

Б.А. Введенский

Основы теории распространения радиоволн

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Б11

Б11 **Б.А. Введенский**
Основы теории распространения радиоволн / Б.А. Введенский – М.: Книга по Требованию, 2024. – 229 с.
ISBN 978-5-458-57647-5

ISBN 978-5-458-57647-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
<i>ПРЕДИСЛОВИЕ</i>	3
<i>ВВЕДЕНИЕ</i>	8

I. ВЕКТОР ГЕРЦА.

I. 1. Основные положения	11
I. 2. Основные формулы из общей теории электромагнитного поля . . .	12
I. 3. Интеграция уравнений Максвелла	13
I. 4. Вектор Герца	15
I. 5. Интеграция неоднородного волнового уравнения	17

II. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ДИПОЛЬ В НЕПОГЛОЩАЮЩЕМ ДИЭЛЕКТРИКЕ.

II. 1. Элементарный диполь	24
II. 2. Определение функции Герца из волнового уравнения	27
II. 3. Компоненты векторов поля по координатам	29
II. 4. Компоненты по декартовым координатам	30
II. 5. Сферические компоненты	31
II. 6. Зависимость от времени	32
II. 7. Исследование поля вибратора	34
II. 8. Графическое изображение поля вибратора	39
II. 9. Излучение диполя	40
II. 10. Мгновенные значения вектора Пойтинга	46

III. РАСПРОСТРАНЕНИЕ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ.

III. 1. Элементарный диполь в однородной поглощающей среде	46
III. 2. Выражения компонент векторов поля для поглощающей среды . .	49
III. 3. Поглощение волн	50
III. 4. Численные значения поглощения	52
III. 5. Отражение и преломление плоских волн для поглощающей среды .	53
III. 6. Введение граничных условий	56
III. 7. Коэффициент отражения Френеля при электрическом векторе, параллельном плоскости падения	58
III. 8. Физический смысл коэффициента Френеля. Числовые величины . . .	60
III. 9. Коэффициент Френеля для электрического вектора, нормального к плоскости падения. Числовые величины	61
III. 10. Случай проводимости отличной от нуля	62

IV. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ДИПОЛЬ, ПОДНЯТЫЙ НАД ЗЕМЛЕЙ.

IV. 1. Постановка задачи	64
IV. 2. Введение функции Герца. Граничные условия	—
IV. 3. Приближенное решение для вертикального диполя над землей	65
IV. 4. Общие выражения поля поднятого вертикального диполя	68
IV. 5. Определение компонент поля	69
IV. 6. Сравнение с опытом	74

V. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ДИПОЛЬ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА.

V. 1. Постановка задачи	80
V. 2. Случай Ценнека	81
V. 3. Разбор формул Ценнека	84
V. 4. Решение Зоммерфельда	88
V. 5. Вывод формулы (V. 4. 8)	93
V. 6. Однозначность полученных решений	97

VI. РАССМОТРЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗОММЕРФЕЛЬДА. ПРАКТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ.

VI. 1. Упрощенный вывод фан-дер-Поля	100
VI. 2. Случай $k_2^2 \gg k_1^2$. „Численное расстояние“ ρ	102
VI. 3. Числовые подсчеты	105
VI. 4. Формулы, обобщающие полученный результат	111
VI. 5. Условия применимости упрощенной формулы	113
VI. 6. Сравнение с опытом	115

VII. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РЕШЕНИЯ ЗОММЕРФЕЛЬДА.

VII. 1. Предварительное преобразование основных формул	121
VII. 2. Точки разветвления и полюс	124
VII. 3. Поверхностные волны	126
VII. 4. Пространственные волны	130
VII. 5. Сравнение поверхностных волн с пространственными	133
VII. 6. Представление поля диполя в виде пучка плоских волн	135
VII. 7. Метод Вейля	139
VII. 8. Применение метода Вейля к найденному полю поднятого диполя	143

VIII. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ.

III. 1. Горизонтальный диполь у поверхности земли	148
III. 2. Исследование решения горизонтального диполя	153
III. 3. Горизонтальный диполь, поднятый над землей	157
III. 4. Исследование поля горизонтального диполя	160
III. 5. Поле при скользящем распространении	165
III. 6. Сравнение с опытом	166

IX. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РАМКИ. (МАГНИТНЫЕ ДИПОЛИ.)

IX. 1. Вектор Герца магнитного диполя в непоглощающей среде	173
IX. 2. Формулы для поглощающей среды	175
IX. 3. Излучение магнитного диполя	177
IX. 4. Вертикальный магнитный диполь в плоскости раздела двух сред	178
IX. 5. Горизонтальный магнитный диполь на плоскости раздела	180
IX. 6. Горизонтальная рамка, поднятая над землей	184
IX. 7. Вертикальная рамка, поднятая над землей	185

Х. ДИФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН.

Х. 1. Предварительные замечания	187
Х. 2. Попытки примитивного учета влияния неровностей земной поверхности	189
Х. 3. Строгая постановка задачи для сферической земли	190
Х. 4. Предварительные преобразования	195
Х. 5. Первичное и вторичное излучения	196
Х. 6. Граничные условия задачи и их применение	197
Х. 7. Преобразование ряда в виде интеграла	200
Х. 8. Дифракция на малом расстоянии от передатчика (формула Марха)	205
Х. 9. Дифракция на значительных расстояниях	207
Х. 10. Учет влияния проводимости земли	211
Х. 11. Заключительные замечания и выводы. Влияние препятствий	213

ХІ. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ В РАДИОТЕХНИКЕ.

ХІ. 1. Вывод леммы	217
ХІ. 2. Теорема взаимности для двух электрических диполей	218
ХІ. 3. Примеры	221
ХІ. 4. Вывод формулы (ХІ. 2. 3)	222

<i>ЛИТЕРАТУРА</i>	226
-----------------------------	-----

ВВЕДЕНИЕ.

Задача, которую решает общая радиотехника, может быть сформулирована следующим образом: в некоторой определенной точке поверхности земного шара *A* требуется расположить радиопередающее устройство с таким расчетом, чтобы излучаемые этим устройством радиосигналы четко могли быть восприняты в некоторой другой точке, или ряде точек, *B* с помощью тех или иных приемных приспособлений. При этом кроме выполнения общих требований относительно качества и надежности радиопередачи должны выполняться еще и экономические требования, в виде возможной дешевизны как сооружения всех устройств, так и их эксплуатации, что практически сводится к требованию достижения наибольшей дальности радиопередачи при возможно меньшей затрачиваемой при передаче мощности.

Из всего круга перечисленных вопросов выделяется отдельная задача; ее разрешением занимается тот отдел радиотехники, который обычно носит название „Учения о распространении и излучении электромагнитных волн“, причем подразумеваются, конечно, волны того диапазона, который возможен в радиотехнике, т. е. — беря наиболее широкие пределы — от длины волны в 20—30 км до длины волны в несколько десятков сантиметров. В числах колебаний это соответствует диапазону от $11 \cdot 10^4$ до 10^9 герц, т. е. обнимает более 16 октав. Вопросы же, связанные с устройством радиопередатчиков и питающих их установок, а равно и вопросы устройства приемников, со всем многообразием относящихся сюда задач: генерации нужных частот, модуляции, приема, детектирования, усиления и пр., выделяются в особые отделы.

В результате остается следующая задача: в точке *A* имеется излучающая сеть (отправительная антенна), и в точке *B* — сеть приемная, в которой электромагнитное поле передающей антенны наводит некоторые электродвижущие силы. Требуется выбрать такие условия устройства сетей, питания передающей сети (выбор частоты и силы питающего тока и распределения его по отдельным ветвям сети), чтобы наводимая в приемной сети электродвижущая сила давала между двумя присоединяемыми к приемнику точками необходимое для хорошего приема напряжение. При этом из ряда возможных решений наилучшим будет, конечно, наиболее экономное.

Очевидно, что для решения такой задачи требуется прежде всего знать, как влияют все существенные условия на процесс распространения электромагнитной волны. Рассмотрение свойств приемной сети оказывается возможным выделить и удовольствоваться на первых порах определением величины напряженности электромагнитного поля в точке приема, ибо знание этой напряженности уже позволит вычислить распределение напря-

жения. Далее передающую антенну можно разбить на весьма малые элементы—элементарные диполи—и начать с рассмотрения поля, создаваемого таким отдельным диполем. Поле реальной передающей сети можно (по крайней мере принципиально), далее, подсчитать как результат суперпозиции полей отдельных диполей. В значительном же числе случаев реальную антенну на достаточном расстоянии от нее можно просто рассматривать как элементарный диполь, в случае надобности снабженный характеристикой направленности.

В результате изучение сетей выделяется особо. Однако и остающаяся задача определения поля, создаваемого элементарным диполем, остается достаточно сложной и даже неразрешимой без определенных упрощений. Это станет ясно, если мы только примем во внимание чрезвычайное разнообразие условий, в которых в действительности могут оказаться передающий диполь и „точка приема“. Действительно, устройство земной поверхности как в месте расположения самих рассматриваемых точек, так и на всем протяжении между этими точками может быть самым разнообразным, и опыт показывает, что это разнообразие не может не сказаться на передаче. Местность может быть ровной или пересеченной (гористой), лесистой или покрытой травой, открытой или застроенной, или же может быть покрытой водой. Кроме того, оказывается крайне существенным—в особенности при передаче на коротких волнах—состояние верхних (порядка нескольких сотен километров) слоев атмосферы; именно: имеется в виду электрическое состояние этих слоев, обусловленное ионизацией. Так как последняя обусловлена по всем данным радиацией солнца, то степень освещенности пути, по которому движется радиоволна, должна оказывать и оказывает на радиопередачу весьма сильное влияние. Таким образом получается зависимость от времени суток и года. К факторам, влияющим на радиопередачу, следует причислить еще все причины, обуславливающие пертурбации геомагнитного характера, а также и степень гравитационного воздействия солнца и луны, равно и затмения этих светил. Наконец, за последнее время начинает крепнуть убеждение, что и состояние нижних слоев атмосферы не остается без влияния на передачу.

Этот схематический перечень выявляет большую сложность и многогранность казалось бы узкой задачи. Однако, грубо говоря, передача на сравнительно близких (примерно до 300 км) расстояниях и на не слишком коротких волнах практически не зависит от состояния атмосферы. Такая радиопередача осуществляется волнами („лучами“), распространяющимися в нижних слоях, где ионизация обычно не влияет. Это так называемая область передачи „прямым“ (direct) лучом; здесь главную роль играют свойства почвы. Термин „прямой луч“ следует понимать как „непреломленный луч“, в отличие от преломленного в верхних слоях атмосферы луча, которым осуществляется передача на далекие расстояния. Таким образом задача делится еще на две части: передачу прямым лучом и передачу преломленным лучом. Такое подразделение оказывается вполне разумным и естественным ввиду различия методики рассуждений: в первой части на первый план выдвигаются методы математической физики; эта часть есть в сущности глава „Теории электромагнитного поля“; во второй части главную роль играет физика ионизированного газа и геофизика. Связь с теорией электромагнитного поля здесь уже менее тесна, хотя, конечно, полная преемственность методов остается и здесь.

Настоящую книгу пришлось посвятить одной лишь первой части. Здесь приходится делать два главнейших допущения. Ввиду полной невозможности провести до конца математический учет всего многообразия видов „почвы“ приходится характеризовать ее двумя коэффициентами: диэлектрическим и проводимости и считать земную поверхность ровной. Опыт показывает, что такой взгляд, вполне допустимый для передачи над морем, приводит к достаточно правильным выводам и в случае передачи над сушей, если применяемая волна не слишком коротка.

I. ВЕКТОР ГЕРЦА.

I. 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. Излагаемая ниже теория представляет собою по существу не что иное, как дальнейшее развитие положений, объединяемых в учении об электромагнитном поле. В сущности главной особенностью приводимых в этой книге выводов является то, что принято во внимание наличие в пространстве, в котором распространяется электромагнитное возмущение, плоскостей или вообще *поверхностей раздела*. Эти поверхности отделяют одну часть пространства с определенными значениями „электрических параметров“ среды, т. е. диэлектрического коэффициента ϵ и электропроводности σ , от другой части пространства, где значения этих параметров иные. Практически первой средой является воздух, второй — толща земного шара, заполненная „почвой“ или же покрытая водой (обычно — морской). Присутствие таких поверхностей раздела влечет за собой, даже в простейшем мыслимом случае, когда поверхность раздела представляет собой безграничную плоскость, весьма большое усложнение всех вычислений.

При решении возникающих здесь задач весьма большое упрощение достигается введением особой функции — мы будем обозначать ее через Z , — зависящей от пространственных координат и от времени, которую впервые ввел Герц [1] при решении задачи о колебаниях элементарного диполя. Абрагам [2] обобщил эту функцию, введя вместо первоначальной скалярной величины особый вектор — мы будем обозначать его через $\vec{Z}$, — названный им *вектором Герца*. Первоначальная функция Герца является одной из прямоугольных декартовых компонент вектора Герца. Этот вектор, имея размерность количества электричества, обладает математическими свойствами потенциала, т. е. векторы напряженностей электрического и магнитного полей получаются из него путем сравнительно несложного, а главное единообразного во всех случаях дифференцирования по координатам пространства или по времени. И подобно тому как задачи электростатики чрезвычайно облегчаются введением обычного скалярного потенциала, а в большом числе случаев и вовсе не могут быть решены без помощи этого потенциала, так и разбираемые ниже проблемы вряд ли получили бы, в громадном своем большинстве, разрешение без введения вектора Герца.

В противоположность обычному потенциалу вектор Герца не обладает наглядным и простым физическим смыслом, и нередко приходится наблюдать, как это обстоятельство препятствует внедрению методики вычислений с помощью этого вектора в расчеты практиков. Однако, как увидим ниже, в большом числе случаев соответствующие напряженности поля с достаточным приближением оказываются просто пропорциональными величине вектора Герца.

Понятие о векторе Герца вводится уже в общие курсы „Теории электромагнитного поля“, как это, например, имеет место в известных книгах проф. И. Е. Тамма [3] или М. Абрагама [2]. Считая, что читатель знаком с вопросом примерно в объеме первой из этих книг, мы, однако, посвящаем

две первые главы вопросам из общего курса „Теории электромагнитного поля“; делается это частью в целях связности изложения, частью же потому, что некоторые из приводимых ниже формул имеют несколько специфический вид (чем достигается более близкое соответствие с дальнейшим изложением) и, наконец, еще потому, что некоторые, существенные с нашей точки зрения, обстоятельства обычно не освещаются в книгах общего характера.

1. 2. **ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.** Мы будем исходить из уравнений электромагнитного поля Максвелла в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{i} &= \text{rot } \bar{H}, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} &= -\text{rot } \bar{E}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \bar{E} &= \frac{4\pi\rho}{\epsilon}, \\ \text{div } \bar{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

Здесь мы считаем диэлектрический коэффициент ϵ постоянным, т. е. не зависящим ни от координат пространства ни от времени, а магнитную проницаемость μ мы положили равной единице. Величины ϵ , σ , ρ , $\bar{E}$, $\bar{i}$ выражаем в электростатических единицах (*CGSE*), а величину $\bar{H}$ — в электромагнитных единицах (*CGSM*).

Вектор $\bar{i}$ есть вектор плотности тока переноса (конвекции), причем $\bar{i} = \rho \bar{u}$, где ρ есть объемная плотность электричества, а $\bar{u}$ — вектор скорости переноса электрических зарядов. В случае наличия в данной среде „металлической“ („омической“) проводимости σ имеем: $\bar{i} = \sigma \bar{E}$, где $\bar{E}$ есть напряженность поля; при отсутствии такой проводимости мы должны вернуться к первоначальному определению.

Объемная плотность электромагнитной энергии W выражается формулой:

$$W = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + H^2). \quad (1.2.3)$$

Задавая ϵ и E в *CGSE* и H в *CGSM*, получаем плотность энергии в эргах на 1 см^3 .

Следствием приведенных уравнений является выражение вектора Пойнтинга $\bar{P}$, определяющего количество электромагнитной энергии, протекающей в 1 сек. сквозь площадку в 1 см^2 , перпендикулярную направлению движения энергии:

$$\bar{P} = \frac{c}{4\pi} [\bar{E} \bar{H}] \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}. \quad (1.2.4)$$

Так как для вакуума (а также с большим приближением и для воздуха, где $\epsilon = 1,00059$) имеем $H = E$, то для вакуума или воздуха

$$P = \frac{c}{4\pi} \cdot E^2 \cdot \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}.$$

Практическими единицами напряженности поля E являются вольт/см или $\mu\text{V}/\text{см}$ ($1 \text{ вольт} = 10^6 \mu\text{V}$); тогда имеем для абсолютной величины P :

$$P = \frac{10^6 E^2 \text{ вольт/см}}{12\pi} \cdot \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}} = \frac{E^2 \text{ вольт/см}}{120\pi} \cdot \frac{\text{ватт}}{\text{см}^2} = \frac{E^2 \text{ вольт/м}}{120\pi} \cdot \frac{\text{ватт}}{\text{м}^2},$$

или также:

$$P = \frac{E^2 \frac{\mu\text{V}}{\text{м}}}{12\pi \cdot 10^{13}} \frac{\text{ватт}}{\text{м}^2}.$$

Таким образом даже при хорошем приеме в $100 \frac{\mu\text{V}}{\text{м}} = 10^{-4} \text{ вольт/м}$ имеем поток энергии порядка всего $3 \cdot 10^{-11}$ ватта сквозь 1 м^2 . Отсюда видна между прочим необычайная чувствительность современных приемников.

1. 3. ИНТЕГРАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА. В электростатике мы имеем для статического потенциала $\varphi_{\text{ст}}$:

$$\bar{E} = -\text{grad } \varphi_{\text{ст}}, \quad (1.3.1)$$

где потенциал $\varphi_{\text{ст}}$:

$$\varphi_{\text{ст}} = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho(x, y, z)}{r} dv, \quad (1.3.2)$$

причем

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

есть расстояние от точки (x, y, z) , в которой имеет место плотность электричества ρ , до точки (x_0, y_0, z_0) , для которой подсчитывается φ . При этом интеграл распространяется на весь объем v .

Для токов проводимости аналогично выводится:

$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A}_{\text{ст}}, \quad (1.3.3)$$

где $\bar{i}$ — плотность тока и $A_{\text{ст}}$ есть вектор-потенциал токов, равный

$$A_{\text{ст}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{i}(x, y, z)}{r} dv, \quad (1.3.4)$$

Для полей электродинамических также можно ввести функции, аналогичные $\varphi_{\text{ст}}$ и $\bar{A}_{\text{ст}}$ (их обозначим через φ и A) и переходящие в частном случае в $\varphi_{\text{ст}}$ и $\bar{A}_{\text{ст}}$. Эти функции определяются следующим образом.

Второе уравнение (1.2.2) показывает, что $\bar{H}$ есть соленоидальный вектор; поэтому мы можем положить:

$$\bar{H} = \text{rot } \bar{A}, \quad (1.3.5)$$

что после подстановки во второе из уравнений (1.2.1) дает:

$$\text{rot} \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{E} \right] = 0,$$

ибо дифференцирование по x, y, z , с одной стороны, и по t — с другой, можно менять местами. (Это возможно, если $\bar{A}$ имеет смешанные произ-

водные второго порядка по x, y, z и t .) Поэтому вектор в прямых скобках есть потенциальный вектор, и мы полагаем (по аналогии с φ_{em} электростатики):

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.3.6)$$

Возьмем теперь первое из уравнений (1.2.1) и, подставив в него $\bar{E}$ из (6) и H из (5)*, получим:

$$-\frac{\epsilon}{c} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \bar{i} = \text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A},$$

или

$$\text{grad} \left[\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \bar{A} \right] + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \bar{A} = \frac{4\pi}{c} \bar{i}. \quad (1.3.7)$$

Далее подставим $\bar{E}$ из (6) в первое из уравнений (1.2.2):

$$-\text{div} \left[\text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right] = -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \bar{A} = \frac{4\pi \rho}{\epsilon}. \quad (1.3.8)$$

Вводимые (но еще не вполне определенные) φ и $\bar{A}$ должны *любым* способом (в этом отношении мы свободны) удовлетворить системе уравнений (7) и (8); мы наложим поэтому добавочное условие:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \bar{A} = 0; \quad (1.3.9)$$

тогда (7) примет вид:

$$\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \bar{A} = \frac{4\pi}{c} \bar{i}; \quad (1.3.10)$$

в уравнение (8) вводим $\text{div } \bar{A}$ из (9) и получаем:

$$\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \frac{4\pi \rho}{\epsilon}. \quad (1.3.11)$$

Таким образом задача интегрирования уравнений (1.2.1) сводится к интегрированию уравнений (10) и (11), которые оба принадлежат к одному и тому же типу так называемого неоднородного волнового уравнения. (Обычно только считают $\epsilon = 1$; к соответствующему виду волновое уравнение всегда можно привести, введя вместо t новую переменную $t' = \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}$. Таким образом введение $\epsilon \neq 1$ ни в какой мере не имеет принципиального значения и обычно не производится. Мы вводим это небольшое усложнение в целях более тесной связи с дальнейшими выкладками.) Волновое уравнение принадлежит к достаточно хорошо изученному типу дифференциальных уравнений с частными производными.

* В тех случаях, когда делаются ссылки на предыдущие уравнения того же параграфа, мы будем указывать лишь номер уравнения, без указания параграфа и главы, как это сделано в данном случае.