А. Гейтинг

Обзор исследований по основаниям математики

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Гейтинг
А11 Обзор исследований по основаниям математики / А. Гейтинг – М.: Книга по Требованию, 2024. – 96 с.

ISBN 978-5-458-58227-8

В книге Гейтинга дается обзор двух основных школ современной буржуазией философии математики — интуиционизма и формализма. В процессе критической работы обе школы, несмотря на их философские субъективно идеалистические предпосылки, открыли ряд Чрезвычайно глубоких и интересных математических фактов. Ознакомление с ними приставляет интерес для советского читателя, желающего ознакомиться с вопросами обоснования математики. Сам автор книги — видный интуицнонист, одни из ближайших учеников главы интуиционистской школы Броуэра.

ISBN 978-5-458-58227-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава третья

Иные концепции

Глава четвертая

Математика и естествознание

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий интерес к вопросам обоснования математики все возрастает. Если ранее те немногочисленные исследователи, которые серьезно занимались этими вопросами, встречали незначительное внимание, то теперь участие в разработке этих вопросов стало почти всеобщим со стороны как математиков, так и философов. Причиной такого перелома явилась, конечно, теория множеств G. Cantor'a, которая уже вскоре после своего возникновения вызвала оживленное обсуждение вопроса о ее правомерности; всеобщее внимание, в частности, привлекли противоречия, появляющиеся при неосторожном развитии основных идей этой теории. Однако встречающееся иногда и ныне утверждение, будто целью исследования основ математики является устранение этих противоречий, — ошибочно. И в философском и в математическом направлении это исследование выходит далеко за пределы, ставящиеся подобной целью. С философской точки зрения исследуется сущность математического познания, его предпосылки и конечные цели, его отношение к другим областям знания, особенно к физике, и граница, отделяющая его от последней в отношении их содержания и их метода. К этим философским изысканиям примыкают обширные математические исследования проблемы построения математики из заданных философских предпосылок, а также исследования структуры математических способов доказательства. Отдельные участки этих исследований уже развиваются в самостоятельные дисциплины, с точки зрения их методов и постановки проблем становящиеся независимыми от исследования основ математики в собственном смысле. Примером подобной новой ветви математики, обязанной своим возникновением исследованию ее основ, является математическая логика.

Постепенно образовались три главных направления, каждое из которых соответствует своему особому пониманию сущности математики и приводит к различным по характеру математическим исследованиям.

С точки зрения *логистики* математика есть ответвление логики. При этом возникают математические проблемы, относящиеся, во-первых, к точному построению логики и, во-вторых, к действительному развитию математики из логики. К этому формальному построению затем присоединяются „метаматематические“ исследования, изучающие структуру формального аппарата самого по себе, независимо от его содержательного значения. Как раз эти метаматематические исследования начинают превращаться в самостоятельную дисциплину.

С точки зрения *формализма* математика в собственном смысле по характеру своему чисто формальна. Но здесь придается большое значение метаматематическому рассмотрению формальной математики, которое должно в особенности обеспечить непротиворечивость формальной системы (понимаемую в особенном и точно установленном смысле слова).

С точки зрения *интуиционизма* математика обладает содержательным значением и возникает благодаря конструктивной деятельности нашего разума. Подлинное построение математики на этой основе представляет собой огромную задачу. При этом оказывается, что подобный содержательный смысл можно присвоить не всему достоянию классической математики.

В настоящем реферате я рассматриваю исследования основ математики в интуиционистском и формалистском направлениях. Очевидно, что в этой области отделить друг от друга рассмотрения философские и математические невозможно. Напротив, при выборе материала я как раз исходил из тесной связи между математикой и философией. В философском отношении я ограничился лишь самым необходимым для понимания математических проблем, а из математических проблем рассматриваю лишь те, которые имеют явное отношение к ответу на вопрос: „что такое математика?“.

Не затрагиваются здесь, во-первых, построение математики с точки зрения логистики, во-вторых, проблемы чистой логики, вроде так называемой проблемы разрешимости, в-третьих, общие метаматематические изыскания, предметом которых служат совершенно произвольные системы исчислений. Всему этому предполагается посвятить в настоящей серии специальный реферат[1]).

[1]) Настоящий обзор под заглавием „Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie“ появился в качестве 4-го выпуска 3-го тома серии „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“.

Глава первая

ИНТУИЦИОНИЗМ

§ 1. Введение. Влияние Poincaré

К интуиционистам мы относим тех математиков, которые принимают следующие два принципа:

1. Математика обладает не только чисто формальным, но и содержательным значением.

2. Математические предметы непосредственно постигаются мыслящим духом; следовательно, математическое познание не зависит от опыта.

Предшественником современных интуиционистов можно считать A. Poincaré. В первой из своих известных философских книжек [1] он отстаивает мнение, что математическая индукция, т. е. рекуррентное доказательство, навязывается нам необходимым образом, так как является лишь проявлением некоторого свойства нашего разума. Позднее [3] он присваивает содержательное значение и другим математическим понятиям: „если математическую мысль сводят к пустой формуле, то она, конечно, при этом искажается". Стремлениям формалистов установить правомерность математической индукции посредством доказательства ее непротиворечивости он противопоставляет замечание, что при этом доказательстве вынуждены бывают воспользоваться как раз самим принципом полной индукции или каким-либо ему эквивалентным. Однако для математических предметов, отличных от натуральных чисел, он находит возможным считать доказательство непротиворечивости доказательством существования. Объекты какой-нибудь математической теории существуют для него, если аксиомы этой теории не могут привести к какому-либо противоречию. Непротиворечивость учения о натуральных числах он считает обеспеченной в силу его интуитивной ясности; благодаря этому непротиворечивость других систем аксиом, например геометрии, оказывается возможным доказать, обращаясь к арифметике, как это было сделано Hilbert'ом в его первых работах по аксиоматике.

Поскольку Poincaré утверждал необходимость интуиции и интуитивный характер элементарной арифметики, он был предшественником интуиционистов; приравнивая существование к непротиворечивости, он подготовлял Hilbert'ову теорию доказательства. Таким образом следы его идей встречаются в различных направлениях современных исследований основ математики. Важны также его исследования вопроса о связи между математикой, в особенности геометрией, и опытом (см. гл. IV, § 1).

Второй из названных принципов можно понимать двояким образом. Можно приписывать математическим предметам существование в себе, т. е. независимое от нашего мышления. Но о существовании их мы можем лишь заключать с помощью построения, причем существующий сам по себе предмет нами копируется и лишь благодаря этому становится познаваемым для нас. Такую концепцию мы будем называть полуинтуиционистской. Начало ее развитию положил Kronecker [1], она по существу лежит в основе теорий так называемых реалистов или эмпириков французской школы (Borel, Lebesgue, Baire), а также венского философа F. Kaufmann'a.

Подобные же взгляды выдвигались Skolem'ом [1] и Richard'ом [1].

Другое понимание второго принципа защищает Brouwer, который отказывает математическим предметам в каком бы то ни было независимом от мышления существовании или же по крайней мере считает неправомерным применять убеждение в подобном существовании в качестве средства математического доказательства.

§ 2. Французские полуинтуиционисты

Резюмирующего изложения взглядов „эмпириков" не имеется. Их многочисленные, часто бессистемно изложенные замечания, нередко противоречат одни другим. Воззрения их сторонников образуют целую гамму оттенков от „идеалистов" вроде Hadamard'a до крайних „реалистов" или „эмпириков" вроде Baire'a. Часто встречается и крайне оппортунистическое мнение, что допустимыми следует считать те понятия, которые оказываются полезными для развития науки (например, Lusin [1], стр. 324, Borel [1], стр. 144). Наиболее подробно изложили свои взгляды Borel [1, 3] и Лузин (Lusin [1]).

1. Конечная определимость. В критических замечаниях этих ученых важную роль играет понятие конечной определимости. Существование какого-нибудь предмета считается обеспеченным лишь в том случае, если его можно определить с помощью конечного числа слов. В этом не следует усматривать наличия какого бы то ни было вида номинализма; в основе здесь лежит то представление, что конечный процесс мышления должен проявляться в конечном виде и в речи, и наоборот, так что определимость конечного характера обозначает не что иное, как возможность конечного построения.

Критика Borel'я была вызвана предложенной Zermelo аксиоматикой теории множеств, которую Borel рассматривал с точки зрения ее содержания; сначала эта критика была направлена по преимуществу против аксиомы выбора (Borel [1], стр. 147). Никто ведь не верит в возможность действительно составить в каждом случае „выбранное множество" (Auswahlmenge) (Fränkel [5], стр. 81 и след.); поэтому при содержательном понимании и аксиома выбора несовместима с вышеописанным понятием существования. Замечание это дало повод математикам Borel'ю, Hadamard'y, Baire'y и Lebesgue'y опубликовать свои воззрения на этот и близкие к нему вопросы (воззрения, которые они, разумеется, уже часто высказывали устно и ранее). При этом Hadamard противопоставил свою „идеалистическую" концепцию „реалистической" концепции остальных участников переписки (Borel [1], стр. 150—160). В непосредственной связи с этой дискуссией Lebesgue предложил ограничить математику областью „выразимых" (nommable) предметов, причем так называл он те предметы, которые могут быть охарактеризованы индивидуально. Требование это заходит менее далеко, чем требование возможности построения.

2. Натуральные числа. Примыкая к Poincaré, Borel считает, что ряд натуральных чисел представляется каждому математику заданным с ясностью, достаточной для того, чтобы были невозможны какие бы то ни было недоразумения. В этой интуиции натуральных чисел уже содержится метод доказательства с помощью полной индукции, в которой Poincaré видел специфически математический прием мышления. Borel неоднократно подчеркивает, что в этой интуиции заключается больше, чем в простом замечании, что „за каждым числом имеется следующее". Это большее он пытается выразить следующим образом: „операцию, которая позволяет при помощи добавления одной единицы образовать из каждого целого числа следующее целое, можно, с известной точки зрения, рассматривать все время (indéfiniment) *как одну и ту же*" (Borel [1], стр. 145). Затем Borel ставит задачу более подробно исследовать, в какой мере и с какой точки зрения операция эта всякий раз оказывается одной и той же. Вопрос этот важен для него в силу своей связи с проблемой существования Cantor'овых чисел второго класса.

Второй числовой класс. Если бы понятие натурального числа исчерпывалось приведенным простым замечанием, то можно было бы полагать, что применение второго числового класса как законченного целого окажется оправданным в силу следующего положения: „для каждой последовательности счетных порядковых чисел существует большее". Но в действительности дело обстоит иначе, ибо понятие числового ряда требует в качестве предпосылки тождественности отношений следования, а для второго числового класса чего-либо подобного не имеется. Некоторые из его начальных сегментов можно получить с помощью построения, но нельзя указать ни одного построения, которое позволило бы посредством интуитивно ясного процесса образовывать все числа второго числового класса. Поэтому Borel отклоняет все доказательства, в которых участвует совокупность чисел второго числового класса Cantor'a.

3. **Континуум**. Континуум Borel рассматривает как непосредственно данный нам в геометрической интуиции; важнейшим свойством его является однородность, из которой следует, что охарактеризовать отдельные элементы континуума при помощи специальных признаков невозможно. Это становится возможным сделать лишь после того, как введены арифметические понятия, а при этом возникают все затруднения, встречающиеся при попытках обоснования арифметики. Действительное число определено лишь тогда, когда его можно аппроксимировать с любой степенью точности при помощи рациональных чисел. Те числа, для которых это возможно, Borel называет вычислимыми (calculables); они одни являются индивидуально определимыми. Множество вычислимых чисел счетно, ибо оно эквивалентно некоторому подмножеству множества всех конечных последовательностей слов; с другой стороны, в математике встречаются одни лишь вычислимые числа. Теорема: „континуум имеет мощность выше счетной" означает таким образом не

более, чем утверждение, что мы никогда не сможем его исчерпать посредством счетных множеств. Но было бы бессмысленным утверждать, что кроме счетного количества вычислимых чисел существуют еще и другие числа, которые могут быть заданы индивидуально. Более общим образом Borel утверждает (Borel [1], стр. 166), что в действительности имеются одни лишь счетные множества; понятие несчетного множества является чисто отрицательным.

Понятие счетности. Различию между вычислимыми и невычислимыми числами соответствуют аналогичные различия и в других областях. Так, например, наряду со счетными множествами Borel рассматривает действительно перечислимые (effectivement énumerables) множества; для последних должно быть возможным действительно указать закон перечисления. Бесконечное подмножество действительно перечислимого множества является счетным; но оно может и не быть действительно перечислимым; так, например, множество всех вычислимых чисел не является действительно перечислимым. Отсюда следует и ответ Borel'я на антиномию Richard'a: если невозможно действительно задать закон перечисления, то к такому множеству доказательство при помощи диагонального процесса неприменимо (Borel [1], стр. 162).

Теория функций. Понятие вычислимости Borel распространил на функции. Функция называется вычислимой, если ее значение для каждого вычислимого значения аргумента есть вычислимое число. Существенно, что каждая вычислимая функция непрерывна на множестве вычислимых значений аргумента [ср. теорему Brouwer'a о непрерывности каждой полной (volle) функции в § 5 настоящей главы, п. 7]. Невычислимые функции не исключаются из математики полностью, но относятся к области теории вероятностей; невычислимое число не является индивидуально определимым и можно считать, что оно определяется лишь случайным образом.

Никто не попытался точно описать то, что было разрушено в области классической математики критикой эмпириков, однако те классические — в тесном смысле слова — теории, которые не связаны непосредственно с вопросами теоретико-множественного характера, считались почти единодушно вполне прочными. Иногда у эмпириков встречаются значительно более радикальные высказывания. Так, Lebesgue говорит (Borel [1], стр. 156), что не обязательно, чтобы каждое множество было либо конечным, либо бесконечным, а Borel однажды отмечает возможную неразрешимость вопроса о равенстве или неравенстве двух каких-нибудь действительных чисел, хотя тотчас же вновь отбрасывает это затруднение (там же, стр. 220).

Некоторые исследователи, как Kuratowski, Sierpiński [1] и Tarski, подвергли изучению самое понятие определимости. Мы здесь не касаемся этих работ, так как в них либо разбираются весьма специальные примеры, либо же они относят понятие определимости к некоторой заранее данной системе, в силу чего теряется какая бы то ни было связь с интуиционизмом (Tarski [2]).

4. Borel'евские множества. Исследования в области оснований математики оказались наиболее плодотворными для теории точечных множеств и теории функций действительного переменного. Именно исследования основ теории множеств привели Borel'я к теории так называемых *Borel'евских множеств*, названных им сперва *измеримыми множествами* (ensembles mesurables), позднее — *вполне определенными множествами* (ensembles bien définis), а ныне вслед за Lebesgue'ом называемыми B-множествами (ensembles mesurables B). Каждому линейному точечному множеству соответствует функция, равная во всех его точках нулю, а во всех остальных точках — единице. Множество называется вполне определенным, если соответствующая функция вычислима, или же, что в данном случае одно и то же, если для каждой вычислимой точки можно решить, принадлежит ли она множеству или нет. В этом случае, как уже было сказано выше, функция непрерывна на множестве вычислимых чисел, т. е. на плотном множестве, и следовательно, на этом множестве она постоянна. Вполне определенное множество либо не содержит ни одной вычислимой точки, либо же содержит все вычислимые точки некоторого интервала. Для концов интервала возникают затруднения, ибо может оказаться, что и для вычислимой точки нельзя решить, с какой стороны от границы она находится; поэтому вполне определенное множество, построенное из счетно-многих интервалов, является определенным лишь с точностью до — самое большее — счетного множества (Borel [1], стр. 225—226). Исходя из множеств, построенных при помощи интервалов, дальнейшие B-множества получают, применяя следующие две операции:

1. Образование суммы (Vereinigungsmenge) конечного или счетного числа множеств, не имеющих общих элементов.