о собственных значениях, интегральные уравнения. Во-вторых, связь с современной теоретической физикой, например, с броуновским движением, теорией излучения и т. д. В-третьих, необходимость рассмотрения примеров, имеющих значение для технических применений. В частности, было обращено внимание на области, наиболее существенные для современной техники, как, например, теория самолетов, усилители, беспроволочная телеграфия, токи в земле.

Что касается отношения предлагаемой новой обработки к веберовской обработке лекций Римана, то мы стремились не к возможно большему внешнему сходству с ней, а к тому, чтобы для нашего времени выполнить ту задачу, которую Вебер так мастерски разрешил для своего.

... (Необходимость значительных изменений по сравнению с изданиями Вебера) мы можем кратко резюмировать теми же словами, которые Г. Вебер предпослал в 1900 г. своему первому изданию лекций Римана:

„... Таким образом, несомненно, что неизмененное или немного измененное издание этих лекций является совершенно неуместным, если мы хотим, чтобы книга имела не только историческое значение... Поэтому пришлось предпринять полную переработку ее...“

Каждый физик нашего поколения может вспомнить, что при появлении первого веберовского издания многие читатели с сожалением вспоминали о „наглядно-физическом“ характере лекций Римана (в издании Хаттендорфа) по сравнению с „математически абстрактным“ характером книги Вебера. Нет сомнения, что многим издание Вебера будет теперь казаться „физически“ наглядным, а предлагаемая книга — „математически абстрактной“.

Но развитие книги есть не что иное, как отражение развития самих физико-математических наук, представляющего собой несомненный факт.

Филипп Франк

ОТ РЕДАКТОРОВ РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Предлагаемая книга является одной из немногих в физике книг, имеющих большую, именно, более чем полувековую историю. В 1876 г. она появилась как лекции одного из величайших математиков XIX века — Римана (Riemann): „Vorlesungen über Schwere, Elektrizität und Magnetismus“, в обработке Хаттендорфа (Hattendorf). Через 24 года — в 1900 г. Г. Вебер (G. Weber) издал новую обработку лекций Римана, которая выдержала ряд изданий и стала чрезвычайно популярной. Наконец, в 1927 г. Ф. Франк (Ph. Frank) и Р. Мизес (R. Mises) предприняли издание книги, которая была названа 7 изданием книги Римана-Вебера и которая по мысли издателей должна была иметь то же значение, какое для своего времени имели лекции Римана. От первоначальных лекций в ней, разумеется, ничего не осталось. Книга была разделена на две части: общематематическую и прикладную (физическую). Вторая часть (на первой мы не будем останавливаться, так как она не вошла в русское издание) должна была обнимать всю область математической физики. Задача эта, которая была по силам одному человеку во времена Римана, стала много сложнее в наше время. Поэтому книга была написана целым рядом авторов. Это обстоятельство значительно изменило ее характер. В то время как обе первые обработки лекций Римана представляли собой единую систему математической физики, книга Франка и Мизеса есть немногим более чем совокупность статей по всем намеченным областям. Мы не могли ставить себе задачу переработки всего этого колоссального материала с целью его объединения с единой точки зрения; это была бы совершенно непосильная работа.

Русский перевод был сделан с первого немецкого издания. Первая (общематематическая) часть его не была переведена, так как при ряде ее достоинств она все же не столь необходима; имеется Курант и Гильберт „Методы математической физики“ и ряд книг и монографий, посвященных отдельным вопросам математической физики. Издание русского перевода сильно задержалось, и за это время успело выйти второе немецкое издание. Оно отличается от первого добавлением главы, посвященной аналогии оптики и механики, и раздела, посвященного волновой механике; далее — тем, что заново написана другими авторами статья по гидродинамике; наконец, многочисленными более мелкими дополнениями и исправлениями текста.

Русское издание несколько отличается как от первого, так и от второго немецкого изданий. Прежде всего статья Кармана по теории идеальных жидкостей была, по инициативе В. А. Фока, заменена статьей М. Лагалли (M. Lagally) из VII тома „Handbuch der Physik“; Карман — большой ученый, тем не менее его статья была написана небрежно, чем и объясняется замена. Необходимость изменений в этом разделе была, между тем, независимо от нас, признана и немецкими издателями, которые во втором издании заменили прежние статьи по гидродинамике новыми.

Далее, нам пришлось по ряду причин отказаться от включения в книгу добавленной во втором немецком издании шестой части, посвященной волновой механике. Прежде всего эта статья очень мало связана с остальным материалом книги. Квантовую физику нельзя рассматривать просто как пример на определение собственных колебаний, и попытка уложить ее в рамки этой книги привела к мало удачному компромиссу. Статья Г. Бека содержит много общего материала, которому место в учебнике, а не в книге, предназначенной для читателя, уже знакомого с физикой. Материал, представляющий специально математический интерес, в ней очень неполон. Для того чтобы дать полное представление хотя бы только о математической стороне квантовой механики, потребовалось бы гораздо больше места, что сделало бы книгу чрезмерно громоздкой. А так как к тому же статья Г. Бека есть далеко не лучшее изложение квантовой механики, то мы решили ограничить рамки книги классической математической физикой.

Остальные дополнения ко второму немецкому изданию внесены в русское издание. Кроме того, оно содержит ряд добавочных статей: статья К. В. Меликова о касательных преобразованиях; глава, посвященная теории распространения колебаний в упругих телах, написанная С. Л. Соболевым; наконец, статья В. А. Фока о распространении электромагнитных волн вдоль земли, в которой содержится исправление вычислений и выводов А. Зоммерфельда. Последнее сделано с согласия автора, частично использовавшего во втором немецком издании указания В. А. Фока.

Мы думаем, что даже при наличии отмеченных выше недостатков книга будет несомненно полезна советским физикам и инженерам, как первая книга, содержащая подробное и охватывающее все области изложение методов решения конкретных задач классической математической физики.

В написании, переводе и редактировании перевода книги принимали участие следующие лица:

I часть (см. оглавление) написал Ф. Франк (Ph. Frank), дополнение — К. В. Меликов; перевели: гл. I — В. В. Солодовников, гл. II—VI — Л. Э. Гуревич; редактировали перевод: гл. I — Л. Э. Гуревич, гл. II—VI — К. В. Меликов.

II часть, гл. VII—IX написал Е. Треффц (E. Trefftz), гл. X — М. Лагалли (M. Lagally), гл. XI — Факсен (H. Faxén) и К. В. Озеен (C. W. Oseen), гл. XII — С. Л. Соболев; перевел гл. VII—XI — О. М. Тодес; редактировали: гл. VII—IX Н. И. Мусхелишвили, гл. X—XI — В. А. Фок, гл. XII — Л. Э. Гуревич.

III часть написал Р. Фюрт (R. Fürth), перевел С. В. Измайлов, редактировал Ю. А. Крутков.

IV часть написал Ф. Нётер (F. Noether), перевел Л. Э. Гуревич, редактировал М. П. Бройнштейн.

V часть написал А. Зоммерфельд (A. Sommerfeld), дополнение — В. А. Фок; перевел В. С. Сорокин; редактировал — В. А. Фок. Ряд мелких добавлений и изменений текста во втором немецком издании переведен Солодовниковым. Общая редакция книги выполнена Л. Э. Гуревичем.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 1. Световые лучи и волновые поверхности в любых телах

1. Однородные изотропные тела. В геометрической оптике рассматривается только одна определенная сторона оптических явлений. Если к моменту t_0 световое возмущение успело распространиться до известной поверхности F_0, называемой волновой поверхностью, относящейся к моменту t_0, то задача геометрической оптики состоит в том, чтобы ответить на вопрос: в какую поверхность F_1 перейдет эта волновая поверхность к моменту t_1, вследствие распространения света. Кривые, описываемые отдельными точками волновой поверхности при ее перемещении, называются световыми лучами. Обозначим через v скорость распространения светового возмущения вдоль этих лучей или лучевую скорость, а скорость w перемещения волновой поверхности в направлении, нормальном к ее положению в данный момент, назовем волновой скоростью. Таким образом, задача геометрической оптики состоит в вычислении пути световых лучей и перемещения волновых поверхностей в предположении, что оптические свойства среды заданы. Геометрическую оптику интересует лишь одна сторона явления, а именно, величина лучевой скорости в каждой точке среды в любом направлении.

Условимся определять точку среды при помощи радиуса-вектора $\mathbf{r}$ с составляющими x, y, z, в покоящейся прямоугольной координатной системе, а любое направление в этой точке — при помощи единичного вектора $\mathbf{s}$ с составляющими s_x, s_y, s_z. Тогда среда является оптически определенной в смысле геометрической оптики, если нам задана величина v как функция от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, т. е. зависимость вида:

$$v = v(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = v(x, y, z;\ s_x, s_y, s_z). \tag{1}$$

В том случае, когда v не зависит от направления $\mathbf{s}$, а зависит только от $\mathbf{r}$, тело называется изотропным [1]). Если, кроме того, v имеет одно и то же значение во всех точках тела и, следовательно, величина $\mathbf{r}$ также не входит в функцию, то тело называется однородным. Значение этой постоянной скорости в пустоте мы будем обозначать через c. Распространение светового возмущения в пустоте или в каком-нибудь однородном изотропном теле можно изучать, сделав простое предположение, что световые лучи распространяются по прямым линиям. Если нам задан пучок световых лучей, в котором через каждую точку проходит только один луч, то каждому значению $\mathbf{r}$ соответствует некоторое значение единичного вектора луча $\mathbf{s}$. Следовательно, такого рода пучок можно описывать при помощи

[1]) См. *A. Sommerfeld* und *J. Runge*, Ann. d. Phys. **35**, 1911, 277.

функции $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r})$. Исследуем прежде всего тот случай, когда функция $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ описывает пучок прямых линий.

Обозначим через $d\sigma$ элемент дуги кривой; если кривая совпадает с лучом света, то функция должна иметь вдоль всей кривой постоянное значение, т. е.

$$\frac{d\mathbf{s}}{d\sigma} = 0; \qquad d\sigma = |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{2}$$

Вводя векторные обозначения, можно выразить производную от $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ по элементу дуги также следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{s}}{d\sigma} = (\mathbf{s}\nabla)\,\mathbf{s}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Эту формулу легко привести к более удобному виду, если воспользоваться соотношением

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = \nabla(\mathbf{ab}) = (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} + (\mathbf{a} \times \operatorname{rot}\mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \operatorname{rot}\mathbf{a}), \tag{3a}$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ обозначают произвольные векторные поля.

Полагая в этой формуле $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{s}(\mathbf{r})$ и принимая во внимание, что $\mathbf{ss} = 1$, откуда следует, что градиент равен нулю, мы получим из (3a)

$$(\mathbf{s}\nabla)\,\mathbf{s} + \mathbf{s} \times \operatorname{rot}\mathbf{s} = 0. \tag{4}$$

и следовательно, согласно (3):

$$(\operatorname{rot}\mathbf{s} \times \mathbf{s}) = 0. \tag{5}$$

Так как $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ есть единичный вектор, то величина $d\mathbf{s}$ представляет собой не что иное, как угол между касательными к двум соседним точкам кривой. Частное от деления этого угла на элемент $d\sigma$ дуги кривой есть, как известно, вектор кривизны $\mathbf{k}(\mathbf{r})$, направление которого совпадает с направлением главной нормали, а абсолютное значение равно обратной величине радиуса-вектора. Если при помощи $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ описывается произвольный пучок кривых, то на основании уравненения (4) мы будем иметь:

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{s}}{d\sigma} = (\mathbf{s}\nabla)\,\mathbf{s}(\mathbf{r}) = (\operatorname{rot}\mathbf{s} \times \mathbf{s}). \tag{6}$$

Световые лучи, следовательно, характеризуются также тем, что $\mathbf{k} = 0$.

Очевидно, что один из способов удовлетворить уравнению (5) заключается в предположении, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{s} = 0. \tag{7}$$

В этом случае, как известно, существует некоторая скалярная функция $S(\mathbf{r})$, обладающая тем свойством, что

$$\mathbf{s} = \operatorname{grad} S(\mathbf{r}). \tag{8}$$

Обозначая изменение функции S при изменении $\mathbf{r}$ на $\delta\mathbf{r}$ через δS, мы получим

$$\delta S = \delta\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} S = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla S. \tag{9}$$

Рассмотрим семейство поверхностей $S(\mathbf{r}) = S(x, y, z) = \mathrm{const}$ и предположим, что $\delta\mathbf{r}$ лежит в касательной плоскости к одной из поверхностей, тогда $\delta S = 0$, и уравнения (8) и (9) показывают, что $\mathbf{s}$ перпендикулярно к поверхности $S(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$, т. е. рассматриваемый пучок световых лучей пересекает поверхность $S = c$ под прямым углом к ней и, следовательно, он образует так называемую нормальную конгруэнцию прямых. Если мы перейдем вдоль светового луча, т. е. вдоль направления, перпендикулярного к поверхности, к соседней поверхности, для которой функция S отличается от первоначального значения на δS, то согласно (9)

$$\delta S = |\delta \mathbf{r}| \cdot |\operatorname{grad} S|. \tag{10}$$

Так как $\mathbf{s}$ есть единичный вектор, то в силу соотношения (8)

$$|\operatorname{grad} S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 1. \tag{11}$$

Отсюда, на основании (10), получим

$$\delta S = |\delta \mathbf{r}|, \tag{12}$$

т. е. расстояние по нормали между двумя соседними поверхностями имеет вдоль всех лучей одно и то же абсолютное значение. Таким образом, если световое возмущение распространяется от некоторой поверхности $S(\mathbf{r}) = S$ к некоторой другой поверхности $S(\mathbf{r}) = S_1$, то, интегрируя (12), мы получим, что $S_1 - S_0$ есть расстояние по нормали между обеими поверхностями. Поверхности $S = \text{const}$ называются волновыми поверхностями. Их можно найти, интегрируя уравнение в частных производных (11), которое называется уравнением эйконала.

2. Принцип Ферма и световые лучи. При переходе к произвольной среде мы должны вместо постоянной скорости света рассматривать более общую зависимость, выражаемую уравнением (1). Функция $v(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ определена только для таких значений s_x, s_y, s_z, которые удовлетворяют условию: $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$. Мы примем, что функция v задана в виде аналитического выражения, обладающего частными производными по своим аргументам. Мы увидим, что в этом случае любой зависимости функции v от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ световые лучи не будут перпендикулярны к волновой поверхности и мы уже не имеем права считать, что они прямолинейны.

Элементу волновой поверхности, содержащему точку $\mathbf{r}$, мы сопоставим единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к этому элементу поверхности.

Тогда волновая скорость w будет равна проекции лучевой скорости на направление $\mathbf{n}$. Следовательно, если $\mathbf{s}$ есть направление лучей, то для w мы получаем соотношение:

$$w = v(\mathbf{r}, \mathbf{s})\,\mathbf{sn}. \tag{13}$$

Предположение о прямолинейности лучей света уступает место принципу Ферма, согласно которому лучи распространяются таким образом, что световое возмущение попадает из какой-нибудь точки P_0 в другую точку P_1, лежащую в направлении распространения луча, в течение кратчайшего из возможных промежутков времени. Если элемент пути луча обозначить через $d\sigma$, то для прохождения этого расстояния свет будет затрачивать время, равное $\frac{d\sigma}{v}$. Обычно, вместо этого времени вводится ход луча, т. е. произведение постоянной c, представляющей собою скорость света в пустоте, на время, которое необходимо для того, чтобы свет успел распространиться от точки P_0 к точке P_1. Для хода луча S мы получаем выражение:

$$S = c \int\limits_{P_0}^{P_1} \frac{d\sigma}{v} = \int\limits_{P_0}^{P_1} \mu\, d\sigma, \tag{14}$$

где через μ обозначен коэффициент преломления среды,

$$\mu = \frac{c}{v}. \tag{15}$$

Мы можем задать каждую кривую, представляя $\mathbf{r}$, а следовательно и x, y, z как функции некоторого параметра u.

Вводя для производных этих величин обозначения:

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{du}; \quad x' = \frac{dx}{du}; \quad y' = \frac{dy}{du}; \quad z' = \frac{dz}{du}, \tag{16}$$

мы получим

$$d\sigma = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, du; \quad s_x = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \text{ и т. д.} \tag{17}$$

и

$$S = \int F(x, y, z, x', y', z')\, du, \tag{18}$$

причем

$$F(x, y, z, x', y', z') = \frac{c\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z, s_x, s_y, s_z)} = \mu \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{19}$$

Так как v, согласно (17), имеет нулевой порядок однородности относительно x', y', z', то функция F, определяемая формулой (19), представляет собою однородную функцию первого порядка относительно x', y', z'. Следовательно

$$F = x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'}. \tag{20}$$

Мы можем представить это уравнение в векторной форме при помощи символического вектора ∇. Так как F зависит от двух векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, то этот оператор можно выразить как через компоненты $\mathbf{r}$, так и через компоненты $\mathbf{r}'$. В последующем изложении мы всегда будем обозначать символом $\nabla_{\mathbf{a}}$ оператор, применение которого означает дифференцирование по составляющим вектора $\mathbf{a}$. Так например, $\nabla_{\mathbf{r}} F$ есть вектор с составляющими $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, а $\nabla_{\mathbf{r}'} F$ — вектор с составляющими $\frac{\partial F}{\partial x'}$ и т. д. Таким образом мы можем переписать уравнение (20) в следующем виде:

$$F = \mathbf{r}'(\nabla_{\mathbf{r}'} F). \tag{21}$$

Так как выражение $\nabla_{\mathbf{r}'} F$ очевидно имеет нулевой порядок однородности относительно x', y', z', то его можно выразить при помощи единичного вектора $\mathbf{s}$; мы запишем это в виде соотношения

$$\nabla_{\mathbf{r}'} F = \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{s}). \tag{22}$$

Если функцию F выразить через μ при помощи формулы (19), то функцию $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ можно найти в явном виде.

Именно, дифференцируя F по x', мы получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \mu \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} + \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, \frac{\partial \mu}{\partial x'},$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, \frac{\partial \mu}{\partial x'} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial s_x} \frac{\partial s_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mu}{\partial s_y} \frac{\partial s_y}{\partial x'} + \frac{\partial \mu}{\partial s_z} \frac{\partial s_z}{\partial x'} \right);$$

так как, согласно (17),

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\frac{\partial s_x}{\partial x'}=1-s_x^2;\qquad \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\frac{\partial s_y}{\partial x'}=-s_xs_y,$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\frac{\partial z_s}{\partial x'}=-s_zs_x,$$

то, произведя подстановку, мы будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=s_x\mu+\frac{\partial\mu}{\partial s_x}-s_x\left(s_x\frac{\partial\mu}{\partial s_x}+s_y\frac{\partial\mu}{\partial s_y}+s_z\frac{\partial\mu}{\partial s_z}\right)$$

или наконец в векторной форме

(23) $$\mathbf{p}(\mathbf{r},\ \mathbf{s})=\mu\mathbf{s}+\nabla_s\mu-\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}\nabla_s\mu).$$

С помощью этой формулы каждому вектору $\mathbf{s}$ в рассматриваемой среде можно привести в соответствие вектор $\mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{s})$.

Для этих векторов, согласно (23), мы получаем следующее соотношение

(24) $$(\mathbf{s},\mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{s}))=(\mathbf{ss})\,\mu(\mathbf{r},\mathbf{s})+(\mathbf{s}\nabla_s\mu)(1-(\mathbf{ss})).$$

Если в частности $\mathbf{s}$ есть единичный вектор, то

(25) $$\mu(\mathbf{rs})=\mathbf{s}\mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{s}),$$

что непосредственно вытекает также из (21).

Если для световых лучей интеграл (18) обращается в минимум, как требует принцип Ферма, то, как известно из вариационного исчисления, лучи должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Эйлера.

Эти уравнения в применении к световым лучам принимают вид:

(26) $$\frac{d}{du}\frac{\partial F}{\partial x'}=\frac{\partial F}{\partial x};\quad \frac{d}{du}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial F}{\partial y};\quad \frac{d}{du}\frac{\partial F}{\partial z'}=\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Если мы хотим представить эти уравнения в векторной форме, то лучше всего воспользоваться вектором $\mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{s})$, соответствующим единичному вектору $\mathbf{s}$ и определяемым уравнением (23). Выражая F через μ при помощи уравнения (19), мы получим из (26) и (22), принимая во внимание (17), уравнение светового луча в следующем виде:

(27) $$\frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{s})}{d\sigma}-\nabla_r\mu(\mathbf{r},\mathbf{s})=0.$$

Операция дифференцирования в первом члене здесь означает производную по элементу дуги искомой кривой. Мы припишем каждой точке пространства единичный вектор $\mathbf{s}$ при помощи соотношения $\mathbf{s}=\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Благодаря этому все пространство окажется заполненным семейством или конгруэнцией кривых. На основании соотношения $\mathbf{s}=\mathbf{s}(\mathbf{r})$ каждая функция $\varphi(\mathbf{r},\mathbf{s})$ может быть преобразована в функцию, зависящую только от $\mathbf{r}$, которую мы обозначим через $\widehat{\varphi}(\mathbf{r})$. Например

(28) $$\mu(\mathbf{r},\mathbf{s}(\mathbf{r}))=\widehat{\mu}(\mathbf{r});\quad \mathbf{p}(\mathbf{r},\mathbf{s}(\mathbf{r}))=\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}).$$

Таким образом, каждое поле единичного вектора $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ определяет поле соответствующего вектора $\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. С его помощью уравнение светового луча (27) может быть представлено также в виде:

(29) $$(\mathbf{s}\nabla_r)\,\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})-\nabla_r\mu(\mathbf{r},\mathbf{s})=0.$$

Уравнение (29) представляет собою целую конгруэнцию лучей и в рассматриваемом случае заменяет уравнения (2) и (3), имеющие место в случае однородных изотропных тел.

Если левую часть уравнения (29) обозначить через $\mathbf{k}$, то семейству кривых $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ будет соответствовать векторное поле $\widehat{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, которое в каждой точке пространства, аналогично (6), определяет „вектор кривизны" кривой „в отношении световых лучей в среде, характеризуемой показателем преломления $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{s})$"; при этом сами световые лучи изображаются кривыми с исчезающе малой кривизной ($\widehat{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0$). Можно наглядно представить поле $\widehat{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, если вместо $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ подставить его значение из (25). Подставляя в это уравнение вместо $\mathbf{s}$ произвольно выбранное семейство кривых $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, мы получим:

$$\mu(\mathbf{r}) = \mathbf{s}(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}). \tag{30}$$

Применим теперь к обеим частям уравнения (30) оператор ∇_r. При этом, согласно уравнению (28), мы должны принять во внимание, что величины μ и $\mathbf{p}$ содержат переменную $\mathbf{r}$ как явно, так и неявно (вследствие зависимости единичного вектора $\mathbf{s}$ от $\mathbf{r}$). Найдем составляющую вектора $\nabla_r\widehat{\mu}$ в направлении оси OX:

$$\frac{\partial\widehat{\mu}}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial s_x}\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial s_y}\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial s_z}\frac{\partial s_z}{\partial x}, \tag{31}$$

или в векторной форме

$$\nabla_r\widehat{\mu}(\mathbf{r}) = \nabla_r\mu(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + \nabla_r(\mathbf{s}\nabla_s\mu). \tag{32}$$

Применяя оператор ∇_r, нужно помнить, что от $\mathbf{r}$ зависит только $\mathbf{s}$, а не $\nabla_s\mu$. Произведя простое векторное преобразование правой части уравнения (32), мы получим

$$\nabla_r\widehat{\mu}(\mathbf{r}) = \nabla_r\mu(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + (\nabla_s\mu\nabla_r)\,\mathbf{s} + (\nabla_s\mu \times \operatorname{rot}\mathbf{s}(\mathbf{r})). \tag{33}$$

При этом применена формула $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$, в которой векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ заменены величинами $\nabla_s\mu$, $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ и символическим вектором ∇_r.

Для вычисления $\nabla_r(\mathbf{s}(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}))$ служит векторная формула (3а), в которой $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заменены через $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ и $\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. Таким образом, мы получаем:

$$\begin{aligned}\nabla_r(\mathbf{s}(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})) &= (\mathbf{s}\nabla_r)\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + (\widehat{\mathbf{p}}\nabla_r)\mathbf{s}(\mathbf{r}) + \\ &+ (\mathbf{s}(\mathbf{r}) \times \operatorname{rot}\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})) + (\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \times \operatorname{rot}\mathbf{s}(\mathbf{r})).\end{aligned} \tag{34}$$

Из равенства (30) вытекает, что правые части уравнений (33) и (34) должны быть равны. Если, кроме того, вместо $\widehat{\mathbf{p}}$ подставить его выражение, вытекающее из (23) и (28), и принять во внимание (4), то мы найдем, что

$$(\mathbf{s}\nabla_r)\,\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) - \nabla_r\mu(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \operatorname{rot}\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{s}(\mathbf{r}). \tag{35}$$

Полученное соотношение справедливо для всякой конгруэнции кривых, заданной при помощи поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ единичных векторов, а также для сопряженного с ней по уравнению (23) векторного поля, соответствующего среде с коэффициентом преломления $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{s})$. Поэтому вектор кривизны $\widehat{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ кривых поля $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ по отношению к световым лучам в рассматриваемой среде определяется соотношением:

$$\widehat{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{s}(\mathbf{r}). \tag{36}$$