

К. А. Андреев

Основной курс аналитической геометрии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
К11

К11 **К. А. Андреев**
Основной курс аналитической геометрии / К. А. Андреев – М.: Книга по Требованию, 2016. – 616 с.

ISBN 978-5-458-56853-1

С приложением примеров, задач и вопросов для повторения.

ISBN 978-5-458-56853-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2016
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2016

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Часть вторая.

Геометрія въ пространствѣ.

Глава первая. Координаты и уравненія.

	Стр.
§ 1. Прямолинейныя координаты (374—383).	305
§ 2. Проекціи. Угловыя отношенія (384—402).	311
§ 3. Преобразованіе координатъ (403—411).	323
§ 4. Полярныя координаты (412—415).	333
§ 5. Геометрическое значеніе уравненій (416—425).	336
Примѣры и задачи (16).	342

Глава вторая. Плоскость.

§ 1. Уравненіе плоскости (426—431).	344
§ 2. Задачи на плоскости (432—447).	350
§ 3. Примѣненіе сокращеннаго способа (448—454).	364
Примѣры и задачи (16).	371

Глава третья. Прямая линія.

§ 1. Уравненіе прямой линіи (455—458).	373
§ 2. Задачи на прямую линіи и плоскости (459—478).	376
§ 3. Системы прямыхъ линій. Мнимыя плоскости и прямая (479—489).	397
Примѣры и задачи (18).	406

Глава четвертая. Общія свойства поверхностей второго порядка.

§ 1. Опредѣленіе поверхностей второго порядка и ихъ отношеніе къ прямымъ линіямъ и плоскостямъ (490—502).	409
§ 2. Центръ, діаметральныя плоскости и діаметры (503—517).	417
§ 3. Главныя діаметральныя плоскости (518—529).	429
§ 4. Касательныя и полярныя плоскости (530—540).	441
Примѣры и задачи (15).	447

Глава пятая. Сфера.

§ 1. Уравненіе сферы. Касательная плоскость (541—545).	450
§ 2. Системы сферъ (546—558).	454
§ 3. Центры подобія сферъ (559—562).	460
Примѣры и задачи (9).	464

Глава шестая. Центральныя поверхности.

§ 1. Эллипсоидъ (563—577).	465
§ 2. Однополый гиперболоидъ (578—601).	478
§ 3. Двуполый гиперболоидъ (602—612).	497
Примѣры и задачи (14).	507

Глава седьмая. Параболоиды.

	<i>Стр.</i>
§ 1. Эллиптический параболоидъ (613—621)	510
§ 2. Гиперболическій параболоидъ (622—638).	518
Примѣры и задачи (7).	533

Глава восьмая. Фокусы и фокальныя линіи.

§ 1. Фокусы и фокальныя линіи центральныхъ поверхностей (639—649) .	535
§ 2. Софокусныя поверхности (650—657).	546
§ 3. Фокальныя линіи параболоидовъ (658—664).	552
Примѣры и задачи (6).	558

Глава девятая. Сокращенный способъ въ примѣненіи къ поверхностямъ второго порядка.

§ 1. Системы поверхностей второго порядка (665—679).	560
§ 2. Взаимныя полярны (680—686).	569

Вопросы для повторенія.	573
---------------------------------	-----

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

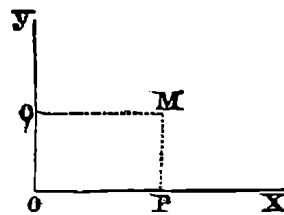
Координаты и уравненія.

§ 1. Прямолинейныя координаты.

1. Аналитическая геометрія, будучи наукою о протяженіи въ самомъ широкомъ смыслѣ, характеризуется особеннымъ способомъ изслѣдованія, состоящимъ въ однообразномъ и методическомъ примѣненіи алгебраическаго анализа къ изученію формъ пространства. Основаніемъ этого способа служить понятіе о координатахъ, которое въ первоначальномъ, простѣйшемъ его видѣ и въ примѣненіи къ изученію формъ плоскихъ, т.-е. фигуръ, помѣщающихся на плоскости, можетъ быть составлено слѣдующимъ образомъ.

2. Положимъ, что мы имѣемъ на плоскости прямой уголъ XOY (фиг. 1), одну изъ сторонъ котораго, именно OX , будемъ предполагать горизонтальною.

Всякая точка M , имѣющая определенное положеніе внутри этого угла, находится на определенныхъ разстояніяхъ MP и MQ отъ его сторонъ. Всякое измѣненіе положенія точки M влечетъ за собою измѣненіе одного или обоихъ этихъ разстояній. Эти-то разстоянія и называются *координатами* точки M по отношенію къ сторонамъ угла XOY . Они могутъ быть измѣрены какою-нибудь единицею и, слѣдовательно, выражены определенными числами. Пусть эти числа будутъ a и b .



Фиг. 1.

Если положеніе точки M неизвѣстно, то по даннымъ числовымъ величинамъ координатъ a и b оно можетъ быть найдено построеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, для этого нужно только на сторонѣ OX отложить длину OP , равную a единицъ, а на сторонѣ OY длину OQ , равную b единицъ, и затѣмъ черезъ точки P и Q провести прямыя, параллельныя сторонамъ угла. Точка пересѣченія этихъ прямыхъ и будетъ M .

Итакъ, въ предположеніи, что единица извѣстна, числовыми значеніями a и b положеніе точки M внутри угла XOY опредѣляется вполне.

3. Чтобы различать двѣ координаты точки M , имѣ усовѣиваются особыя названія. Координату a , которая представляетъ разстояніе точки M отъ стороны OY и, для построенія этой точки, отмѣривается по сторонѣ OX , называютъ *абсциссою*; а координату b , представляющую разстояніе точки M отъ горизонтальной стороны OX и отмѣриваемую по сторонѣ OY , называютъ *ординатою* *).

Неопредѣленную абсциссу принято обозначать буквою x , а неопредѣленную ординату буквою y . Вслѣдствіе этого, вмѣсто того, чтобы говорить, что абсцисса точки есть a , а ордината b , можно писать:

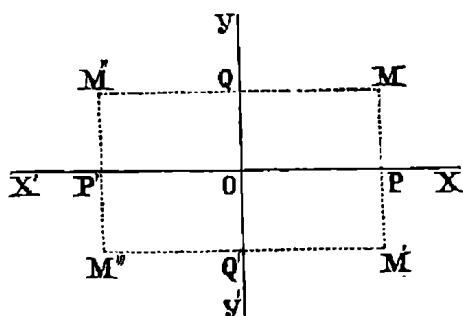
$$x=a \quad \text{и} \quad y=b.$$

Прямыя OX и OY называются *осями координатъ*, причемъ первая именуется *осью абсциссъ* или *осью иксозъ*, а вторая *осью ординатъ* или *осью урекозъ*. Точка ихъ пересѣченія называется *началомъ координатъ*.

Обѣ оси въ совокупности составляютъ *систему координатъ*.

При опредѣленіи положенія точки посредствомъ координатъ всегда предполагается, что положеніе самихъ осей координатъ дано или считается извѣстнымъ.

4. Оси координатъ, будучи продолжены неопредѣленно, образуютъ четыре угла: XOY , XOY' , $X'OY$ и $X'OY'$ (фиг. 2). Сказанное выше объ опредѣленіи положенія точки внутри угла XOY при-



Фиг. 2.

мѣнимо и къ тремъ остальнымъ угламъ. Вслѣдствіе этого одними и тѣми же числовыми величинами координатъ

$$x=a \quad \text{и} \quad y=b$$

опредѣляются на плоскости четыре точки M , M' , M'' , M''' , по одной въ каждомъ углу. Всѣ эти точки находятся на разстояніи a единицъ отъ оси ординатъ и b единицъ отъ оси абсциссъ.

Чтобы различать ихъ, координатамъ придаютъ вообще не числовое только, а алгебраическое значеніе, т.-е. признаютъ ихъ величинами, могущими быть положительными или отрицательными, смотря по направленію измѣренія.

При этомъ принято абсциссы, отмѣриваемыя по оси x -въ вправо, считать положительными, отмѣриваемыя же влѣво—отрицательными. Подобнымъ же образомъ ординаты, отмѣриваемыя по оси y -овъ вверху, считаются положительными, а внизъ—отрицательными.

*) Нужно замѣтить, однако, что условіе, чтобы одна изъ сторонъ угла была горизонтальною, не существенно необходимо и не всегда соблюдается, а потому и присвоеніе этихъ наименованій той или другой изъ сторонъ до нѣкоторой степени произвольно.

При такомъ условіи всѣ четыре точки M , M' , M'' , M''' будутъ имѣть разныя координаты, а именно:

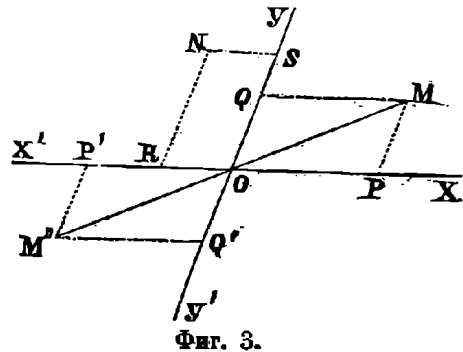
для точки M	$x=+a$, $y=+b$,
для точки M'	$x=+a$, $y=-b$,
для точки M''	$x=-a$, $y=+b$,
для точки M'''	$x=-a$, $y=-b$.

Слѣдовательно, при такомъ условіи каждая точка плоскости характеризуется особыми, ей только принадлежащими, координатами; такъ что двумя координатами, данными алгебраически, т.-е. со знаками $+$ или $-$, положеніе точки на плоскости опредѣляется вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Уголъ XOY , внутри котораго всѣ точки имѣютъ положительныя абсциссы и положительныя ординаты, называется нормальнымъ.

5. Указанное условіе считать разстоянія между точками за положительныя или отрицательныя, смотря по направленію ихъ измѣренія, имѣетъ въ аналитической геометріи всеобщее распространеніе и прилагается не только къ осямъ координатъ, но и ко всѣмъ другимъ прямолинейнымъ направленіямъ. Оно извѣстно подъ названіемъ *правила знаковъ*.¹⁾

6. Мы предполагали до сихъ поръ, что оси координатъ OX и OY взаимно перпендикулярны и, слѣдовательно, всѣ четыре образуемые ими угла прямые. Но это предположеніе не есть существенно необходимое. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что абсцисса точки M (фиг. 2) есть величина отрѣзка OP , отсѣкаемаго на оси x -овъ прямою, проведенною чрезъ M параллельно оси y -овъ, а ордината — величина отрѣзка OQ , отсѣкаемаго на оси y -овъ прямою, проведенною чрезъ M параллельно оси x -овъ.



Фиг. 3.

Такое воззрѣніе на координаты распространяется безъ всякаго измѣненія и на случай, когда оси не перпендикулярны между собою. Такъ, на прилагаемомъ чертежѣ (фиг. 3), гдѣ нормальный уголъ XOY острый, координаты точки M суть;

$$x=OP=QM \quad \text{и} \quad y=OQ=PM,$$

а координаты точки N суть:

$$x=OR=SN \quad \text{и} \quad y=OS=RN.$$

7. Разсмотрѣнный способъ опредѣлять положеніе точки на плоскости посредствомъ величинъ прямолинейныхъ отрѣзковъ называется способомъ прямолинейныхъ координатъ; при этомъ и самая система координатъ называется *прямолинейною*. Сверхъ того, если оси взаимно перпендикулярны, то система координатъ называется *прямоугольною*. Въ противномъ случаѣ она именуется *косугольною*.

Прямолинейная система координатъ известна также подъ названіемъ *Декартовой*, такъ какъ Декартъ первый далъ правила методическаго примѣненія этой системы къ изученію геометріи и тѣмъ положилъ начало аналитической геометріи (въ 1637 г.).

8. При всякой прямолинейной системѣ координатъ всѣ точки, имѣющія равныя абсциссы, находятся на прямой, параллельной оси ординатъ, а всѣ точки, имѣющія равныя ординаты, на прямой, параллельной оси абсциссъ.

Слѣдовательно, условіе $x=a$, взятое въ отдѣльности, хотя и недостаточно для опредѣленія положенія точки на плоскости, тѣмъ не менѣе выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости тѣ, которыя лежатъ на прямой MP . Точно также условіе $y=b$ выдѣляетъ изъ всѣхъ точекъ плоскости тѣ, которыя лежатъ на прямой MQ . Понятно, что оба эти условія въ совокупности опредѣляютъ точку, принадлежащую обѣимъ прямымъ одновременно, т.-е. единственную ихъ точку пересѣченія M .

Въ частности условіе $x=0$ опредѣляетъ ось y -овъ, а условіе $y=0$ ось x -овъ.

Координаты начала координатъ суть: $x=0$, $y=0$.

9. Если двѣ точки (какъ, напримѣръ, M и M' въ фиг. 3) имѣютъ координаты, соотвѣтственно равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками, то онѣ расположены симметрично относительно начала координатъ, т. е. лежатъ на одной съ нимъ прямой и на равныхъ отъ него разстояніяхъ. Точно также и обратно, всякія двѣ точки, симметричныя относительно начала координатъ, имѣютъ координаты, равныя по абсолютнымъ величинамъ, но съ противоположными знаками. Въ этомъ легко убѣдиться изъ равенства треугольниковъ MOP и $M'OP'$.

10. Точка, которой координаты суть $x=a$ и $y=b$, называется сокращенно *точкою* (a,b) . Она считается известною или данною, какъ скоро известны или даны величины a и b . Найти неизвѣстную точку (x,y) значитъ въ аналитической геометріи вычислить координаты x и y или, по крайней мѣрѣ, дать формулы, выражающія ихъ чрезъ величины извѣстныя.

Въ слѣдующихъ задачахъ координаты точекъ служатъ данными или искомыми.

11. *Даны двѣ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ; требуется найти разстояніе между ними.*

Предположимъ, что оси координатъ косоугольныя, и назовемъ чрезъ ω уголъ между ними. Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки (фиг. 4). Проведя прямыя M_1P_1 и M_2P_2 параллельно оси ординатъ и прямую M_1N параллельно оси абсциссъ, будемъ имѣть:

$$OP_1=x_1, \quad OP_2=x_2, \quad M_1P_1=y_1, \quad M_2P_2=y_2.$$

Изъ треугольника M_1NM_2 имѣемъ:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_1N}^2 + \overline{M_2N}^2 - 2M_1N \cdot M_2N \cdot \cos M_1NM_2,$$

но

$$M_1N = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$$

и

$$M_2N = M_2P_2 - NP_2 = M_2P_2 - M_1P_1 = y_2 - y_1;$$

кроме того

$$\cos M_1NM_2 = -\cos \omega.$$

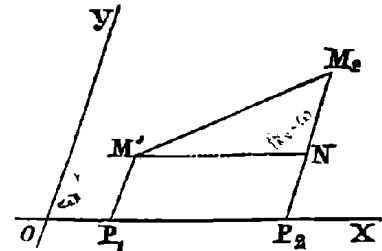
Поэтому, называя чрезъ d искомое разстояніе M_1M_2 , будемъ имѣть:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos \omega,$$

откуда

$$d = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos \omega}. \quad (1)$$

Это равенство и рѣшаетъ задачу, потому что во второй части находятся только данныя величины, по которымъ искомая длина d и можетъ быть вычислена. Двойной знакъ во второй части соответствуетъ двумъ различнымъ направленіямъ, которымъ можно слѣдовать при измѣреніи величины M_1M_2 . Если по смыслу задачи нужно найти только абсолютную величину отрезка M_1M_2 , то ясно, что знакъ — не долженъ имѣть мѣста.



Фиг. 4.

12. Замѣтимъ, что формула (1) есть въполнѣ общая, т. е. справедливая при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ данныхъ точекъ на плоскости, если только подъ x_1, y_1, x_2, y_2 будемъ понимать (какъ это всегда дѣлается) алгебраическія значенія координатъ, т. е. со включеніемъ въ это обозначеніе и знака + или — соответственнo положеніямъ точекъ.

Такъ, напримѣръ, если положимъ, что точка M_2 находится внутри нормального угла XOY , а точка M_1 внутри угла XOY' (фиг. 5), то будемъ имѣть:

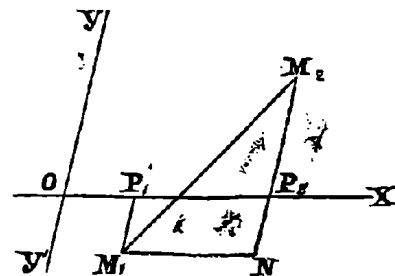
$$M_2N = M_2P_2 + M_1P_1.$$

Но, замѣчая, что алгебраическія значенія ординатъ y_2 и y_1 суть:

$$y_2 = +M_2P_2 \text{ и } y_1 = -M_1P_1,$$

будемъ имѣть, что въ этомъ случаѣ, какъ и въ предыдущемъ,

$$M_2N = y_2 - y_1.$$



Фиг. 5.

13. Если оси координатъ прямоугольныя, то формула (1) принимаетъ слѣдующій болѣе простой видъ:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

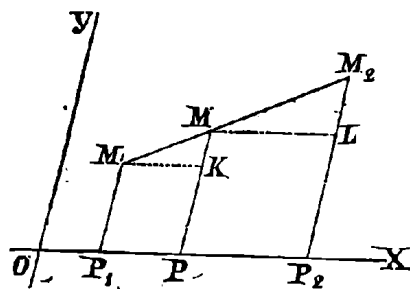
ибо въ этомъ случаѣ $\cos \omega = \cos 90^\circ = 0$.

Полагая въ последнемъ выраженіи $x_2=0$, $y_2=0$ и $x_1=x$, $y_1=y$, получимъ

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \quad (3).$$

Это есть выраженіе разстоянія какой-нибудь точки (x, y) отъ начала координатъ.

14. Даны две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ; требуется найти на прямой, ихъ соединяющей, точку (x, y) , которой разстоянія отъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи $m:n$.



Фиг. 6.

Другими словами эта задача можетъ быть выражена такъ: раздѣлить отрезокъ между двумя данными точками въ данномъ отношеніи.

Пусть M_1 и M_2 будутъ данныя точки и M искомая (фиг. 6). Проведемъ прямыя M_1P_1 , M_2P_2 и MP параллельно оси ординатъ и прямыя M_1K и ML параллельно оси абсциссъ, будемъ имѣть изъ подобія треугольниковъ M_1KM и MLM_2 :

$$\frac{M_1K}{ML} = \frac{MK}{M_2L} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Но

$$M_1K = P_1P = OP - OP_1 = x - x_1,$$

$$ML = PP_2 = OP_2 - OP = x_2 - x,$$

$$MK = MP - KP = MP - M_1P_1 = y - y_1,$$

$$M_2L = M_2P_2 - LP_2 = M_2P_2 - MP = y_2 - y.$$

Поэтому, замѣчая, что по условію задачи должно быть

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n},$$

получимъ два уравненія

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n},$$

изъ которыхъ находимъ

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \quad (4).$$

Эти формулы и рѣшаютъ задачу, потому что онѣ представляютъ выраженія искоемыхъ координатъ чрезъ данныя координаты x_1, y_1, x_2, y_2 и данныя числа m и n . Онѣ одинаковы какъ для косоугольной, такъ и для прямоугольной системы координатъ, потому что въ нихъ вовсе не входитъ уголъ ω между осями координатъ.

15. Мы предполагали, что искомая точка M находится внутри отрезка M_1M_2 , но смыслу задачи не противорѣчитъ и допущеніе, что точка M находится на продолженіи этого отрезка въ ту или другую