С.П. Фиников

Векторный анализ

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.П. Фиников
С11 Векторный анализ / С.П. Фиников – М.: Книга по Требованию, 2016. – 244 с.

ISBN 978-5-458-60520-5

Векторный анализ является математической дисциплиной почти столь же наглядной, как и сама геометрия; в своих определениях и заключениях она непосредственно следует геометрии. В книге излагаются основные сведения из векторной и тензорной алгебры, понятия тензорных полей и тензорный анализ, включающий интегральные теоремы; содержится ряд задач тензорного исчисления в применении к механике сплошных сред и электромагнетизму. Все операции подробно разобраны в ортогональных системах координат и дано обобщение на случай произвольной криволинейной системы координат. Издание второе.

ISBN 978-5-458-60520-5

ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Плоское поле.

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

Векторный анализ в произвольной системе координат.

ПРИЛОЖЕНИЕ III.

Электромагнитное поле.

ВВЕДЕНИЕ.

Основные идеи векторного анализа имеются у двух оригинальных математиков: Грассмана (Grassman, 1809—1877 гг., Штеттин в Германии) и Гамильтона (Hamilton, 1805—1865 гг., Дублин в Ирландии). Грассман выпустил в двух изданиях (1834—1861 гг.) основной труд „Ausdehnungslehre". В первом издании он ограничился только словесным изложением своих принципов без формул; во втором он рассматривает сразу пространство n измерений. Он рассматривает отрезки, т. е. части прямой, „плоские величины", т. е. части плоскости, части пространства (объем) и т. д. Исходя из точки, определяемой n координатами, он последовательно двумя точками определяет отрезок, тремя—часть плоскости и т. д. Он дает своеобразное исчисление отрезков, площадей, объемов.

Основное учение Гамильтона изложено в его „Lectures on Quaternions" (Дублин, 1853 и Лондон, 1866). Он строит комплексное число с четырьмя независимыми единицами. Если откинуть первую действительную часть его как скаляр, то мы будем иметь в нем полное подобие вектора с тремя компонентами. Произведение двух векторных (мнимых) частей комплексного числа будет опять содержать и действительную часть и векторную. Первая составит внутреннее произведение векторов, а вторая—внешнее произведение.

Наконец, у Гамильтона мы встречаем достаточно развитое понятие векторного поля под видом кватерниона как функции точки, и именно ему принадлежит введение оператора „набла" ∇.

Как учение Грассмана, так и гиперкомплексные числа Гамильтона завоевали себе нескольких горячих сторонников, но оставались чужды широким кругам математиков. Введение векторов в обиход науки, несомненно, было вызвано потребностями физики.

В сущности уже Стевин (Stevin) около 1600 г. пользовался изображением сил в виде отрезков, высказывая принцип параллелограма сил. Столетие спустя Ньютон (Newton) в своей второй аксиоме движения, утверждая, что сила и ускорение всегда одинаково направлены, тоже в сущности говорит о векторах. Вся последующая аналитическая механика строится на этом понятии, хотя обычно механики говорят отдельно о трех компонентах вектора.

Развитие в XIX в. учения о потенциале создало целый ряд теорем потенциального поля, но более всего содействовало развитию векторного анализа учение об электричестве и магнетизме. Слово „поле" впервые встречается у В. Томсона (W. Thomson) в учении о магнетизме. Учение Максвелла (Maxwell, „Treatise on

Electricity and Magnetism", 1873) было первой большой теорией, изложенной целиком в векторной форме.

С тех пор элементы векторного анализа нашли себе прочное место в курсах электричества.

Гиббс (I. W. Gibbs, 1881) в Америке, Хивизайд (Heaviside, 1894) в Англии, А. Фёппль (A. Föppl, 1894) в Германии выпускают в разных формах элементы векторной алгебры и анализа в приложениях к своим курсам электричества. Собственно этим авторам мы обязаны тем объединением идей Грассмана, Гамильтона и элементарных физических представлений, из которых сложился векторный анализ.

Внутреннее обоснование понятие вектора получило в теории инвариантов [1], основанной на понятии группы преобразований [Софус Ли (S. Lie) и в особенности Клейн (F. Klein, „Erlangen Programm", 1872)].

XX в. принес новое развитие векторного анализа. Созданное Леви-Чивита (Levi-Civita) и Риччи (Ricci) (в конце прошлого века) абсолютное диференцирование освободило от зависимости от координатной системы; этими идеями воспользовался Эйнштейн (A. Einstein) для развития своего нового представления о мире. Подобно электромагнитной теории Максвелла, теория относительности Эйнштейна потребовала создания нового метода—тензорного анализа, который является далеко идущим обобщением векторного анализа, и еще более, чем знаменитая теория электричества, заставила широкие круги математиков и физиков изучать новый анализ. Это обстоятельство в свою очередь много содействовало распространению метода векторного анализа в тесном смысле слова. Не только специальные теории электричества, но и классическая механика и диференциальная геометрия нередко излагаются теперь с помощью векторов.

---

[1] См. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert, II, стр. 27—49.

I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Глава I. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

§ 1. Векторы и скаляры. Арифметика вводит понятие числа для измерения величин. Длина отрезка, угол, площадь, объем, масса, плотность, температура и т. д. могут быть заданы числом (конечно, при условии, что дана единица измерения). Это число может быть целым, дробным, иррациональным, иногда положительным и отрицательным—вообще это любое действительное число.

Встречается, однако, целый ряд величин, как, например, скорость, ускорение, сила, отдельные значения которых отличаются между собой не только количеством (протяженностью, напряжением), но и направлением в пространстве. Простейшим примером такой величины является отрезок прямой OM, который надо рассматривать как путь, пройденный точкой из точки O в точку M. При этом точка O есть начало, точка M — конец отрезка. Как известно, скорость, сила и т. д. в механике обычно изображаются такими отрезками.

Величины такого рода называются в е к т о р а м и; в противоположность им те величины, которые могут быть определены только одним числом (хотя бы положительным и отрицательным), называются с к а л я р а м и.

Это еще не определение вектора, но мы лучше поймем его, когда дадим условие равенства векторов. В е к т о р ы р а в н ы, е с л и:

1. *Равны их абсолютные величины.* А б с о л ю т н а я в е л и ч и н а, иначе модуль, длина или скаляр вектора есть то число, которое измеряет длину отрезка OM, величину скорости, дает напряжение силы независимо от их направления. Это — скалярная величина, которой иногда удобно бывает приписать положительный или отрицательный знак.

2. *Если они параллельны*, т. е. расположены на параллельных прямых. Векторы можно переносить, сохраняя направление. Поэтому все векторы мы будем считать исходящими из одной точки.

3. *Если они одинаково направлены.* Вектор имеет начало и конец. Переменив их между собой, мы получим уже другой (противоположный) вектор.

Таким образом в понятие вектора входят три момента: скаляр вектора, направление, т. е. прямая, на которой лежит вектор, и смысл движения на этой прямой.

Числовое значение любой скалярной величины можно представить в виде отрезка на прямой линии (на оси). Для этого, как известно, надо выбрать на ней начало, положительное направление и взять определенный масштаб.

Подобно этому всякий вектор может быть представлен в виде отрезка прямой в пространстве. Для этого мы выберем некоторое начало — точку O, будем проводить из этой точки прямые по заданным направлениям и на них откладывать числовые значения векторов в определенном масштабе.

Геометрическое изображение числовых значений скалярной величины настолько распространено, что в современном анализе нередко говорят „дана точка“ вместо того, чтобы сказать „дано числовое значение“. Это замечание еще в большей степени относится к геометрическому представлению векторов. Нередко под словом „вектор“ подразумевают тот отрезок прямой, который служит его изображением. Так как никакого неудобства от этого не произойдет (по крайней мере, во всей первой части курса), то для простоты мы так и будем делать.

Обозначения. К сожалению, в векторном анализе еще не установились единообразные обозначения.

В Германии для обозначения векторов приняты буквы готического алфавита, скаляр вектора обозначается одноименной буквой латинского алфавита. Эти обозначения совершенно не применяются в латинских странах и в Англии. Здесь различные авторы или употребляют для обозначения векторов жирный (черный) шрифт, или ставят над буквой стрелку (например $\vec{A}$). В русской литературе у различных авторов до сего времени встречались все эти обозначения.

С 1 сентября 1931 г. Всесоюзным комитетом по стандартизации при Госплане выделен обязательный стандарт векторных обозначений (ОСТ 2691).

Выбор обозначений еще не представляет больших трудностей при печатании книги: и готический алфавит, и жирный шрифт выглядят достаточно хорошо в наборе. Этого совершенно нельзя сказать относительно рукописного воспроизведения знаков. Между тем, весьма существенно, чтобы читатель мог повторить на бумаге те выкладки, которые приводятся в книге. Ввиду этого мы остановились на обозначении векторов с помощью стрелок над буквами.

Итак, вектор, идущий из точки O в точку M, мы будем обозначать двумя буквами: $\overrightarrow{OM}$ или просто одной буквой, которая стоит в конце вектора; следовательно, мы будем писать:

$$\vec{M} = \overrightarrow{OM}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{Oa} \text{ и т. д.}$$

Если начало вектора не совпадает с выбранным началом O, то во избежание недоразумений в таком случае мы будем всегда употреблять две буквы: $\overrightarrow{AB}$.

Та же буква без стрелки означает скаляр (абсолютную величину, длину) вектора, т. е. M есть скаляр вектора $\vec{M} = \overrightarrow{OM}$.

§ 2. Сложение векторов. Мы переходим теперь к определению основных действий над векторами.

Известные из механики законы сложения направленных величин (скоростей, ускорений, сил) служат основанием следующего определения сложения векторов.

Определение. *Суммой двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называем такой третий вектор $\vec{C}$, который служит диагональю параллелограма, стороны которого суть слагаемые векторы* (черт. 1).

Записываем: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$.

Возможность построения вполне очевидна. В частности, если два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ лежат на одной прямой, то сумма их $\vec{C}$ равна их алгебраической сумме (т. е. сумме или разности в зависимости от того, направлены ли они в одну или в разные стороны) и лежит на той же прямой.

В какой же мере это „сложение“ похоже на обычное сложение? В какой мере оно удовлетворяет основным аксиомам, которые характеризуют сложение чисел?

Для сложения мы имеем два основных закона:

1. Переместительность:

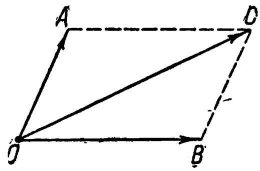
$$a+b=b+a,$$

„сумма не зависит от порядка слагаемых“.

2. Сочетательность:

$$(a+b)+c=a+(b+c),$$

„чтобы прибавить сумму, надо прибавить каждое слагаемое отдельно“.



Черт. 1.

Первая аксиома, очевидно, удовлетворена, это прямо следует из того, что чертеж совершенно симметричен по отношению к векторам — слагаемым:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}.$$

Чтобы перейти ко второму закону (сочетательности), надо остановиться на понятии суммы нескольких слагаемых. Для этого удобнее будет несколько видоизменить самое построение суммы векторов.

Мы условились считать эквивалентными векторы равные и параллельные (одинаково направленные). Следовательно (черт. 1), векторы:

$$\vec{B}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$$

равны между собой, как противоположные стороны параллелограма.

Отсюда следует такое построение суммы:

Правило сложения. *В конце первого слагаемого строим второе слагаемое. Вектор, замыкающий эту ломаную, есть сумма. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом второго.*

Это правило нетрудно теперь будет распространить на любое число слагаемых.

Пусть нам надо найти сумму (черт. 2):

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}.$$

Мы будем под этим подразумевать результат последовательного прибавления сначала $\vec{B}$ и затем $\vec{C}$.

Пусть

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{E},$$

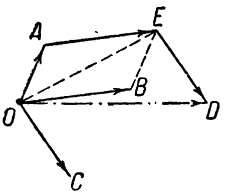
тогда по определению

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{C}.$$

Строим по предыдущему правилу сумму $\vec{A} + \vec{B}$, т. е. в точке A строим вектор $\overrightarrow{AE} = \vec{B}$ и соединяем точку O с точкой E:

$$\overrightarrow{OE} = \vec{E} = \vec{A} + \vec{B}.$$

Затем к полученной сумме прибавляем вектор $\vec{C}$, т. е. в конце ее, в точке E, строим вектор $\overrightarrow{ED} = \vec{C}$ и соединяем точку O с точкой D:



Черт. 2.

Тогда

$$\overrightarrow{OD} = \vec{D} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}.$$

Отсюда следует такое правило:

Чтобы построить сумму любого числа векторов, надо в конце первого слагаемого вектора построить второй, в конце второго — третий и т. д. Вектор, замыкающий полученную ломаную линию, и есть искомая сумма. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец—с концом последнего.

Закон сочетательности для сложения. Мы докажем его для суммы трех векторов. Совершенно так же он доказывается и для суммы любого числа слагаемых.

Итак, нам надо доказать:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}).$$

Здесь скобками указан порядок сложения (как в обыкновенной алгебре).

Строим на одном чертеже (черт. 3) первую и вторую суммы. Даны три вектора:

$$\vec{A} = \overrightarrow{OA},\quad \vec{B} = \overrightarrow{OB},\quad \vec{C} = \overrightarrow{OC}.$$

Первая сумма: в точке A строим $\overrightarrow{AE} = \vec{B}$, и в точке E строим $\overrightarrow{ED} = \vec{C}$.

Вторая сумма: в точке B строим $\overrightarrow{BF}=\vec{C}$, получаем:

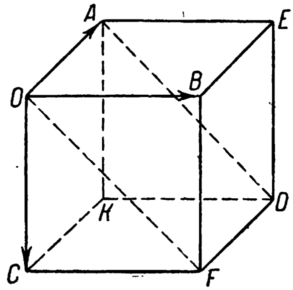
$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}=\vec{B}+\vec{C}.$$

Затем в точке A строим $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{OF}$:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{OD'}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}).$$

Надо показать, что точки D' и D совпадают (как изображено на черт. 3). Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{AD}$ равно и параллельно $\overrightarrow{OF}$. Это можно сделать различными способами. Проще всего, пожалуй, будет заметить, что вся фигура $OAEBCFDK$ есть параллелепипед, где AD и OF — диагонали противоположных граней.

Из той же фигуры параллелепипеда видно, что можно получить тот же вектор суммы $\overrightarrow{OD}$, складывая в произвольном порядке основные векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$.



Черт. 3.

Итак, и переместительный, и сочетательный законы справедливы для суммы любого числа векторов.

По отношению к обычной сумме чисел существуют еще различные законы (монотонности) о сравнительной величине слагаемых и суммы (простейший из них: сумма больше каждого слагаемого). Все эти теоремы не имеют смысла для суммы векторов, ибо понятия „больше“ и „меньше“ неприложимы к векторам.

§ 3. Вычитание векторов. Вычитание обычно определяется как действие, обратное сложению: по сумме и одному из слагаемых ищется другое слагаемое.

Определение. *Разностью двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется такой третий вектор $\vec{C}$, что сумма $\vec{B}$ и $\vec{C}$ равна $\vec{A}$:*

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{C}, \text{ если } \vec{B}+\vec{C}=\vec{A}.$$

Итак, пусть даны векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (черт. 4). Рассматриваем $\vec{A}$ как замыкающую ломаной линии, одним звеном которой является $\vec{B}$. Второе звено ее будет, очевидно, $\overrightarrow{BA}$. Это и будет искомая разность:

$$\vec{A}-\vec{B}=\overrightarrow{BA},$$

ибо

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}=\vec{A}.$$

Это построение можно видоизменить, сделать его более стройным.

Продолжим прямую OB в обратную сторону (за точку O) на отрезок $OB' = OB$. Дополним, с другой стороны, треугольник OAB до параллелограма $OBAC$. Очевидно, вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$ как противоположные стороны параллелограма, и следовательно,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB'}.$$

Точно так же искомая разность

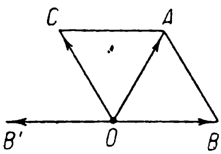
$$\vec{A} - \vec{B} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}.$$

Мы видим теперь, что:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} = \vec{A} + \vec{B'}.$$

Отсюда правило:

Чтобы вычесть вектор $\overrightarrow{OB}$, надо прибавить равный и противоположно направленный вектор $\overrightarrow{OB'}$.



Черт. 4.

Применяя построение суммы к векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB'}$, найдем без труда:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'} = 0,$$

где нулем обозначен особый вектор, у которого начало и конец совпали в точке O. Воспользуемся теперь обычным определением относительных (положительных и отрицательных) величин.

Обозначим:

$$\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}, \text{ если } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'} = 0.$$

При этом условии правило вычитания может быть высказано коротко в обычной для вычитания чисел форме:

Чтобы вычесть вектор, надо прибавить его с обратным знаком.

§ 4. Умножение вектора на скаляр. От сложения нескольких равных векторов не трудно перейти к повторению вектора несколько раз, т. е. к умножению его на целое число.

По определению:

$$n \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot n = \vec{A} + \vec{A} + \vec{A} + \ldots + \vec{A},$$

n — целое число.

Так как все слагаемые параллельны (один и тот же вектор), то все они будут лежать на одной прямой, значит, произведение $n \cdot \vec{A}$ будет иметь то же направление, что и множимое $\vec{A}$, только длина вектора при умножении увеличится в n раз.

Нетрудно теперь ввести понятие деления вектора на целое число.