**А. Лебег**

# Интегрирование и отыскание примитивных функций

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

**А. Лебег**
А11 Интегрирование и отыскание примитивных функций / А. Лебег – М.: Книга по Требованию, 2024. – 326 с.

**ISBN 978-5-458-26034-3**

Книга известного французского математика Анри Лебега посвящена расширению понятия интеграла. Для чтения книги достаточно знания обычного вузовского курса математического анализа.

**ISBN 978-5-458-26034-3**

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Когда два года назад издательство Gauthier-Villars известило меня, что первое издание этих лекций разошлось, я оказался в большом затруднении. Как сохранить за этой книгой характер обзора основных концепций интеграла и результатов, достигнутых в отыскании примитивных функций, не увеличивая ее изложением многочисленных работ, опубликованных на эти темы в течение двадцати трех лет?

Мне пришлось поэтому выбирать. Я решительно отклонил все, не служившее непосредственно к тому, чтобы „заставить понять". Например, если я говорю о почленном интегрировании рядов, то потому, что возможность этой операции вытекает непосредственно из свойств, характеризующих интеграл, и освещает эти свойства; действительно, когда интеграл рассматривали как сумму бесконечного множества неделимых, то употребляли обобщение понятия суммы, отчасти сравнимое с тем, которое дает сумма ряда, и эти два обобщения тесно связаны. Но я не говорил о процессах интегрирования по частям и через подстановки, о второй теореме о среднем, о неравенстве Шварца (Schwarz) и его обобщениях, хотя они и необходимы для математических применений интеграла.

Обобщение есть одно из лучших средств, чтобы „заставить понять" в математике. В то время как в частном случае мешают пониманию все те попадающие в поле зрения факты, которые присущи только этому частному случаю, — в общем случае имеешь дело исключительно с теми фактами, которые подлежат обсуждению; при этом тот же результат, который находится посредством аксиоматических определений, получается здесь хотя и логически менее точным, но зато гораздо более живым и внушительным способом.

Если я, тем не менее, не рассматриваю функций многих переменных, то это потому, что читатели этой серии монографий могут обратиться к превосходной книге Ш. де-ля-Валле-Пуссена (Ch. de la Vallée-Poussin), а также потому, что я имел в виду изложить иное широкое обобщение интеграла: интеграл Стилтьеса (Stieltjes).

Правда, в настоящее время представляется чуть ли не нелепым изучать интеграл Стилтьеса, ограничиваясь функциями только одной переменной. Однако я счел возможным так поступить и удовольствовался тем, что указал на общий физический смысл интеграла Стилтьеса.

Когда, оставляя точку зрения квадратур, я стал на точку зрения примитивных функций, выбора передо мной уже не было. Здесь я должен был изложить фундаментальные работы Данжуа (Denjoy), настолько законченно трактующие вопрос, что можно было ими ограничиться. Читатель увидит, что, следуя идеям Данжуа, я сильно отклонялся от его изложения, по форме всегда, но иногда и по существу. Я надеюсь, что благодаря этому сделал более доступной и, следовательно, помог лучше познать одну из самых прекрасных концепций теории функций действительного переменного.

Тотализация Данжуа существенно пользуется трансфинитной рекурренцией; поэтому мне пришлось более свободно пользоваться трансфинитным, чем я это делал в первом издании.

Хотя первое издание моей книги и показалось некоторым смело и сознательно наполненным несколько скандальными новшествами, оно все же было произведением робкого человека, который из семи написанных им глав шесть посвятил изложению предшествовавших исследований, прежде чем перейти к работам, которые считались революционными. Если он это сделал, то это отнюдь не было ухищрением пропагандиста, стремящегося навербовать сторонников революции, но служило лишь для самоуспокоения. Он в самом деле думал, да и сейчас думает, что для пользы дела надо итти по одному из путей, открытых предшествующими работами; что было бы слишком рискованно, действуя иначе, создать науку, лишенную связи с остальной математикой. Поэтому он и старался выявить идеи, которые, сознательно или бессознательно, руководили математиками в изучении интегрирования, выявить их идеал в этой области, как сказал бы оплакиваемый нами П. Бутру (P. Boutroux), и показать, что его личные идеи были тесно связаны с идеями его предшественников.

С той же робостью я говорил и о трансфинитных числах. Я мог оперировать намеками и утверждениями, потому что я собственно пользовался лишь преобразованиями обычных бесконечных рядов в более сложные ряды, даваемые процессом цепей интервалов. Но для тотализации Данжуа я должен бы подробнее развить „Прибавление", посвященное трансфинитным числам.

Из этого „Прибавления", в частности, вытекало, что я мог бы избежать пользования цепями интервалов и, значит, не прибегать более к трансфинитному во многих местах этой книги. Но я нашел, что будет и неудобно и несколько лицемерно поступить таким образом. Поясню аналогией. Бесконечно малые были когда-то туманными сущностями, встречавшимися в неясных и неточных формулировках. Все разъяснилось впоследствии благодаря понятию предела. Поэтому теперь можно обойтись без понятия бесконечно малого; с другой стороны, однако, пользование им не влечет уже никаких неясностей. И не было ли бы несколько лицемерным запрещать другим пользоваться столь внушительным и удобным языком бесконечно малых, если бы мы сами продолжали им пользоваться в наших рассуждениях? Цепи интервалов вводятся вполне естественно, трансфинитные числа являются прекрасным математическим орудием, и надо привыкнуть ими пользоваться.

Чтобы помочь лучше понять тотализацию Данжуа, я ее обобщил таким же образом, каким Стилтьес обобщил обычное интегрирование. С этим связаны проблемы, которые еще ждут своего разрешения.

Но к чему ведут все эти исследования? Они были бы весьма полезны даже в том случае, если бы их единственным результатом было такое фиксирование нашего внимания на интегрировании и диференцировании, которое заставило бы нас понять следующее: интегрирование постоянно является операцией аналогичной той, которую надо произвести для вычисления количества тепла, необходимого для поднятия температуры тела на $1^\circ$, в функции масс его частей и их теплоемкости; диференцирование есть обратная операция. Эти операции связывают две величины, свойственные этим телам, и функцию, зависящую от точек этих тел.

„Как, — скажут мне, — быть может, вы этого не знали?". Пусть не надеются так легко вынудить у меня признание: „Я это знал, я это знал очень хорошо". Однако, если бы в 1903 г. я это знал столь же прекрасно, как сейчас, то я бы не пропустил интеграла Стилтьеса в первом издании этой книги. И надо думать, что этот пропуск вообще не показался очень важным, так как никто из тех, кто оказал мне честь дать отзыв о моей книге, этого не отметил.

Я сказал: интеграл Стилтьеса; разве я не должен был бы сказать „интеграл Коши" (Cauchy)? В самом деле, Коши очень отчетливо изложил важность и физический смысл нового интегрирования, взятого во всей его общности, тогда как Стилтьес главным образом логически определил новую операцию, да и то в случае только одного переменного. Но я не счел нужным изменять принятое название. Если бы я это хотел сделать, то надо ли было бы взять имя первого ныне известного изобретателя или имя того, кто дал наиболее общее, ныне известное определение интеграла? И в том и в другом случае присвоение имени было бы неточным и несправедливым; поэтому лучше сохраним уже установившиеся неточности.

Это дает мне случай принести извинения как за неприведенные, так и за приведенные цитаты; я хотел только дать несколько отправных точек для библиографических изысканий и вовсе не пытался резюмировать здесь историю интенсивного развития понятия интеграла в течение последних двадцати трех лет. Кроме того, я не претендую на полное перечисление всего, что я заимствовал из различных недавно появившихся работ по теории функций действительного переменного; все они мне постоянно были полезны.

Я благодарю г. Василеско (Vasilesco) за любезную помощь при исправлении корректур.

*Анри Лебег*

Париж, 3 декабря 1926 г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ГЛАВА I.

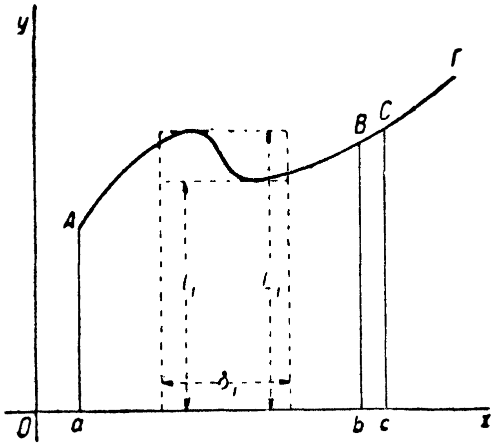
# ИНТЕГРАЛ ДО РИМАНА.

### 1. Интегрирование непрерывных функций.

Интегрирование было сначала определено как действие обратное диференцированию; это — действие, позволяющее решить проблему о примитивных функциях:

*Найти функции $F(x)$, допускающие в качестве производной данную функцию $f(x)$.*

Известно, что, когда эта проблема разрешима, она имеет бесконечное множество решений и что все примитивные функции $F(x)$ для одной и той же функции $f(x)$ различаются лишь на аддитивную постоянную. Целью поэтому является найти какую-нибудь одну из функций $F(x)$.



Черт. 1.

В эпоху, когда проблема примитивных функций была поставлена в только что указанной мною форме, т. е. в эпоху Ньютона (Newton) и Лейбница (Leibnitz), слово *функция* имело довольно плохо определенный смысл. Чаще всего так называли количество $y$, связанное с переменным $x$ уравнением, содержавшим некоторое число символов обычно рассматривавшихся операций. Главнейшими из этих операций были арифметические действия (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней), тригонометрические операции (со знаками sin, cos, tg, arc sin, arc cos, arc tg), логарифмические и степенные операции (со знаками log, $a^x$).

Для большого количества функций, выраженных таким способом, можно было выразить тем же способом их примитивные; таким образом казалось очевидным, что всякая функция допускает примитивную. Кроме того, тем, кто сомневался в этом предложении, можно было ответить следующее.

Пусть (черт. 1) кривая Г, $y = f(x)$, представляет данную функцию $f(x)$; оси координат прямоугольны.

Допустим для простоты, что $f(x)$ положительна; пусть $aA$, $bB$ — две параллели к оси $y$, с абсциссами $a$ и $x$. Эти две параллели, дуга

$AB$ кривой Г и сегмент $ab$ оси $Ox$ ограничивают некоторую область с площадью $S(x)$. Оценивая приращение $bBCc$ этой площади, мы видим, что $f(x)$ есть производная от $S(x)$ [1]).

Заметим, что в предыдущем рассмотрении слово *функция* уже получило значительное обобщение. В самом деле, соотношение между $S(x)$ и $x$ есть уже геометрическое, но не алгебраически-тригонометрически-логарифмическое. Такие соотношения также рассматривались как определяющие функции; но только старательно различали геометрические фигуры, определенные с помощью законов, выражаемых в геометрических равенствах, от тех фигур, которые не были определены таким образом. Кривые $y=f(x)$ первого рода или геометрические кривые определяли функции $f(x)$; кривые второго рода, или произвольные кривые, не определяли истинных функций. Когда употребляли слово *функция* для обоих родов соответствия между $y$ и $x$, то выделяли первые, называя их *непрерывными функциями* [2]).

Существовала также промежуточная категория функций, именно тех, которые изображались с помощью нескольких дуг геометрических кривых; более охотно их рассматривали как составленные из частей функций.

*Непрерывные* функции были истинными функциями. Таким образом слову *функция* давался достаточно узкий смысл, потому что всякую непрерывную функцию, определенную геометрически или нет, считали изобразимой аналитическим выражением и именно таким, о котором говорилось ранее; напротив, считали это невозможным для функций не непрерывных.

Но Фурье (Fourier) показал, что тригонометрические ряды, которые могли употребляться в широком классе случаев для изображения непрерывных функций, могли также служить и для изображения функций не непрерывных, составленных из частей функций. В частности, функция, равная нулю от 0 до $\pi$ и равная 1 от $\pi$ до $2\pi$, допускает разложение в сходящийся тригонометрический ряд. Таким образом исчезал единственный критерий, позволявший различать истинные функции от ложных. Следовало либо расширить смысл слова *функция*, либо ограничить категорию алгебраических, тригонометрических и степенных выражений, годных для определения функций.

Коши заметил, что трудности, вытекающие из исследований Фурье, могут представиться даже тогда, когда пользуются очень простыми выражениями, т. е. что функция может оказаться непрерывной или нет, смотря по тому, какой процесс дан для ее определения. Как пример Коши указывает функцию, равную $+x$ для положительных $x$ и $-x$ для $x$ отрицательных. Эта функция, с одной стороны, не непрерывна, ибо она состоит из частей двух непрерывных функций $+x$ и $-x$; но, с другой стороны, она, напротив, оказывается непрерывной, если ее обозначить через $+\sqrt{x^2}$.

Поэтому, чтобы сохранить за термином *непрерывная функция* его первоначальный смысл, следовало бы рассматривать лишь очень специаль-

---

[1]) Доказательство, в частности для случая, когда $f(x)$ не всюду положительна, см. в классических курсах диференциального и интегрального исчисления.

[2]) Эта непрерывность известна под именем *эйлеровой непрерывности*.

ные аналитические выражения [1]). Коши предпочел значительно изменить определения.

Для Коши *$y$ есть функция $x$, если каждому значению величины $x$ соответствует вполне определенное значение величины $y$.*

Это определение кажется тождественным с определением, впоследствии предложенным Риманом, но на деле соответствия, рассматриваемые Коши, только те, которые можно установить с помощью аналитических выражений, так как после того как Коши дал определение функции, он добавляет: функции называются явными, если уравнение, связывающее $x$ и $y$, разрешено относительно $y$, и неявными, если это не имеет места. Однако тот факт, что соответствия установлены при помощи аналитических выражений, никогда не входит в рассуждения Коши, и таким образом, полученные Коши свойства, так же как и их доказательства, немедленно применяются к функциям, удовлетворяющим определению Римана [2]).

Для Коши *функция $f(x)$ непрерывна для значения $x_0$, если, каково бы ни было положительное число $\varepsilon$, можно найти число $\eta(\varepsilon)$ такое, что неравенство $|h| \leqslant \eta(\varepsilon)$ влечет за собой*

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon;$$

*функция $f(x)$ непрерывна в $(a, b)$, если соответствие между $\varepsilon$ и $\eta(\varepsilon)$ может быть выбрано независимо от $x_0$ для любого $x_0$ в $(a, b)$.*

Мы узнаем здесь ныне классические определения.

Чтобы доказать существование примитивных функций для функций непрерывных, достаточно вернуться к ранее указанному геометрическому доказательству. В этом доказательстве мы прибегали к понятию площади. Это понятие, и без того достаточно деликатное, когда дело касается даже областей, ограниченных простыми геометрическими кривыми, каковы круг и эллипс, становится еще менее ясным, когда рассматривают области, входящие в доказательство, которым мы занимаемся.

Кривые Г, ограничивающие эти области, не являются необходимо геометрическими кривыми, они могут быть составлены из частей геометрических кривых ($y=+\sqrt{x^2}$); следовательно, известно, что они могут быть сложны, но неизвестно, где останавливается эта сложность. Поэтому Коши счел нужным определить точнее, что нужно понимать под числом $S(x)$ в предыдущем доказательстве. Для этого ему было

---

[1]) Это и делает Мерэ (Méray), придавая слову *функция* смысл очень близкий к тому, который раньше давали словам *непрерывная функция*. Мерэ определяет функции посредством рядов Тейлора (Taylor) и аналитического продолжения; если принимать определение Мерэ, то существование примитивных функций немедленно вытекает из свойств степенных рядов. Но при применении определения Мерэ к функциям комплексного переменного оказываются вынужденными, как мне указал Борель, рассматривать разрывные функции действительного переменного. Так, например, когда ряд Тейлора сходится на границе круга сходимости, то его значения на окружности могут определять две разрывные действительные функции от аргумента.

[2]) Я не хочу этим сказать, что определение Коши менее общее, чем римановское, но только то, что если бы существовали функции, удовлетворяющие определению Римана, но не удовлетворяющие определению Коши, то и на них распространялись бы наши рассуждения.

достаточно воспользоваться операциями, которые обычно служили для вычисления приближенных значений $S(x)$, рассматриваемой как площадь, и доказать, что эти вычисления приводят к предельному числу [1]). Таким образом мы имеем доказательство существования примитивных функций, ставшее ныне классическим.

Пусть $(a, X)$ — интервал, который мы рассматриваем. Разделим $(a, X)$ на частные интервалы с помощью возрастающих чисел:

$$a_0 = a,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n = X$$

и образуем сумму:

$$S = (a_1 - a_0) f(x_1) + (a_2 - a_1) f(x_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) f(x_n),$$

где $x_i$ есть какое-нибудь число, заключенное между $a_{i-1}$ и $a_i$. Доказывается, что $S$ стремится к определенному числу $S(x)$, когда максимум $a_i - a_{i-1}$ стремится к нулю по любому закону.

Число $S(X)$, так полученное, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ в интервале $(a, X)$. Начиная с Фурье его обозначают знаком

$$\int_a^X f(x)\, dx.$$

Этот символ имеет пока смысл лишь для положительных интервалов $(a, X)$, $(X \geqslant a)$; по определению полагают

$$\int_a^X f(x)\, dx + \int_X^a f(x)\, dx = 0.$$

Очевидно, имеем для любых $a$, $b$, $c$:

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0.$$

Заметим еще, что если $L$ и $l$ суть верхний и нижний пределы функции $f(x)$ в $(a, b)$, то $\int_a^b f(x)\, dx$ заключен между $L(b-a)$ и $l(b-a)$. Так как

---

[1]) В математике очень часто поступают так, как это делает здесь Коши, т. е. принимают процесс вычисления некоторого числа за самое определение этого числа. Впрочем некоторые математики и не допускают иных определений числа, кроме тех, которые позволяют его вычислить.

Следует обратить внимание на интерес, который представляет столь простое преобразование, совершаемое здесь Коши: оно сокращает число первоначальных понятий, служащих отправной точкой наших рассуждений. Часто говорят, что Декарт свел геометрию к алгебре; это не было бы верным, если бы Коши своим определением интеграла не дал логической конструкции понятий, выводившихся ранее лишь из геометрической интуиции: площадей, объемов и т. д.

Здесь мы имеем прогресс, философское значение которого исключительно; но так как работа Коши не дает никакого обогащения понятию интеграла, ее математический интерес минимален; потому и сам Коши дал ее лишь как простой пример педагогического изложения.