Н. Бурбаки

Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.

Б91 Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2013. – 460 с.

ISBN 978-5-458-31418-3

Трактат Н. Бурбаки "Начала математики" имеет целью изложить всю современную математику с единой и оригинальной точки зрения. Много выпусков этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем. Настоящее издание представляет собой перевод первой книги первой части этого трактата, т. е. книги, в которой закладываются наиболее фундаментальные и общие понятия, служащие основой всего дальнейшего изложения. Книга содержит следующие главы: "Описание формальной математики", "Теория множеств", "Упорядоченные множества; кардинальные числа; целые числа", "Структуры", а также сводку результатов и исторический очерк теории множеств и оснований математики.Книга не предполагает каких-либо предварительных знаний, а требует лишь навыка в математических рассуждениях. Она рассчитана на математиков - научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

ISBN 978-5-458-31418-3

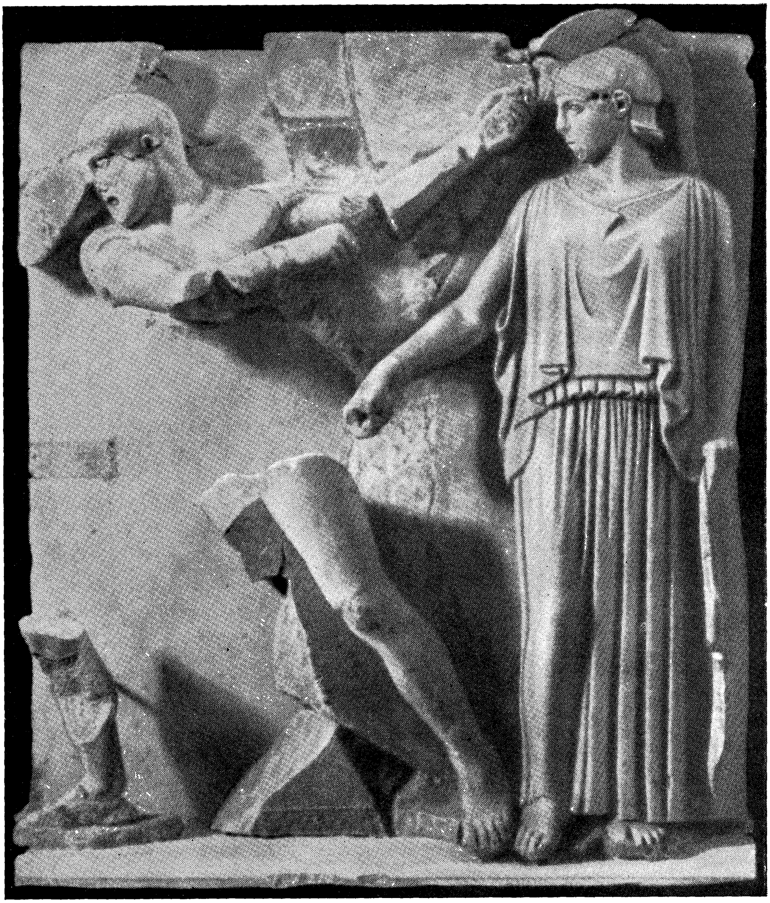
Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint



ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

1. Что представляет собой французский оригинал данного издания

Трактат Никола Бурбаки „Начала математики" ⟨"Éléments de mathématique" par Nicolas Bourbaki⟩ является одним из наиболее известных и наиболее нестандартных произведений современной математической литературы. Он еще не закончен, и не известно, как будет выглядеть все сочинение в целом и даже какого оно будет объема. Поскольку во время писания трактата математика тоже движется вперед, есть основания полагать, что работа не будет завершена никогда.

Трактат ⟨traité⟩ делится на *части* ⟨parties⟩, части — на *книги* ⟨livres⟩, книги — на *главы* ⟨chapitres⟩. Каждая книга, вообще говоря, должна, кроме глав, содержать еще *Словарь* ⟨Dictionnaire⟩ и *Сводку результатов* ⟨Fascicule de résultats⟩. Кроме того, каждая глава или группа глав сопровождаются относящимся к этой главе или группе глав *Историческим очерком* ⟨Note historique⟩. Трактат издается парижским издательством Hermann в серии „Actualités scientifiques et industrielles" и выходит отдельными *выпусками* ⟨fascicules⟩, начиная с 1939 г. Каждый выпуск содержит связную часть текста какой-либо из книг трактата. Выпуски нумеруются в том порядке, в каком они выходят в свет; номер выпуска сохраняется и при переизданиях. Порядок издания выпусков не соответствует логическому порядку частей, книг и глав; это объясняется тем, что, как указывает сам автор в своих анонсах, „составление большинства глав трактата ведется одновременно". В выпуски французского издания вкладываются брошюры, каждая из которых содержит список вышедших выпусков, распределение опубликованных глав, словарей и сводок результатов по книгам и „Способ пользования данным трактатом" ⟨„Mode d'emploi de ce traité"⟩. Кроме того, в эти выпуски, как правило, вкладываются относящиеся к предыдущим выпускам нумеруемые *списки опечаток*.

Список вышедших в свет выпусков трактата Н. Бурбаки приведен в приложении I к настоящему предисловию (см. стр. 13—15). В приложении II (стр. 15—16) показано, как опубликованные в этих выпусках главы, словари и сводки результатов объединяются в книги и части.

Если признаком законченности книги считать наличие в ней Сводки результатов или Словаря (их функции разъясняются в пп. 5 и 9 „Способа пользования"), то законченными следует считать книги I, III, IV и V первой части. Надо, впрочем, иметь в виду, что уже вышедшие разделы Трактата время от времени перерабатываются, иногда очень значительно, и выходят новыми изданиями.

Большая часть исторических очерков (см. о них в п. 11 „Способа пользования“) собрана воедино в книге Н. Бурбаки „Очерки по истории математики“ ⟨„Éléments d'histoire des mathématiques“⟩, формально не входящей в трактат „Начала математики“ и выпущенной в 1960 г. тем же издательством Hermann в качестве IV выпуска серии „Histoire de la pensée“.

Ряд разделов трактата Н. Бурбаки вышел в русском переводе. Список этих русских изданий см. в приложении III на стр. 16—17.

Настоящее русское издание представляет собой перевод первой книги (озаглавленной „Теория множеств“ ⟨„Théorie des Ensembles“⟩) первой части (называемой „Основные структуры Анализа“ ⟨„Les structure fondamentales de l'Analyse“⟩) трактата. Во французском издании эту книгу составляют следующие четыре выпуска (приводимые в том порядке, в каком их переводы скомпанованы в настоящем издании): XVII (содержащий главы I и II), XX (содержащий главу III и Исторический очерк к § 5 главы III), XXII (содержащий главу IV и Исторический очерк к главам I—IV) и I (содержащий Сводку результатов). Для перевода были использованы второе издание выпуска XVII, первые издания выпусков XX и XXII и третье издание выпуска I [1]).

Переводам названных выпусков предпослан в настоящем издании перевод „Способа пользования данным трактатом“, выполненный с экземпляра, вложенного во второе издание выпуска X (1961 г.).

В настоящем переводе учтены списки опечаток № 1—9. Незначительное число мелких неточностей исправлено без оговорок.

2. *Н. Бурбаки о своем трактате*

В аннотации, помещенной в XXII выпуске Трактата, говорится:

„В Трактате математика рассматривается с самого ее начала и даются полные доказательства. Поэтому его чтение не предполагает в прин-

---

[1]) Вот библиографические описания (описываются именно те издания, с которых осуществлен данный перевод):

1) N. Bourbaki. Fascicule XVII. Éléments de mathématique. Première partie. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre 1. Description de la mathématique formelle. Chapitre 2. Théorie des ensembles. Deuxième édition. Paris, Hermann, 1960. 137 стр. + вклейка.

2) Éléments de mathématique par N. Bourbaki. XX. Première partie. Les structures fondamentales de l' Analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre III. Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers. Paris, Hermann et C°, 1956. 118 стр.

3) N. Bourbaki. XXII. Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'Analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre 4. Structures. Paris, Hermann, 1957, 125 стр.

4) N. Bourbaki. I. Éléments de mathématique. I. Les structure fondamentales de l'Analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Fascicule de résultats. Troisième édition. Paris, Hermann, 1958, 63 стр.

ципе никаких специальных математических знаний, а требует лишь некоторого навыка к математическим рассуждениям и некоторой способности к абстракции.

Тем не менее Трактат рассчитан преимущественно на читателей, обладающих по крайней мере хорошим знанием материала, преподаваемого во Франции в курсе общей математики, — в других странах на первом или первых двух годах университетского обучения, — а также по возможности некоторым знанием основных разделов дифференциального и интегрального исчисления.

Трактат никоим образом не имеет своей целью служить энциклопедией современных математических знаний; мы произвели систематический отбор, особенно стараясь развить базисные понятия, используемые при решении большинства задач современной математики. Чтобы сделать эти понятия приложимыми к возможно большему числу случаев, мы представили их в самой общей и, следовательно, самой абстрактной форме, которая позволяет яснее всего видеть структуру различных разрабатываемых теорий. По той же причине мы не стремились включить в изложение каждой теории все теоремы, известные к настоящему моменту; мы принципиально ограничились теми из них, которые составляют логический каркас теории и знание которых необходимо для решения большинства задач, использующих эту теорию. Многие другие результаты, имеющие более ограниченную сферу применения, даны в форме упражнений, содержащих обычно указания, достаточно подробные для их решения.

Трактат разделен на отдельные книги. К каждой книге, как правило, приложена сводка результатов; в ней можно найти большинство определений и сформулированные без доказательства основные теоремы данной книги. Подобная сводка дает математику, желающему пользоваться соответствующей теорией, весьма удобный справочник; кроме того, она может помочь читателю получить представление о книге в целом раньше, чем он приступит к подробному ее изучению".

Так говорит о своем Трактате сам автор. За более подробными сведениями о строении и целях трактата мы отсылаем читателя к „Способу пользования" (стр. 19—22) и к „Введению" (стр. 23—30). Однако, пожалуй, наиболее отчетливо взгляд автора на роль его трактата передает открывающая настоящее издание иллюстрация (во французском издании она открывает собой первый выпуск)[1]).

3. *„Теория множеств" — первая книга „Начал математики"*

Целью трактата Бурбаки является построение всей или почти всей математики на базе теории множеств. Математические объекты

---

[1]) Слепок с изображенного на ней метопа храма Зевса в Олимпии читатель может увидеть в зале № 5 Музея изобразительных искусств имени Пушкина в Москве.

рассматриваются автором как множества, наделенные той или иной „структурой“ (об этом последнем понятии см. § 8 „Сводки результатов“). В п. 2 прежнего варианта „Способа пользования“ говорилось: „Первая часть Трактата посвящена основным структурам Анализа ... ; в каждой из книг, на которые делится эта часть, изучается одна из этих структур или ряд близкородственных структур ... Общие принципы, изучаемые в первой части, найдут затем в следующих частях применение к теориям, в которых появляются одновременно различные структуры“.

Естественно, что при таком способе изложения первая книга — „Теория множеств“ — занимает совершенно особое место в трактате. Автор, намеревающийся систематически выводить всю математику из теории множеств (путем присоединения к последней дополнительных аксиом), именно в этой книге закладывает фундамент своего построения. Поэтому введение к первой книге может в известном смысле рассматриваться как введение ко всему трактату.

В первой главе дается описание метода, посредством которого будет развиваться теория на протяжении всего Трактата. Таковым служит формальный аксиоматический метод[1]), в котором (в отличие от неформального аксиоматического метода) четко формулируются не только аксиомы, но и правила вывода из них. Предложения рассматриваемой теории предстают при этом в виде *знакосочетаний*, а правила вывода одних предложений из других — в виде правил формального преобразования этих знакосочетаний. Именно таким способом развивается во второй главе теория множеств.

Разумеется, знакосочетания и действия с ними могут при желании рассматриваться безо всякой интерпретации, как говорят, с чисто *синтаксической* точки зрения (т. е. исключительно с точки зрения взаимного расположения самих знаков). Однако наибольший интерес представляют, конечно, те построения, которые сопровождаются интерпретацией, т. е. наделением рассматриваемых знакосочетаний определенным *содержанием*. В книге такая интерпретация постоянно указывается. Более того, благодаря широкому использованию так называемых сокращающих символов (см., например, определение символа „1“ на стр. 187—188) и соглашений о словесном прочтении знакосочетаний, текст книги по мере удаления от начала все более и более приобретает характер обычного математического текста (лишь в главе IV приходится снова вернуться к формальному языку). Однако следует всегда помнить, что каждое звучащее обычно предложение (вроде „Существует такое множество, что ...“ и т. п.) представляет собой на самом деле не что иное, как произведенную на основе сделанных соглашений словесную запись некоторого знакосочетания, — причем как раз такого, что это знакосочетание — при

[1]) См. А. Чёрч, Введение в математическую логику, М., ИЛ, 1960, стр. 55.

его интерпретации, заданной особым соглашением, — и это предложение — при обычном его истолковании в повседневном математическом языке — выражают одно и то же суждение. Таким образом, большинство предложений может расшифровываться двумя согласованными между собой способами — обычным, содержательным (как выражающее некоторое суждение) и формальным (как изображающее некоторое знакосочетание); см. для примера формулировку Предложения 1 на стр. 85. Этот особый, „двусмысленный" стиль изложения представляется педагогической удачей автора: он позволяет, развивая формальную аксиоматическую теорию, считать, что мы занимаемся содержательной математикой (или, наоборот, занимаясь обычной математикой, развивать вместе с тем формальную теорию).

В третьей главе излагается теория упорядоченных множеств и кардинальных (количественных) чисел. К сожалению, важнейшее понятие ординального (порядкового) числа встречается лишь в упражнениях.

В главе IV определяется и изучается основное для всего трактата (вынесенное даже в название всей первой части) понятие структуры.

В силу самой тематики первой книги, помещенный в ней, как и в других, Исторический очерк (касающийся оснований математики, логики, теории множеств) более тесно связан здесь с основным изложением, чем где-либо в других разделах Трактата; достаточно сказать, что именно в нем формулируются знаменитые теоремы Гёделя об ограниченности формального аксиоматического метода. [Поэтому было решено набрать его в русском издании тем же шрифтом, что и основной текст (во французском оригинале исторические очерки набираются петитом).]

Наконец, Сводка результатов должна сделать возможным для читателя изучение последующих книг Трактата без непосредственного обращения к достаточно напряженному тексту глав I—IV.

4. *Некоторые критические замечания*

Перед любым автором, избирающим для развития своей теории формальный аксиоматический метод, всегда встают две проблемы: проблема *непротиворечивости*, состоящая в выяснении того, не окажется ли в его формальной теории *слишком много* теорем (настолько много, что они уже начнут противоречить друг другу), и проблема *полноты*, состоящая в выяснении того, можно ли в этой теории получить *достаточно много* теорем (а именно получить в качестве теорем все выразимые в теории содержательно истинные утверждения).

Во введении (стр. 28—30) автор достаточно отчетливо ставит перед собой первую проблему и решает ее, по его словам, „в реалистическом духе". Это решение слагается, во-первых, из надежды, что противоречие в аксиоматической теории множеств не встретится, и, во-вторых, из убеждения, что если оно и встретится, то его можно будет устранить, слегка видоизменив эту теорию. Однако подкрепляющий надежду аргумент не кажется достаточно убедительным. Он состоит в том, что „за 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие“ (введение, стр. 29). Не говоря уже о том, что аксиомы, о которых сказано в этом отрывке, были все же не те, которые положены в основу теории Бурбаки, было бы, конечно, неправильным рассматривать развитие математики после формулирования аксиом теории множеств как процесс извлечения следствий из этих аксиом. Поэтому ссылаться здесь можно не на сорокалетний опыт *математики*, а на сорокалетний опыт *аксиоматической теории множеств*. Впрочем, автор, по-видимому, исходит из того, что все результаты, полученные с тех пор математикой, могли бы быть получены и средствами аксиоматической теории множеств. Может быть, это и так; однако это еще не представляется достаточно очевидным. Строго говоря, нет гарантии даже того, что все теоремы Трактата могут быть доказаны в рамках формализованной теории, описанной в главе I первой книги. „Двусмысленный стиль“, о котором говорилось в предыдущем пункте, таит в себе и известную опасность: становится трудным проследить, возможно ли любое доказательство, встречающееся в Трактате и имеющее внешний вид содержательного рассуждения, воспроизвести формально. Но тут мы сталкиваемся уже с проблемой полноты.

Как показал Гёдель в своей знаменитой *теореме о неполноте*, или *первой теореме*, каждая достаточно сильная непротиворечивая формальная теория неполна, т. е. существует истинное утверждение, выражающееся на языке этой теории, но не доказуемое в ней[1]; критерием силы теории является здесь доказуемость в ней так называемых аксиом арифметики. Аксиомы арифметики доказуемы в аксиоматической теории множеств; следовательно, по теореме Гёделя, аксиоматическая теория множеств, если непротиворечива, то неполна. Итак, мы получили, что существует истинное предложение, выразимое на языке аксиоматической теории множеств, но не доказуемое в ней. Более того, теорема Гёделя дает способ построения такого предложения; относительно этого (теперь уже конкретного) предложения мы можем *установить*, стало быть, что оно истинно содержательно, но не доказуемо формально. Установление истинности какого-либо предложения есть то, что в обычной математике называют *доказательством*; мы имеем, следовательно, пример такого *содержательного доказательства*, которое не может быть проведено *формально* (в рассматриваемой аксиоматической теории, в данном

[1]) На стр. 344 читатель найдет определение полноты (и, следовательно, неполноты), не опирающееся на понятие истины. Оба определения эквивалентны для широкого класса теорий.

случае в теории Бурбаки). Где гарантия, что такие доказательства не встречаются в реальной математической практике (и, быть может, даже где-нибудь в последних книгах трактата Бурбаки)? И не показывает ли все это *принципиальную ограниченность* метода формализации?

Разумеется, построенное истинное, но не доказуемое в данной формальной теории предложение мы можем присоединить в качестве новой аксиомы к исходной системе; но тогда тем же способом получим другое предложение, обладающее теми же свойствами (относительно расширенной системы) и т. д. Во введении автор пишет (стр. 28), что „возможность полной формализации" сохраняется в Трактате „всюду в виду, как некий горизонт". Как видим, это сравнение (во всяком случае, если говорить о всей математике, а не только о Трактате) оказывается более точным, чем, возможно, хотелось бы автору.

Автор не считает нужным хотя бы поставить проблему полноты. Даже в заключительном Историческом очерке, где на стр. 344 приводится теорема Гёделя о неполноте, автор говорит о ней просто как о значительном результате метаматематики, не замечая, или не желая замечать ее самого прямого отношения к применяемому в трактате методу. Можно, конечно, возразить, что автор, по-видимому, и не признает никакого понятия истины, отличного от понятия доказуемости в формальной системе (теорема Гёделя формулируется им без привлечения этого понятия): «Таким образом, „математическая истина" пребывает исключительно в логической дедукции из посылок, устанавливаемых путем произвольного задания аксиом»,—пишет Н. Бурбаки в Историческом очерке (стр. 316—317). Однако становится непонятным тогда, в каком же смысле следует понимать истинность, скажем, утверждений о непротиворечивости и полноте формальных теорий. Такое понимание истины делает Исторический очерк довольно тенденциозным, оставляя его, впрочем, интересным и поучительным.

5. *Некоторые терминологические замечания*

Общая оригинальность Трактата Н. Бурбаки распространяется и на его терминологию, изобилующую специфическими „бурбакизмами". При переводе имелось в виду сохранить характер терминологии, даже там, где ее необычность заходила слишком далеко. Так, например, знак „$\leqslant$" читается у Бурбаки „est plus petit que", что переводится „меньше"; таким образом, фраза „нуль меньше нуля" выражает на языке данного издания истинное суждение.

Характерная для Трактата тенденция к максимальной общности и движению от общего к частному проявляется и в системе терминов и обозначений. Она выражается здесь прежде всего в стремлении к возможно большему объему термина. Автор каждый раз желает рассмотреть как можно более общую ситуацию и именно для нее ввести более короткое название или более простой символ. При переходе же от более общей ситуации к более частной названия и символы соответственно усложняются. Возникающие на этом пути термины и обозначения иногда оказываются расходящимися с принятыми в русской математической литературе, а иногда и просто со словоупотреблением русского языка. Приведем несколько примеров, которые поясняют сказанное и одновременно предостерегут читателя от возможной ошибки, связанной с необычным употреблением знакомых ему слов.

1) *Последовательностью* называется в Трактате (стр. 222, определение 2) не только функция, определенная на *всем* натуральном ряде, но и функция, определенная на произвольной части натурального ряда, — и далее различаются *конечные последовательности* и *бесконечные последовательности.*

2) Аналогично *счетным* называется в Трактате (стр. 227, определение 3) не только множество, равномощное всему натуральному ряду, но и множество, равномощное какой-либо его *части,* — и далее различаются *конечные счетные* множества и *бесконечные счетные* множества.

3) Про структуру $\mathscr{S}_1$ говорится, что она *тоньше* структуры $\mathscr{S}_2$, если существует некоторое естественным образом ассоциируемое с этими структурами отображение. При этом каждая структура оказывается тоньше самой себя. Если структура $\mathscr{S}_1$ тоньше структуры $\mathscr{S}_2$, а структура $\mathscr{S}_2$ не тоньше структуры $\mathscr{S}_1$ (более частная ситуация!), то говорится, что $\mathscr{S}_1$ *строго тоньше,* чем $\mathscr{S}_2$. (См. стр. 257.)

4) Аналогично про теорию $\mathcal{T}'$ говорят, что она *сильнее* теории $\mathcal{T}$, если знаки, явные аксиомы и схемы теории $\mathcal{T}$ выражаются определенным образом в $\mathcal{T}'$ (см. стр. 43); всякая теория оказывается при этом сильнее самой себя. В духе трактата было бы говорить, что теория $\mathcal{T}'$ *строго сильнее,* чем $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T}'$ сильнее $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}$ не сильнее $\mathcal{T}'$.

5) Для обозначения более общей ситуации, при которой множество X есть подмножество множества Y, употребляется *более простой* знак „$\subset$“ и пишется „$X \subset Y$“ (а не „$X \subseteq Y$“, как часто пишут в советской математической литературе); та *более частная* ситуация, когда X есть подмножество множества Y, не совпадающее со всем Y, обозначается более длинно „$X \subset Y$ и $X \neq Y$“ (а не „$X \subset Y$“, как пишут в этом случае в тех системах, где существует знак „$\subseteq$“). (См. стр. 75, определение 1.)

6) Знак нестрогого неравенства „$\leqslant$“ описывает *более общую* ситуацию, нежели знак строгого неравенства „$<$“ (здесь наблюдается отклонение от общего стиля обозначений Бурбаки, согласно которому первый из этих знаков должен был бы иметь более простое начертание, нежели второй), и потому имеет в трактате *более короткое* прочтение: „меньше“ — в то время как второй знак читается „строго меньше“.