Л. В. Канторович

Методы приближенного решения уравнений в частных производных

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л. В. Канторович
Л11 Методы приближенного решения уравнений в частных производных / Л. В. Канторович – М.: Книга по Требованию, 2024. – 528 с.

ISBN 978-5-458-56867-8

Настоящая книга входит в ряд научных монографий, издаваемых ОНТИ. В ней дается систематическое наложение методов приближенного решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Наибольшее внимание уделено уравнениям Лапласа, Пуассона и бигармоническому уравнению, вопросы решения которых имеют весьма важное значение в электротехнике, теплотехнике, строительной механике, гидро и аэромеханике и т.д.

Рассчитана она на научных работников и аспирантов университетов, втузов и научно-исследовательских институтов; кроме того может быть рекомендована всем интересующимся приложениями математики к техническим вопросам.

ISBN 978-5-458-56867-8

ГЛАВА I

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

§ 1. Метод Фурье

Одним из основных и наиболее распространенных методов решения задач математической физики является метод Фурье. Решение, найденное по этому методу, получается обычно в форме бесконечного ряда, во многих случаях быстро сходящегося, поэтому метод Фурье часто может быть использован и для нахождения необходимых численных результатов; отрезок же этого ряда дает приближенное решение задачи. Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими применениями метода Фурье к решению задач математической физики, например с решением задачи о струне по методу Фурье. [1] Поэтому мы не будем излагать здесь метод Фурье со всей полнотой и подробностью, а рассмотрим только его применение к задачам, относящимся к уравнениям эллиптического типа и главным образом к уравнению Лапласа.

В n° 1 приведено решение одной частной задачи — именно задачи Дирихле для прямоугольника. В n° 2 намечены общие принципы применения метода Фурье к задачам эллиптического типа. В n° 3, 4 — дальнейшие применения метода Фурье к частным задачам.

n° 1. Задача Дирихле для прямоугольника. Простейшим и основным уравнением в частных производных эллиптического типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Функции непрерывные с частными производными первого и второго порядка, являющиеся решениями этого уравнения, называются **гармоническими**.

Первая основная задача, относящаяся к уравнению Лапласа, есть задача Дирихле. Она формулируется так: *найти функцию u*,

---

[1] См. В. И. Смирнов. Курс Высшей математики, т. II, стр. 449 (изд. 2). Н. С. Кошляков. Диференциальные уравнения математической физики. Вебстер-Сеге. Диференциальные уравнения в частных производных математической физики. Гильберт-Курант. Методы математической физики.

гармоническую в данной области D и принимающую на замкнутом контуре L, ограничивающем область D, заданные значения. Если уравнения контура L даны в параметрическом виде: $x = x(s)$, $y = y(s)$, то это условие можно, например, записать так:

$$u[x(s),\ y(s)] = f(s),$$

где $f(s)$ заданная функция. Короче будем записывать:

$$u = f(s) \text{ на } L.$$

Сделаем одно замечание, которое будет нам полезно. Если функция $f(s)$ есть сумма $f(s) = f_1(s) + f_2(s)$, то достаточно, очевидно, найти решения u_1 и u_2, обращающиеся на L соответственно в $f_1(s)$ и $f_2(s)$, так как $u = u_1 + u_2$ даст решение задачи, обращающееся на L в $f(s)$.

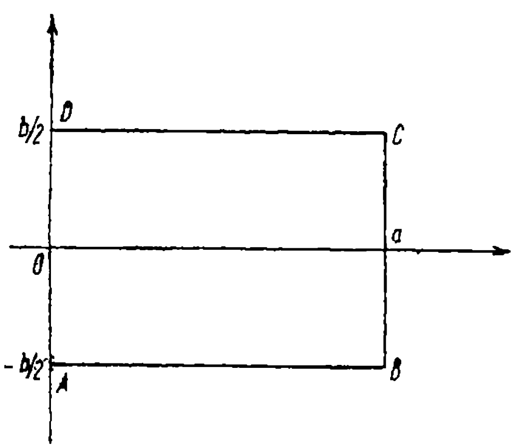

Рис. 1.

Перейдем теперь к решению задачи Дирихле для случая, когда область D есть прямоугольник со сторонами a и b. Оси координат выберем как указано на чертеже, т. е. за ось абсцисс возьмем горизонтальную среднюю линию, а за ось ординат — левую сторону.

Общая задача Дирихле будет состоять здесь в нахождении гармонической функции, обращающейся в заданные произвольные функции на сторонах прямоугольника. Следовательно, граничные условия можно записать так:

$$(2) \qquad u = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \dfrac{b}{2} \\[2mm] \varphi_2(x) & \text{»} \quad y = -\dfrac{b}{2}, \end{cases} \qquad u = \begin{cases} \psi_1(y) & \text{»} \quad x = 0 \\ \psi_2(y) & \text{»} \quad x = a \end{cases}$$

Решение этой задачи можно получить как сумму $u_1 + u_2$ решений двух более простых задач:

$$(3) \qquad u_1 = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } y = \dfrac{b}{2} \\[2mm] \varphi_2(x) & \text{»} \quad y = -\dfrac{b}{2} \\[2mm] 0 & \text{»} \quad x = 0 \text{ и } x = a, \end{cases}$$

$$(3') \qquad u_2 = \begin{cases} \psi_1(y) & \text{при } x = 0 \\ \psi_2(y) & \text{»} \quad x = a \\ 0 & \text{»} \quad y = \pm\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

Эти задачи являются более простыми, так как в них мы имеем на двух сторонах нулевые условия. Обе задачи несущественно разнятся между собой и решение одной из них может быть легко сведено к решению другой, поэтому мы рассмотрим подробно лишь задачу нахождения функции u_1.

Задачу решаем методом Фурье. Ищем прежде всего элементарные основные решения, именно функции вида

$$u = X(x) \cdot Y(y), \tag{4}$$

которые удовлетворяли бы уравнению Лапласа (1) и лишь последнему из условий (3).

Подставляя (4) в уравнение Лапласа, найдем:

$$X''Y + Y''X = 0$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k, \tag{5}$$

где k некоторая постоянная, ибо оба выражения $\frac{X''}{X}$ и $\frac{Y''}{Y}$ должны быть постоянными, так как только в этом случае функция одного x может тождественно равняться функции одного y. Для нахождения функции X из (5) получим уравнение второго порядка:

$$X'' - kX = 0, \tag{6}$$

а чтобы функция u, определенная равенством (4), удовлетворяла последнему из условий (3), функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$X(0) = X(a) = 0. \tag{7}$$

Мы должны найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (7). Если положить $k = -\lambda^2$, [1] то общее решение уравнения (6) будет:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Условия (7) дают

$$C_1 = 0$$

$$C_1 \cos \lambda a + C_2 \sin \lambda a = 0,$$

следовательно $C_1 = 0$ непременно, а C_2 можно взять неравным нулю только при условии

$$\sin \lambda a = 0, \tag{8}$$

т. е., если λa число кратное π:

$$\lambda a = n\pi \qquad [n = 1, 2, 3, \ldots],$$

n неположительные здесь отсутствуют, так как новых решений они не

[1] Можно было бы рассмотреть и положительные значения k, но они не дали бы никаких отличных от нуля решений. Действительно, положив $k = \lambda^2$, нашли бы $X(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x$, начальные условия (7) заставили бы здесь принять $C_1 = C_2 = 0$, т. е. мы не получили бы никакого нетривиального решения.

дают. Итак, при $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ мы получаем решение:

$$X_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad [n = 1, 2, \ldots]. \tag{9}$$

Подставляя $k = -\lambda^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ в (5), получим для Y уравнение

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0, \tag{9'}$$

решая которое, найдем

$$Y = C_1^* e^{\frac{n\pi}{a}y} + C_2^* e^{-\frac{n\pi}{a}y} = C_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + C_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y, \tag{10}$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

Окончательно основное решение уравнения (4) в виду (9) и (10) можем записать так:

$$u = \left(A \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{11}$$

где A и B опять произвольные постоянные.

Теперь решение нашей задачи — функцию u_1 можем искать в виде суммы основных решений:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \tag{12}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа (1) и последнему из условий (3), остается подобрать постоянные A_n и B_n так, чтобы удовлетворить первым двум из условий (3). На основании этих условий пишем следующие равенства:

$$\left\{\begin{aligned} u_1\Big|_{y=\frac{b}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}\right) \sin \frac{n\pi}{a} x = \varphi_1(x), \\ u_1\Big|_{y=-\frac{b}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}\right] \sin \frac{n\pi}{a} x = \varphi_2(x). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

С другой стороны, разлагая $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в ряды, по $\sin \frac{n\pi}{a} x$, имеем:

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(1)} \sin \frac{n\pi x}{a}; \quad \varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(2)} \sin \frac{n\pi x}{a} x, \tag{14}$$

где

$$\beta_n^{(1)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx; \quad \beta_n^{(2)} = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_2(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \tag{15}$$

Сравнивая коэфициенты рядов (13) и (15), получаем следующие равенства:

$$
(16) \qquad \begin{cases} A_n \operatorname{ch} \dfrac{n\pi b}{2a} + B_n \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{2a} = \beta_n^{(1)}, \\ A_n \operatorname{ch} \dfrac{n\pi b}{2a} - B_n \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{2a} = \beta_n^{(2)}. \end{cases}
$$

Если из этих равенств определить A_n и B_n и подставить в (12), то для u_1 получаем окончательно следующее выражение:

$$
(17) \qquad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{ch} \dfrac{n\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{\beta_n^{(1)} - \beta_n^{(2)}}{2 \operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{2a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a}.
$$

Этот ряд будет наверное сходящимся во всякой точке внутри прямоугольника, ибо $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$, как коэфициенты Фурье интегрируемой функции, стремятся к нулю, а отношения

$$
\frac{\operatorname{ch} \dfrac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \dfrac{n\pi b}{2a}}; \quad \frac{\operatorname{sh} \dfrac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{n\pi b}{2a}}
$$

представляют величины порядка

$$
e^{n \frac{\pi}{a} \left(|y| - \frac{b}{2} \right)}
$$

и так как $|y| < \dfrac{b}{2}$, то ряд для u_1 сходится как прогрессия со знаменателем $e^{\frac{\pi}{a} \left(|y| - \frac{b}{2} \right)}$.

Следует отметить, что для быстроты сходимости ряда (17), особенно в точках близких к контуру $\left(\text{когда } |y| \text{ близок к } \dfrac{b}{2} \right)$, имеет существенное значение быстрота убывания коэфициентов $\beta_n^{(1)}$ и $\beta_n^{(2)}$. Это обстоятельство дает путь для улучшения сходимости ряда (17) [смотри ниже (§ 5)].

В виду быстрой сходимости ряда (17) будут сходиться ряды для производных u_1 и будет допустимо почленное диференцирование, а потому можно непосредственной подстановкой проверить, что функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (1). Далее, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны, то можно показать, что предельные значения для $u_1(x, y)$ при приближении к контуру будут те, которые предписаны условиями (3). Итак, найденная функция u_1 удовлетворяет всем поставленным условиям.

Для нахождения функции u_2 нужно решить уравнение Лапласа при условиях (3′). Но, вводя преобразование координат при помощи формулы

$$x' = y + \frac{b}{2}; \quad y' = x - \frac{a}{2},$$

приведем условия (3′) к виду (3), только при этом обменяются ролями числа a и b и вместо функций φ_1 и φ_2 войдут ψ_1 и ψ_2. Поэтому, воспользовавшись формулой (17), а затем вернувшись к переменным x и y, решение для функции u_2 получаем в следующем виде:

$$(18) \qquad u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi a}{2b}}\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta_n^{(1)} - \delta_n^{(2)}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{2b}}\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \sin\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right),$$

где

$$(19) \quad \delta_n^{(1)} = \frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_1(y)\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right) \quad \delta_n^{(2)} = \frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \psi_2(y)\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right).$$

Полное решение поставленной задачи — функцию u — получим. складывая решения (17) и (18). Следует заметить, что выражения для функций u_1 и u_2 упрощаются, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ [соответственно $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$] равны между собой. Например, если $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi(x)$, то

$$\beta_n^{(1)} = \beta_n^{(2)} = \beta_n = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

и выражение для u_1 принимает вид

$$(20) \qquad u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi y}{a}}{\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}}\,\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

Таким же образом может быть решена для случая прямоугольника и вторая основная граничная задача — задача Неймана.

Задача **Неймана** вообще ставится так: *найти функцию u, гармоническую в области D, у которой нормальная производная* $\frac{\partial u}{\partial n}$, *т. е. производная по направлению нормали к контуру, имеет заданные значения на контуре L,*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_1(s) \text{ на } L. \tag{21}$$

Задача Неймана имеет некоторые особенности по сравнению с задачей Дирихле. Во-первых, она имеет не единственное решение, ибо очевидно, что если мы к некоторому решению задачи прибавим любую постоянную, то снова получим решение. Во-вторых, функция $f_1(s)$ не может быть взята произвольно. Именно, по известному свойству гармонической функции, интеграл от ее нормальной производной по замкнутому контуру должен равняться нулю, [1]

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_L f_1(s)\, ds = 0. \tag{22}$$

Перейдем теперь к случаю прямоугольника. Обозначения и систему координат сохраняем те же, что и в задаче Дирихле. Так же как и там можем разбить задачу на две, причем в каждом случае на двух сторонах условия нулевые. Для функции u_1 будем иметь условия

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \begin{cases} \chi_1(x) & \text{при} \quad y = \frac{b}{2} \\ \chi_2(x) & \text{при} \quad y = -\frac{b}{2} \end{cases} \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad x = a.$$

Задачу решаем методом Фурье. Отыскивая решение в форме $u = XY$, имеем здесь для $X(x)$ вместо (7) условие

$$X'(0) = X'(a) = 0. \tag{24}$$

На основании этого условия получим тем же путем, что $\lambda = \frac{n\pi}{a}$, и

$$X_n = \cos\frac{n\pi}{a}x \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots] \tag{25}$$

Тогда для u_1 найдем вместо (12) ряд

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x + A_0 y + B_0; \tag{26}$$

последнее слагаемое $A_0 y + B_0$ есть решение уравнения (9′), отвечающее случаю $n = 0$.

---

[1] См. В. И. Смирнов, т. II, стр. 500.

Постоянные A_n и B_n можем определить, пользуясь первыми двумя из условий (23). Именно на основании этих условий и ряда (26) пишем

$$
(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[A_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi b}{2a}+B_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+\\
&\qquad\qquad + A_0=\chi_1(x),\\
&\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=-\frac{b}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[-A_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi b}{2a}+B_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+\\
&\qquad\qquad + A_0=\chi_2(x).
\end{aligned}\right.
$$

Обозначим через $\alpha_n^{(1)}$ и $\alpha_n^{(2)}$ коэфициенты Фурье функций $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ при разложении их в ряд по $\cos\frac{n\pi}{a}x$:

$$\alpha_n^{(1)}=\frac{2}{a}\int_0^a\chi_1(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx;$$

$$\alpha_n^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a\chi_2(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx\qquad [n=0,\ 1,\ 2,\ldots].$$

Если сравнить теперь коэфициент при $\cos\frac{n\pi x}{a}$ в обеих частях равенств (27), то найдем систему для определения A_n и B_n:

$$
(27')\quad \left\{\begin{aligned}
&A_n\,\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}=\frac{a}{n\pi}\alpha_n^{(1)}\\
&-A_n\,\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}=\frac{a}{n\pi}\alpha_n^{(2)}\qquad [n=1,\ 2,\ldots].
\end{aligned}\right.
$$

Для $n=0$ получим непосредственно из (27) равенства:

$$A_0=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2};\quad A_0=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}.$$

Последним равенствам можно удовлетворить только, если $\alpha_0^{(1)}=\alpha_0^{(2)}$. При этом же условии будет $A_0=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}=\frac{\alpha}{2}$. Определяя же A_n и B_n из систем (27) и подставляя полученные значения в (26), найдем окончательно:

$$
(28)\quad u_1=\frac{\alpha}{2}y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n^{(1)}-\alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\,\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{2a}}\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi y}{a}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi b}{2a}}\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi x}{a}.
$$

В процессе решения сами собой выявились отмеченные выше особенности задачи Неймана: во-первых, вошла в решение произвольная постоянная B_0; во-вторых, мы получили дополнительное условие $\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=0$. Но это условие означает не что иное, как условие (22) для рассматриваемой задачи. Действительно,

$$\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a \chi_1(x)\,dx-\frac{2}{a}\int_0^a \chi_2(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{a}\left[\int_{DC}\frac{\partial u_1}{\partial y}\,dx-\int_{AB}\frac{\partial u_1}{\partial y}\,dx\right]=-\frac{2}{a}\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

так как по остальным сторонам последний интеграл равен нулю. Итак действительно условие $\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=0$ равносильно (22).

Задача об определении второй части u_2 может быть поставлена и решена аналогичным образом.

Отметим еще, что методом Фурье можно найти решение задачи и для того случая, когда на одних сторонах дана сама неизвестная функция, а на других ее нормальная производная, а также, когда задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

Возможность решения основных граничных задач для уравнения Лапласа в случае прямоугольника позволяет во многих случаях получить решение тех же задач и для уравнения Пуассона

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y). \tag{29}$$

Действительно, пусть для определенности речь идет о задаче Дирихле:

$$u=\varphi(s) \text{ на } L.$$

Предположим, что нам удалось найти какое-то частное решение уравнения Пуассона $u_0(x,\ y)$:

$$\Delta u_0=f.$$

Введем тогда новую неизвестную функцию

$$u_1(x,\ y)=u(x,\ y)-u_0(x,\ y).$$

Функция $u_1(x,\ y)$ должна уже удовлетворять уравнению Лапласа, ибо

$$\Delta u_1=\Delta u-\Delta u_0=f-f=0.$$

Граничные условия для u_1 будут, правда, другие, именно если обозначить $f_0(s)$ ту известную функцию, в которую обращается $u_0(x,\ y)$ на контуре L, то для u_1 получим условие:

$$u_1=f(s)-f_0(s)=f_1(s) \text{ на } L.$$

Таким образом всегда решение граничной задачи для уравнения Пуассона приводит к нахождению частного его решения и к решению граничной задачи для уравнения Лапласа.

Что касается частного решения $u_0(x, y)$, то его часто бывает легко найти, отыскивая в форме, отвечающей правой части и содержащей неопределенные коэфициенты. Например, если правая часть $f(x, y)$ есть полином n-ой степени, то решение нужно искать в виде полинома $(n+2)$-ой степени с неопределенными коэфициентами. При этом двум из коэфициентов в членах каждой степени $k \leqslant n+2$ можно дать произвольные значения, остальные определятся тогда единственным образом. Эта произвольность может быть использована для придания частному решению возможно более простого вида.

Рассмотрим теперь один пример решения задачи Дирихле, именно в случае уравнения Пуассона.

Пример. Задача о кручении прямоугольной призмы.

По теории Сен-Венана задача о кручении любого призматического тела, сечение которого — область D, ограниченная контуром L, — приводится к следующей граничной задаче: найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -2, \tag{30}$$

обращающееся в нуль на контуре L:

$$u = 0 \text{ на } L. \tag{31}$$

При этом основные величины, требующиеся для расчета, выражаются через функцию u (ее называют функцией напряжения) следующим образом: [1]

компоненты касательного напряжения

$$\tau_{zx} = G\vartheta \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{32}$$

а момент при кручении

$$M = 2G\vartheta \int\int u \, dx \, dy. \tag{33}$$

Здесь ϑ угол поворота, отнесенный к единице длины, а G модуль сдвига.

Дадим теперь решение задачи о кручении для прямоугольника со сторонами a и b. Мы должны найти решение уравнения (30), обращающееся в нуль на контуре. Чтобы свести дело к решению уравнения Лапласа, ищем частное решение u_0 уравнения (30).

Решение ищем в виде $u_0 = Ax^2 + By^2$. Подставляя его в упомянутое уравнение, получаем:

$$2A + 2B = -2.$$

Проще всего принять $A = -1$ и $B = 0$. Кроме того к полученному

[1] См. Геккелер. Статика упругого тела, стр. 17. Дальнейшие ссылки — там же. Физическое значение функции u таково. Если перемещения в направлении оси Z есть $w = \vartheta\varphi(x, y)$ и если ψ функция, сопряженная с φ, т. е. такая, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, то $u = \psi - \frac{x^2 + y^2}{2}$.