

Д. Пойа

Как решать задачу

Пособие для учителей

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д11 **Д. Пойа**
Как решать задачу: Пособие для учителей / Д. Пойа – М.: Книга по Требованию, 2021. – 208 с.

ISBN 978-5-458-26274-3

Все содержание книги группируется вокруг таблицы вопросов и советов. Эта таблица напечатана в конце книги. Книга разделена на три части. Первая часть озаглавлена «В классе». Она содержит двадцать пунктов. В пунктах 1-5 рассматривается в самых общих чертах назначение нашей таблицы. Пункты 6-17 разъясняют, что такое «главные части» и «главные вопросы» таблицы; пункты 18-20 содержат дальнейшие примеры. Вторая, очень короткая часть озаглавлена «Как решать задачу». Она написана в форме диалога: немного идеализированный учитель отвечает на короткие вопросы немного идеализированного ученика. Третья, самая объемистая часть озаглавлена «Краткий эвристический словарь». Он состоит из шестидесяти четырех статей, расположенных в алфавитном порядке. Поскольку темы статей «Словаря» отличаются большим разнообразием, следует особо подчеркнуть, что они объединены общим планом. Несколько более длинных статей посвящены систематическому, хотя и сжато, рассмотрению определенной общей темы; другие статьи содержат более частные замечания, исторические сведения, цитаты, афоризмы или даже шутки.

ISBN 978-5-458-26274-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Такие эмоции, пережитые в восприимчивом возрасте, могут пробудить вкус к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере.

Таким образом, преподавателю математики предоставляются великолепные возможности. Если он заполнит отведенное ему учебное время натаскиванием учащихся в шаблонных упражнениях, он убьет их интерес, затормозит их умственное развитие и упустит свои возможности. Но если он будет пробуждать любознательность учащихся, предлагая им задачи, соразмерные с их знаниями, и своими наводящими вопросами будет помогать им решать эти задачи, то он сможет привить им вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого способности.

Прекрасные возможности предоставлены также и студенту любого колледжа, где учебные программы включают кое-что из математики. Эти возможности, конечно, будут потеряны, если он смотрит на математику как на предмет, по которому он должен получить столько-то зачетов и который он постарается забыть как можно быстрее после последнего экзамена. Эти возможности могут быть потеряны, даже если учащийся обладает известными природными

способностями к математике, так как он, как и всякий другой, должен выявить свои таланты и вкусы; так, он не может знать, что любит пирог с малиной, если он никогда не пробовал пирога с малиной. Он может, однако, обнаружить, что математическая задача иногда столь же увлекательна, как кроссворд, и что напряженная умственная работа может быть столь же желанным упражнением, как стремительный теннис. Изведав удовольствие от занятий математикой, он его забудет нескоро, и вот тогда, очень вероятно, математика займет определенное место в его жизни: как предмет любительского увлечения или как инструмент в его профессиональной работе, как профессия или как путь к личной славе.

Автор вспоминает время, когда он сам был студентом, довольно честолюбивым студентом, жаждавшим разобраться немного в математике и физике. Он слушал лекции, читал книги, пытался понять сущность излагавшихся решений и фактов, но один вопрос мучил его вновь и вновь: «Да, это решение, по-видимому, достигает цели и кажется верным, но как можно придумать такое решение? Да, этот эксперимент достигает цели, наблюдаемое явление представляется фактом; но как открывают такие факты? Каким образом я сам мог бы придумать или открыть подобные вещи?» Ныне автор преподает математику в университете; он полагает или надеется, что его наиболее пытливые студенты задают себе подобные вопросы, и он пытается удовлетворить их любопытство. Пытаясь не только понять решение той или иной задачи, но и осознать, как, какими средствами было найдено это решение, делая попытки объяснить другим, в чем заключается сам процесс поисков решения, автор пришел в конце концов к мысли написать настоящую книгу. Он надеется, что она окажется полезной как для преподавателей, стремящихся развить способности своих учащихся к решению задач, так и для учеников, желающих развить свои собственные способности.

Хотя эта книга имеет в виду главным образом потребности преподающих и изучающих математику, она представит интерес для любого лица, желающего понять пути и средства, приводящие к новым идеям и новым открытиям. Интерес к этим вещам, весьма вероятно, распространен шире, чем можно было бы предположить с первого взгляда. Место, которое занимают кроссворды и другие головоломки в популярных газетах и журналах, свидетельствует о том,

что люди тратят известное время на решение задач, не имеющих практического интереса. За желанием решить ту или иную задачу, бесполезную в смысле материального выигрыша, может быть скрыто более глубокое любопытство, желание осознать пути и средства, приводящие к решению.

Предлагаемые вниманию читателя страницы написаны несколько сжато, однако автор стремился к наибольшей простоте изложения. Содержание этих страниц основано на длительном и серьезном изучении методов решения задач. Изучение этих методов является предметом так называемой *эвристики*, которая не в моде в наше время, но имеет большое прошлое и, возможно, некоторое будущее.

При изучении методов решения задач перед нами вырисовывается второе лицо математики. Да, у математики два лица: это и строгая наука Евклида и одновременно нечто другое.

Математика, излагаемая в стиле Евклида, представляется нам систематической, дедуктивной наукой. Но математика в процессе создания является экспериментальной, индуктивной наукой. Оба аспекта математики столь же стары, как сама математическая наука. Однако второй аспект в одном отношении является новым: математику «*in statu nascendi*», — в процессе рождения, — никогда с этой стороны не показывали ни ученику, ни самому учителю, ни широкой публике.

Предмет эвристики тесно переплетается с другими науками; ее отдельные части можно считать принадлежащими не только математике, но и логике, педагогике и даже философии. Автор, отдавая себе полный отчет в возможности критики со стороны представителей этих четырех наук и сознавая ограниченные рамки своей компетентности, все же может претендовать на одно: он обладает некоторым опытом в решении задач и в преподавании математики на самых различных уровнях.

Предмет настоящей книги будет рассмотрен более обстоятельно в новой книге автора, в настоящее время готовящейся к печати ¹.

Автор благодарит своих многочисленных друзей и коллег за их всевозможные предложения и помощь, которую

¹ Речь идет о книге «Математика и правдоподобные рассуждения», в настоящее время вышедшей уже и в русском переводе (И. А. Вайнштейна, под редакцией С. А. Яновской, ИИЛ, М., 1957). (Примечание к русскому переводу.)

они ему оказывали в течение долгих лет его работы над этой несколько необычной книгой. Не имея возможности назвать здесь всех тех, кто оказывал ему помощь, автор не решается привести неполный список этих лиц. Тем не менее автор не может не выразить благодарности директору Издательства Принстонского университета г-ну Дэйтус К. Смигу младшему и помощнику редактора мисс Глэдис Форнэлл за их действенную и квалифицированную помощь.

Д. Поппа.

Стэнфордский университет
1 августа 1944.

ВВЕДЕНИЕ

Все содержание книги группируется вокруг таблицы вопросов и советов. Эта таблица напечатана в конце книги.

Все вопросы или советы, извлеченные из этой таблицы, будут печататься *курсивом*; таблицу эту мы будем называть просто «таблица» или «наша таблица».

Мы подробно рассмотрим назначение таблицы, покажем на примерах, как извлечь из нее практическую пользу, разъясним понятия и мыслительные процессы, на основе которых она построена. В качестве предварительного объяснения можно коротко сказать: если вы обращаетесь к самому себе с этими вопросами и советами, правильно пользуясь ими,— они могут помочь вам решить вашу задачу. Если вы обращаетесь с теми же вопросами и советами к одному из ваших учеников,— вы можете помочь ему решить эту задачу.

Книга разделена на три части.

Первая часть озаглавлена «В классе». Она содержит двадцать пунктов. Ссылки на каждый из этих пунктов даются цифрами, напечатанными жирным шрифтом, например «пункт 7».

В пунктах 1—5 рассматривается в самых общих чертах назначение нашей таблицы. Пункты 6—17 разъясняют, что такое «главные части» и «главные вопросы» таблицы; в этих пунктах рассмотрен первый практический пример, пункты 18—20 содержат дальнейшие примеры.

Вторая, очень короткая часть озаглавлена «Как решать задачу». Она написана в форме диалога: немного идеализированный учитель отвечает на короткие вопросы немного идеализированного ученика.

Третья, самая объемистая часть озаглавлена «Краткий эвристический словарь»; мы будем в дальнейшем называть его просто «Словарь». Он состоит из шестидесяти четырех статей, расположенных в алфавитном порядке. Например, значение термина *эвристика* разъясняется в соответствующей статье «Словаря» на странице 200. Ссылки на статьи «Словаря» печатаются в тексте разрядкой. Некоторые места в отдельных статьях носят более специальный характер; такие места заключены в квадратные скобки. Некоторые статьи «Словаря» весьма тесно связаны с первой частью, которую они дополняют дальнейшими иллюстрациями и более специальными комментариями. Остальные статьи несколько выходят за рамки первой части, разъясняя основные принципы, лежащие в ее основе. Роль ключа играет статья «С о в р е м е н н а я э в р и с т и к а». Она раскрывает связь главных статей «Словаря» и его общий план; она содержит также указания, как навести справку о том или ином пункте таблицы. Поскольку темы статей «Словаря» отличаются большим разнообразием, следует особо подчеркнуть, что они объединены общим планом. Несколько более длинных статей посвящены систематическому, хотя и сжато, рассмотрению определенной общей темы; другие статьи содержат более частные замечания, третьи — ссылки, исторические сведения, цитаты, афоризмы или даже шутки.

Не следует читать «Словарь» слишком быстро; его текст часто весьма сжат; по временам речь идет о довольно тонких вещах. Читатель может обращаться к «Словарию» за справками, касающимися вопросов, вызвавших его интерес. Если эти вопросы возникали в процессе решения задач им самим или его учениками, вероятность, что он извлечет из «Словаря» пользу, будет гораздо больше.

Мы много раз говорили об «учителе» и «ученике»; мы будем обращаться к ним вновь и вновь. Следует заметить, что под «учеником» мы подразумеваем либо учащегося средней школы¹, либо студента колледжа, либо любое другое лицо, обучающееся математике.

¹ Так называемая «high school» — средняя школа в США. Она подразделяется на младшую и старшую ступени для учащихся в возрасте 13—15, соответственно, 16—18 лет. (Полный курс начального и среднего образования составляет в США 12—13 лет.) (Примечание к русскому переводу.— *Ред.*)

Так же точно «учитель» может означать либо учителя средней школы, либо преподавателя высшей, либо любое другое лицо, занимающееся методикой преподавания математики. Автор ставит себя иногда в положение ученика, иногда — в положение учителя (этот последний случай чаще встречается в первой части). Однако чаще всего, особенно в третьей части, автор рассуждает с точки зрения лица, не являющегося ни учителем, ни учеником, а просто заинтересованного в решении стоящей перед ним задачи.

ЧАСТЬ I

В КЛАССЕ

НАЗНАЧЕНИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Помощь ученику. Помогать ученику — одна из наиболее важных обязанностей учителя. Эту обязанность нельзя назвать легкой: она требует времени, опыта, преданности делу и разумных принципов.

Ученик должен приобрести как можно больше опыта самостоятельной работы. Но если он оставлен наедине с задачей без всякой помощи или если эта помощь недостаточна,— это может не принести ему никакой пользы. Если помощь учителя чрезмерна, ничего не остается на долю ученика. Учитель должен помогать, но не слишком много и не слишком мало, так, чтобы ученику оставалась *разумная доля работы*.

Если ученику и не по силам сделать много, учителю следует по крайней мере создать некоторую иллюзию самостоятельной работы. Поэтому помощь учителя должна быть осторожной и *неназойливой*.

Лучше всего, однако, помогать ученику естественно. Учитель должен поставить себя на место ученика; он должен увидеть источник затруднений, постараться понять, что происходит в голове ученика, и задать вопрос или указать шаг, до которого *учащийся мог бы додуматься самостоятельно*.

2. Вопросы, советы, мыслительные процессы. Стараясь оказывать ученику действительную, естественную, но не назойливую помощь, учитель поставлен перед необходимостью вновь и вновь задавать одни и те же вопросы и указывать одни и те же шаги. Так, при решении бесчисленного множества задач нам приходится задавать вопрос: *что неизвестно?*

Тот же вопрос можно задать, меняя его форму многими способами: что требуется? Что вы хотите найти? Что вы должны искать? Цель этих вопросов — сосредоточить внимание ученика на неизвестном. Иногда мы получаем тот же эффект более естественным путем при помощи совета: *рассмотрите неизвестное!*

Вопрос и совет имеют целью одно и то же; они вызывают один и тот же мыслительный процесс.

Автор пришел к мысли, что стоит собрать и сгруппировать типичные вопросы и советы, полезные при разборе задач с учащимися. Таблица, которую мы изучаем, состоит из таких вопросов и советов, тщательно отобранных и размещенных; они в равной мере полезны всякому, кто решает задачи самостоятельно. Если читатель в достаточной степени знаком с таблицей и может различить за внешней формой совета действие, подсказываемое этим советом, то он поймет, что в таблице неявным образом перечисляются *типичные мыслительные процессы, приносящие пользу при решении задач*. Эти процессы перечислены в том порядке, в каком они чаще всего встречаются.

3. Общность — важная, характерная черта вопросов и советов, содержащихся в нашей таблице. Возьмите вопросы: *Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?* Общность этих вопросов такова, что мы можем задавать их с пользой для дела, решая всевозможные задачи. Их применение не ограничивается никаким конкретным содержанием задачи. Она может быть алгебраической или геометрической, математической или нематематической, теоретической или практической, серьезной задачей или просто головоломкой; это все безразлично; вопросы сохраняют смысл и могут помочь нам решить ее.

Фактически одно **ограничение** есть, но оно не связано с конкретной сферой понятий, с которыми мы сталкиваемся в данной задаче. Некоторые вопросы и советы таблицы могут быть применены только к «задачам на нахождение», но не к «задачам на доказательство». Имея дело с задачей этого последнего вида, мы должны применять другие вопросы (см. *З а д а ч и н а н а х о ж д е н и е, з а д а ч и н а д о к а з а т е л ь с т в о*).

4. Здравый смысл. Вопросы и советы нашей таблицы обладают общностью; тем не менее они естественны, просты, очевидны и имеют своим источником простой здравый смысл. Возьмите совет: *Рассмотрите неизвестное! И постарайтесь*

вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Этот совет приводит вас к тому, к чему вы пришли бы так или иначе, без всякого совета, если вы действительно серьезно увлечены вашей задачей. Вы голодны? Вы хотите достать пищу и вспоминаете известные вам пути получения пищи. У вас геометрическая задача на построение? Вы хотите построить треугольник и вспоминаете известные вам способы построения треугольников. У вас задача любого другого характера? Вы хотите разыскать определенное неизвестное, и вы вспоминаете знакомые вам способы найти такое или подобное неизвестное. Если вы поступаете таким образом, вы точно следуете совету, взятому из нашей таблицы. И вы на верном пути; совет хорош; вам рекомендуются действия, часто приводящие к успеху.

Все вопросы и советы нашей таблицы естественны, просты, очевидны; в них воплощен обычный здравый смысл, но воплощение это носит общий характер.

Вопросы и советы таблицы рекомендуют определенный образ действий, совершенно естественно приходящий в голову каждому, кто серьезно занимается своей задачей и обладает крупницей здравого смысла. Но тот, кто поступает правильно, обычно не заботится о точном описании своих поступков, а возможно, и не смог бы этого сделать; сделать это попытается наша таблица.

5. Учитель и ученик. Подражание и опыт. Есть две цели, которые учитель может иметь в виду, обращаясь к ученикам с вопросом или советом, взятым из таблицы: первая — помочь ученику решить именно данную задачу; вторая — так развить способности ученика, чтобы в будущем он смог решать задачи самостоятельно.

Опыт показывает, что вопросы и советы таблицы, если их применять должным образом, очень часто помогают ученикам. Характерные черты, общие для всех вопросов и советов, таковы: здравый смысл и общность. Будучи выведенными из простого здравого смысла, они часто возникают естественным образом; они могут сами собой прийти в голову ученику. Будучи общими, они оказывают ненавязчивую помощь; они просто дают общее направление, оставляя учащемуся обширное поле деятельности.

Однако упомянутые выше две цели тесно связаны между собой; справившись с заданной задачей, ученик несколько развивает свои способности вообще к решению задач. При этом мы не должны забывать, что наши вопросы, обладая