

Е.С. Березанская

Математика

**Рабочая книга для 6 года
обучения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Е11

Е11 **Е.С. Березанская**
Математика: Рабочая книга для 6 года обучения / Е.С. Березанская – М.:
Книга по Требованию, 2013. – 253 с.

ISBN 978-5-458-27809-6

ISBN 978-5-458-27809-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 1. Первоначальные понятия.

Задача. Маневровый паровоз отъехал от станции вправо на 80 м, затем дал обратный ход и прошел назад еще 30 м. На каком расстоянии от станции остановился паровоз?

Для наглядности решим задачу графически, чертежом. Проведем для этого прямую линию, пусть она изображает полотно железной дороги. Отметим где-нибудь на прямой положение станции точкой O (рис. 1).

Так как паровоз *прямым* ходом прошел расстояние 80 м *вправо* от станции, то, чтобы найти положение его на прямой, отсчитаем от точки O *вправо* 80 м (*прямой счет*), принимая каждые 10 м за 1 см; полученную точку обозначим буквой A .

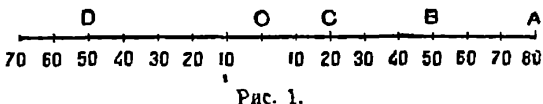


Рис. 1.

Обратным ходом, следовательно *влево* от точки A , паровоз прошел 30 м; поэтому, чтобы найти его положение после обратного хода, мы должны отсчитать от точки A *влево* по прямой (*обратный счет*) 30 м. Найденную точку назовем буквой B . Она отстоит от точки O на расстоянии 50 м и дает решение задачи: $x = 80 - 30 = 50$ (м).

Достаточно ли ответить на вопрос задачи, что паровоз после маневрирования остановится на расстоянии 50 м от станции? Можно ли на основании этого ответа указать единственную точку, в которой находится паровоз после маневрирования? Почему?

Подобным же образом найдите решение этой задачи в том случае, если паровоз прямым ходом отъехал от станции на расстояние 60 м *вправо*, затем дал обратный ход и прошел назад еще 60 м. Запишем решение задачи: $x = 60 - 60 = 0$.

Какой смысл имеет в данном случае нулевое решение?

Рассмотрим еще один случай решения этой задачи:

Паровоз, пройдя прямым ходом 20 м *вправо*, очутится в точке С, отстоящей от О на 20 м *вправо*. Обратным ходом *влево* он прошел 70 м.

Чтобы найти его положение на прямой, по предыдущему нужно отсчитать 70 м *влево* от точки С (перейдя через точку О влево). Получаем таким образом точку D (рис. 1), отстоящую от точки О влево на 50 м. Ответ на нашу задачу в этом случае будет такой: паровоз после маневрирования остановился на расстоянии 50 м *влево* от станции. Запишем решение, как и в предыдущих случаях:

$$x = 20 - 70.$$

Несмотря на то, что получилось как будто *невозможное* вычитание, из меньшего приходится вычитать большее число, все же, как видим, результат имеет определенный смысл, и задача вполне возможна. Числовой ответ в первом и последнем случае *один и тот же*: 50 м, а местоположение паровоза различное. В первом случае 50 м отсчитываются *вправо* от станции, в последнем случае те же 50 м отсчитываются *влево* от станции.

Вывод. Расстояние является величиной, которую можно отсчитывать в двух противоположных направлениях — *вправо* и *влево* от некоторой отправной точки. Чтобы судить об изменении такой величины, нужно знать:

- 1) на сколько она изменилась численно (50 м);
- 2) в каком направлении произошло это изменение (*вправо* или *влево* от отправной точки О).

Для обозначения направления вместо слов „*вправо*“ и „*влево*“ удобно ввести особые знаки, а именно: число, которое выражает расстояние *вправо* от некоторой отправной точки, писать со знаком $+$ (плюс) впереди, а *влево* от некоторой отправной точки — со знаком $-$ (минус). Таким образом результаты наших примеров следует записать в таком виде:

$$80 - 30 = + 50 \text{ м.}$$

$$20 - 70 = - 50 \text{ м.}$$

Мы видим, что ответ ($+ 50$ м) получается при вычитании из большего числа меньшего, а ($- 50$ м) — при вычитании из меньшего большего.

Кроме расстояния многие другие величины могут отсчитываться в двух противоположных направлениях. Все такие величины называются *направленными величинами*, например:

	Запишите названия величин, употребляемых в противоположном смысле
Доход Прибыль Прирост населения Имущество Время после известного момента Температура выше нуля Выигрыш Положение точки выше уровня моря Направление от некоторой точки по прямой к северу	

Назовите величины, которые не могут быть отсчитываемы в двух противоположных направлениях, как например вес тела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числа, которые служат для отсчета направленных величин, называются *направленными* числами или *относительными*, — потому что обозначают направление относительно какой-либо отправной точки O , например:

$$+2, -10, +3, -\frac{2}{3}.$$

Числа со знаком $+$ называются *положительными* числами, числа со знаком $-$ называются *отрицательными* числами.

Если у относительного числа опустить знак, т. е. не обращать внимания на направление величины, а только на ее числовое значение, то это число без знака называется его *абсолютной величиной*.

Упражнение. Назовите абсолютное значение чисел $(+7)$; (-20) ; $(+13)$.

§ 2. Изображение относительных чисел на числовой оси.

Вы знаете, что числа удобно изображать на числовой оси. Возьмем прямую MN , примем за начало отсчета произвольную точку O , которую условимся называть нулевой точкой (рис. 2).

Берем произвольную единицу длины, например 1 см, и откладываем на числовой оси OA , OB , OC и т. д. Точки A , B , C , расположенные вправо от точки O , будут изображать последовательно числа натурального рода 1, 2, 3 и т. д., причем конец отрезка OC

(точка C) соответствует числу большему, чем точка B , и т. д. Другими словами: $3 > 2$.

Точка, изображающая число 7, расположена *вправо* от точки, соответствующей числу 4, и $7 > 4$.

Изображение числа 3 находится *влево* от изображения числа 5, и число $3 < 5$.

Но таким путем, откладывая отрезки только *вправо* от начальной точки O на числовой оси, мы изображаем только положительные числа: $+1, +2, +3$ и т. д. И для положительных чисел мы имеем:

1) из двух чисел то больше, изображение которого находится на числовой оси *вправо* за изображением другого числа;

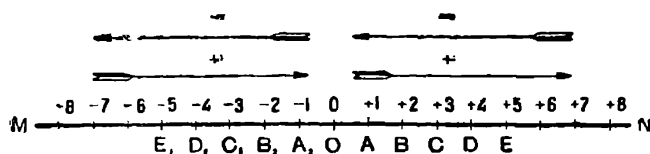


Рис. 2.

2) из двух чисел то меньше, изображение которого находится на числовой оси *влево* от изображения другого числа.

Пополним числовой ряд отрицательными числами, с которыми мы познакомились; изобразим и их на числовой оси (рис. 2), откладывая отрезки влево от начальной точки: $OA_1 = 1$ см, $OB_1 = 2$ см и т. д.

Оставим те же условия 1) и 2), какие мы имеем для положительных чисел; тогда число $(-3) > (-4)$, потому что изображение числа (-3) лежит вправо от изображения числа (-4) ;

$$(-3) < (-2), \text{ почему?}$$

$$0 > (-3), \text{ или } (-3) < 0, \text{ почему?}$$

$$0 < (+3), \text{ или } (+3) > 0, \text{ почему?}$$

На нашей числовой оси числа расположены так, что увеличиваются слева направо.

В каком направлении расположены на числовой прямой относительно друг друга числа:

$$(-10) \text{ и } (-3); (-5) \text{ и } (+8); 0 \text{ и } (-3); 0 \text{ и } (+5)?$$

Сравните по величине эти числа на основании указанного выше признака, пользуясь знаками неравенства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Из рассмотрения чисел на числовой прямой ясно, что:

1) Все положительные числа больше нуля.

2) Все отрицательные числа меньше нуля.

3) Всякое положительное число больше всякого отрицательного.

4) Из двух положительных чисел то больше, абсолютное значение которого больше.

5) Из двух отрицательных чисел то больше, абсолютное значение которого меньше.

Если на числовой прямой будем производить счет вправо от некоторой точки положительными единицами (стрелка вправо, т. е. будем производить *прямой счет*, то числа *будут увеличиваться*. Например начнем присчитывать к числу $(+3)$ положительные единицы, *ведя счет вправо*, — получим $(+4)$, $(+5)$, $(+6)$ и т. д.

Если, дойдя, скажем, до $(+6)$, будем вести *обратный счет влево*, то, присчитывая отрицательные единицы (стрелка влево), получим следующие числа: $(+5)$, $(+4)$, $(+3)$, $(+2)$, $(+1)$, 0 , (-1) , (-2) , (-3) и т. д. Числа будут убывать на единицу. Таким образом *присчитывание положительных единиц к некоторому числу ведет к увеличению этого числа, а присчитывание отрицательных единиц ведет к уменьшению его*.

Упражнения на числовой оси.

1. К $(+3)$ присчитать 5 положительных единиц.
2. К $(+3)$ присчитать 5 отрицательных единиц.
3. К (-5) присчитать 7 положительных единиц.
4. К (-5) присчитать 7 отрицательных единиц.

Два числа, как например $(+5)$ и (-5) , $(+1)$ и (-1) , имеющие одинаковое числовое значение, но противоположное направление, называются *равнопротивоположными* числами.

Два равнопротивоположных числа в сумме всегда дают нуль. Проверьте.

§ 3. Упражнения.

1. Товар продан за m рублей, себестоимость его n рублей. Как велика прибыль? Найдите общую формулу для решения. Запишите решение и объясните смысл полученных числовых результатов при $m = 100$ руб., $n = 93$ руб.; $m = 84$ руб., $n = 90$ руб.

2. Изменение количества учащихся по различным годам в школе такое:

1927 г.	$(+37)$	1929 г.	(-5)
1928 „	(-4)	1930 „	$(+210)$

Выразите словами смысл такой записи.

3. Выразите словами смысл записи итогов торговли кооператива за месяц:

1-я неделя	$(+150)$ руб.	3-я неделя	$(+57)$ руб.
2-я „	(-22) „	4-я „	(-12) „

Посчитайте, какое количество рублей прибыли или убытка имел кооператив за месяц.

4. Актив производства на 1 октября 1930 г. составляет 135 323 руб; пассив — 128 423 руб. Определить собственный капитал производства.

Указание. Актив — наличие имущественных средств учреждения (положительное имущество), пассив — совокупность расходов предприятия и обязательств (отрицательное имущество).

Обозначая актив и пассив знаками относительных чисел, найдите собственный капитал предприятия, как сумму актива и пассива. Если собственный капитал окажется отрицательным, то следовательно предприятие работало этот месяц с дефицитом, т. е. получился пассивный баланс.

5. Найдите баланс (т. е. разницу между вывозом и ввозом) внешней торговли Советской республики по нижеследующей таблице, данной в миллионах рублей, и сделайте вывод.

Г о д ы		Вывоз	Ввоз	Баланс
1920		1,4	29,3	
1921/22		63,9	270,8	
1922/23		133,2	147,9	
1924/25		270,0	339,0	
1928/29		865,0	839,0	

§ 4. Сложение относительных чисел.

Рассмотрим такую задачу:

Пароход прошел от пристани в течение первого часа a километров, в течение второго часа — b километров. На каком расстоянии от пристани находится пароход по истечении двух часов езды?

Составим общую формулу решения этой задачи и рассмотрим ряд частных случаев для различных числовых значений a и b .

Обозначьте искомое расстояние через x ; вы по смыслу задачи должны получить решение сложением чисел a и b . Результат запишите в таком виде: $x = a + b$. Это есть *общая* формула решения нашей задачи. *Общая формула* указывает, *какие действия* и *в каком порядке* надо произвести над данными числами, чтобы получить искомое решение *для всех задач* с одним и тем же условием при различных числовых данных.

1) Как прочесть текст нашей задачи для того случая, когда $a = +12$ км и $b = +10$ км? (Будем считать движение парохода слева направо положительным, справа налево — отрицательным.)

Решите задачу графически на числовой прямой. Найдите точку, в которой находится пароход после двух часов езды, и ее расстояние от пристани.

Запишите решение задачи, подставляя в общую формулу данные числа:

$$x = (+12) + (+10) = (+22).$$

Какой смысл имеет знак плюс у результата?

Чем отличаются знаки, стоящие внутри скобок, от знака между скобками?

2) Как прочитать текст задачи для того случая, когда

$$a = -12 \text{ км}; \quad b = -10 \text{ км?}$$

Решите задачу графически; найдите точку, в которой находится пароход после двух часов езды, и ее расстояние от пристани. Для каждого случая следует делать новый чертеж.

С каким знаком получается результат и какой смысл имеет этот знак?

Запишите решение, подставляя в общую формулу данные числа:

$$x = (-12) + (-10) = (-22).$$

Какая разница между первым и вторым случаем, рассмотренным в задаче?

3) Как прочитать текст задачи, если $a = -12 \text{ км}$ и $b = +10 \text{ км}$?

Найдите точку на прямой, в которой находится пароход после двух часов езды, и определите — в каком направлении и на каком расстоянии эта точка находится от пристани.

С каким знаком получился результат, и какой смысл имеет этот знак?

Запишите решение, подставляя в общую формулу данные числа:

$$x = (-12) + (+10) = (-2).$$

Какая разница с предыдущим случаем, рассмотренным в задаче?

4) Как прочитать текст задачи, если $a = +12 \text{ км}$ и $b = -10 \text{ км}$?

Найдите точку на прямой, в которой находится пароход после двух часов езды, и определите — в каком направлении и на каком расстоянии эта точка находится от пристани.

С каким знаком получился результат, и какой смысл имеет этот знак?

Запишите решение, подставляя данные числа в общую формулу:

$$x = (+12) + (-10) = (+2).$$

Выпишите все полученные частные решения задачи:

$$1) (+12) + (+10) = (+22); \quad 2) (-12) + (-10) = (-22);$$

$$3) (-12) + (+10) = (-2); \quad 4) (+12) + (-10) = (+2).$$

З а м е ч а н и е. В первых двух случаях — мы имеем сложение двух чисел с *одинаковыми* знаками (оба слагаемые положительные или оба отрицательные), в двух других случаях — сложение двух чисел с *разными* знаками (одно слагаемое положительное, другое — отрицательное).

Вопросы. 1. Каким арифметическим действием над абсолютными значениями слагаемых находят числовой результат в первых двух случаях?

2. Какой знак имеет слагаемое в первом случае, и какой знак у суммы? Ответьте на те же вопросы для второго случая.

3. Какими арифметическим действием над абсолютными значениями слагаемых находят результат в двух последних примерах? Какой знак имеют слагаемые в последних двух случаях, и какой знак — у суммы?

Задача. Решите предыдущую задачу, пользуясь числовой прямой и общей формулой: $x = a + b$, для следующих числовых данных: $a = +15$, $b = +18$; $a = -17$, $b = -20$; $a = +12$, $b = -15$; $a = -16$, $b = +14$.

Правила. I. *Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные значения и у результата поставить общий знак слагаемых.*

II. *Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо вычесть из большего абсолютного значения меньшее и поставить у результата тот знак, который имело слагаемое с большей абсолютной величиной.*

Упражнения. 1. Велосипедист проехал от заставы по шоссе $+7$ км, сделал остановку и потом проехал от этого пункта еще -5 км. На каком расстоянии от заставы и в каком направлении находится теперь велосипедист?

2. Пароход прошел 12 км от пристани A до пристани B и от пристани B до пристани C еще -15 км. На каком расстоянии находится приставь C от пристави A и в какую сторону?

3. Луна возшла на a минут до или после полуночи, а время восхода звезды разнится на b минут. Через сколько минут после полуночи или за сколько минут до полуночи появилась звезда?

Дайте общую формулу решения задачи, вычислите и объясните смысл полученного решения при $a = +12$, $b = +7$; $a = -11$, $b = +3$; $a = +17$, $b = -7$; $a = -15$; $b = -5$.

Произведите сложение в следующих примерах:

4. $(-120) + (-70)$; 5. $(-3,7) + (-5,6)$; 6. $(-42,7) + (-35,3)$;
7. $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$; 8. $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$; 9. $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$;
10. $\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right)$; 11. $\left(-2\frac{3}{4}\right) + \left(+5\frac{1}{2}\right)$.

§ 5. Первое свойство сложения.

Задача. Кооператив получил за четыре недели следующую прибыль: в первую неделю $(+17)$ руб., во вторую (-5) руб., в третью (-12) руб. и в четвертую $(+10)$ руб. Сколько всего прибыли за четыре недели получено кооперативом?

Указание. Запишите решение в таком виде:

$$(+17) + (-5) + (-12) + (+10).$$

Пользуясь предыдущим правилом сложения относительных чисел, к первому слагаемому прибавьте второе, к полученному числу прибавьте третье слагаемое, к полученному — четвертое.

Переставьте слагаемые в этой задаче в таком порядке:

$$(+17) + (+10) + (-5) + (-12).$$

Найдите теперь результат сложения. Изменилась ли сумма от перестановки слагаемых?

Вывод. Сумма не меняется от перестановки слагаемых (переместительный закон сложения).

Выразить этот закон общей формулой можно так:

$$a + b + c = c + a + b = b + c + a = \dots$$

Замечание. Сложение в предыдущем примере можно производить другим способом: сложить сперва первые два положительные слагаемые, потом два последние — отрицательные, и наконец сложить полученные две суммы. Получится ли прежний результат?

§ 6. Второе свойство сложения.

Задача. В кассе кооператива было в наличности 35 руб. Затем в течение 4 недель была получена прибыль, указанная в предыдущей задаче. Сколько денег оказалось в кассе к концу 4-й недели?

1) Каким действием решается эта задача?

2) Сложите в том порядке, который дан в задаче, прибыль за 4 недели и прибавьте полученную сумму к той, которая имелась вначале в кассе кооператива. Полученное число и будет ответом на вопрос задачи.

3) Но можете поступить иначе: прибавьте по очереди к сумме, имевшейся в кооперативе, прибыль, получаемую последовательно в конце каждой недели.

4) Получите ли вы тем и другим способом один и тот же ответ?

Вывод. Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких слагаемых, нужно прибавить каждое слагаемое в отдельности в любом порядке (сочетательный закон сложения).

Можно этот закон записать в общей форме буквами:

$$a + (b + c + d) = [(a + b) + c] + d.$$

§ 7. Упражнения.

1. Вычислите наиболее коротким путем, пользуясь переместительным и сочетательным законом сложения:

$$857 + 29 + 13 + 91;$$

$$935 + 71 + 64 + 29;$$

$$863 + 46 + 27 + 34.$$

Указания. 1) Следует изменить порядок слагаемых так, чтобы удобнее было их складывать. Например если нужно сложить числа 136, 25 и 14, удобнее складывать в другом порядке, именно к 136 прибавить 14, а потом 25.

2) Следует слагаемые числа разбить на части и прибавлять каждую часть отдельно. Например, чтобы сложить 136 и 14, для ускорения счета удобно 14 разло-

жить на 4 и 10, а 136 на 130 и 6 и складывать так: $6 + 4$ и $130 + 10$. Все эти операции можно записать в таком виде:

$$136 + 25 + 14 = 136 + 14 + 25 = (130 + 6) + (10 + 4) + 25 = \\ (130 + 10) + (6 + 4) + 25 = 175.$$

На практике следует все такие вычисления делать без всякой подробной записи устно, пользуясь всегда для ускорения счета законами сложения, переместительным и сочетательным.

2. Вычислить устно наиболее коротким способом:

$$586 + 764; \quad 336 + 754.$$

3. Применить законы сложения к объяснению письменного сложения многозначных чисел, разлагая их на слагаемые по разрядам, например:

$$8768 = 8000 + 700 + 60 + 8.$$

Сложите: $5637 + 7423$; $943768 + 178834$.

4. Прирост населения на 1 октября в одном районе за полгода (+320) человек, в другом (—170), в третьем (+450), в четвертом (+210), в пятом (—215).

Как велик прирост во всех пяти районах?

5. Выполните сложение в следующих примерах:

- 1) $(-43) + (+75) + (+83) + (-54)$;
- 2) $(-16) + (-44) + (+58) + (-34) + (-92) + (-37)$;
- 3) $(-0,37) + (+2,1) + (8,35) + (-9,37)$;
- 4) $(-0,837) + (-9,163) + (+0,42) + (0,318)$;
- 5) $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{6}\right)$;
- 6) $\left(+7\frac{5}{12}\right) + \left(-5\frac{2}{3}\right) + \left(-2\frac{5}{6}\right) + \left(+3\frac{1}{2}\right)$;
- 7) $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{12}\right) + \left(-5\frac{7}{12}\right) + \left(-3\frac{3}{4}\right)$.

6. Придумайте текст задачи на следующие числовые примеры:

$$1) (+7) + (-3) = +4; \quad 2) (-7) + (-8) = -15.$$

7. Подставьте в алгебраическое выражение $a + b + c$ нижеследующие числа и найдите результат по правилу сложения относительных чисел:

$$1) a = +15; b = -11; c = -4; \quad \text{Указание. } (+15) + (-11) + (-4) = ? \\ 2) a = +0,25; b = -0,68; c = +1,18; \quad 3) a = +\frac{1}{4}; b = -\frac{7}{8}; c = +\frac{3}{4}.$$

§ 8. Вычитание относительных чисел.

Для решения вопроса о том, как производить вычитание относительных чисел, разберем задачу, которая по смыслу решается *вычитанием*, найдем результат графически по смыслу в различных частных случаях, а затем попробуем подыскать наиболее удобное правило для быстрого нахождения результатов вычитания любых двух относительных чисел.

Задача 1. Лодочник за один час успел отъехать от пристани на расстояние a километров, через два часа он был уже на расстоянии b километров от пристани.