Х. Никайдо

Выпуклые структуры и математическая экономика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Х11

Х. Никайдо

Х11 Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо – М.: Книга по Требованию, 2021. – 517 с.

ISBN 978-5-458-34573-6

В книге дано систематическое и углубленное изложение основ теории выпуклых множеств и ее приложений к математической экономике. Центральное место уделено обсуждению статических и динамических свойств экономических моделей, вопросам существования, единственности, оптимальности и устойчивости решений. Наряду с классическими приводятся результаты, полученные в последнее время и не опубликованные в монографической литературе, такие, как «теоремы о магистрали», нелинейные модели сбалансированного роста, теоремы о теоретико-игровой интерпретации экономического равновесия.Книга написана на высоком научном уровне и отличается продуманностью и ясностью изложения необходимые для чтения математические сведения собраны в отдельной главе. Все это делает книгу полезной и специалисту, желающему получить квалифицированный обзор по современной математической экономике, и студенту, приступающему к серьезному изучению предмета.

ISBN 978-5-458-34573-6

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В последние десятилетия происходит интенсивное внедрение математических методов в экономическую науку. Бо́льшое количество полученных при этом результатов и их внутреннее единство позволяет говорить о создании новой области прикладной математики — математической экономики.

Математическая экономика, в том виде как она сложилась к настоящему времени, может быть условно разделена на три достаточно независимые части: 1) методы постановки и численного решения прикладных экономических задач, таких, как составление реальных планов отдельного предприятия, отрасли, совокупности отраслей и т. п.; 2) макроэкономические модели экономики, описывающие динамические процессы во всем народном хозяйстве в агрегированных показателях типа «национальный доход», «суммарное потребление», «суммарные инвестиции», «темп роста национального дохода» и т. п., и 3) микроэкономические модели экономики, рассматривающие экономику как систему, состоящую из многих элементов, потребляющих и производящих продукты.

Книга Х. Никайдо целиком посвящена микроэкономическим моделям. Назначение этих моделей заключается не в получении каких-либо конкретных числовых данных, которые могли бы быть положены в основу управляющих экономических решений, а в выяснении возможностей согласованного функционирования большого числа экономических единиц и в описании качественных свойств тех или иных из этих возможностей. В этой области уже собрано большое число глубоких содержательных фактов. Так, удалось на модельном уровне объяснить роль денежного механизма в процессе согласования деятельности отдельных экономических единиц, выработать понятие экономического равновесия и установить его свойства, формализовать представления о «рациональном» выборе потребителем того или иного набора благ, выяснить свойства наиболее эффективных траекторий развития экономики и т. п.

Замечательной особенностью микроэкономических моделей является то, что почти все они опираются на некоторый единый комплекс математических фактов, связанных с теорией выпуклых множеств и преобразований, заданных на этих множествах. Именно это обстоятельство и позволяет говорить о теории микроэкономических моделей как о математической теории.

Для советского читателя предлагаемая монография представляет интерес в двух отношениях. Во-первых, в этой монографии собраны существенные результаты теории микроэкономических моделей, ряд из которых ранее на русском языке вообще не публиковался, а во-вторых, в ней четко очерчен тот круг математических фактов, который служит фундаментом для всех рассмотренных экономико-математических построений.

Автор книги, Х. Никайдо, является одним из наиболее активно работающих в области математической экономики математиков. Это обстоятельство определило высокий научный уровень книги, и подготовленный читатель несомненно оценит разработанность и почти исчерпывающую законченность практически всех тем, затронутых в этой книге.

Следует остановиться на трактовке в книге одного из центральных для микроэкономических моделей понятия экономического равновесия. Исходя из традиционных представлений, автор трактует это понятие как конкурентное равновесие, т. е. равновесие, к которому должна приходить совокупность экономических самодеятельных единиц в процессе рыночной конкуренции. Заметим, что такая трактовка понятия экономического равновесия необязательна.

Смысл понятия экономического равновесия сводится к тому, что можно установить такие «равновесные» цены на продукты, что если каждый производитель и каждый потребитель будут выбирать свое поведение с учетом этих цен, то в целом функционирование всех элементов экономики будет согласованным, т. е. каждый элемент найдет сбыт для произведенной им продукции и каждый элемент сможет приобрести необходимый ему продукт. Этот фундаментальный факт не зависит от того, устанавливаются ли цены автоматически в результате действия рыночного механизма или эти цены декретируются некоторым центральным управляющим органом. Именно поэтому понятие экономического равновесия не следует связывать лишь с конкурентной экономикой, и при решении тех или иных задач в условиях плановой социалистической экономики понятие экономического равновесия может играть существенную конструктивную роль.

Можно было бы прокомментировать и ряд других понятий и терминов, все еще не вполне однозначно употребляемых в экономической и экономико-математической литературе. Однако всякий раз точный смысл используемых понятий может быть понят из контекста; как правило, для этого оказывается достаточно четких, хотя почти всегда лаконичных, пояснений автора (лишь в самых необходимых случаях при переводе были даны примечания). Ряд неточностей и опечаток оригинала исправлен без специальных оговорок.

Монография Х. Никайдо вместе с ранее переведенными книгами Д. Гейла (Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963) и С. Карлина (Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964) дает хорошее представление о современном состоянии математической экономики и помогает, хотя бы частично, удовлетворить тот растущий интерес к экономико-математической теории, который наблюдается в настоящее время у математиков, экономистов и специалистов по теории управления.

Э. М. Браверман

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные математические методы, и в особенности те из них, которые опираются на понятие выпуклости, играют существенную роль при исследовании многих важных проблем экономики, а также в ряде смежных областей знания. Признание этого факта вызвало все усиливающуюся тенденцию к овладению математическими методами, которая распространяется наравне с увлечением так называемой «новой математикой». Данная книга, написанная, как надеется автор, в соответствии с такой тенденцией, предназначается тем, кто хочет составить представление об основных идеях, методах и результатах современного математического направления в экономической теории, детально ознакомившись с рядом типичных и поучительных задач. Книга будет понятна читателям, владеющим основами анализа и матричного исчисления и знакомым с элементарными топологическими понятиями применительно к евклидовым пространствам; никаких предварительных экономических познаний по существу не требуется. В то же время в намерения автора входило собрать в книге материал, который был бы интересен более подготовленным читателям, уже имевшим дело с задачами математической экономики и родственными вопросами. Хотелось бы надеяться, что простота и рациональность математического языка книги смогут побудить и опытных исследователей, ранее не интересовавшихся экономической тематикой, к более тесному знакомству с существующими проблемами математической экономики. При всем этом книга ни в коем случае не претендует ни на роль трактата по экономической теории, ни на роль исчерпывающего справочника по математической экономике.

Вошедший в книгу материал охватывает основы теории выпуклых множеств и ее приложения к некоторым важным задачам, возникающим в математической экономике и смежных областях. Типичными примерами могут служить задачи, связанные с изучением статических и динамических свойств линейных и нелинейных экономических систем, в частности, моделей Леонтьева, фон Неймана, Вальраса и др. Обсуждаемые при этом вопросы можно охарактеризовать как вопросы существования, оптимальности, устойчивости и единственности решений соответствующих уравнений или неравенств. Подробное перечисление рассматриваемых в книге проблем с указанием их расположения по главам приводится далее во введении.

На протяжении всей книги ее параграфы снабжены сквозной нумерацией (арабскими цифрами со значком §). Так, § $\alpha.\beta$ обозначает раздел β в параграфе α; теорема $\alpha.\beta$ — это теорема β из § α. Если теорема $\alpha.\beta$ состоит из нескольких утверждений, отмеченных номерами (i), (ii), . . ., то ссылка на утверждение (i) в теореме $\alpha.\beta$ дается как ссылка на теорему $\alpha.\beta$ (i). Подобное же правило относится вообще ко всем ссылкам в книге.

При написании книги неоднократно приходилось обращаться к работам, указанным в библиографическом списке. Настоящая книга включает также в переработанном и дополненном виде некоторые статьи автора [1, 3, 4, 8—11] и его совместную статью с Д. Гейлом (Гейл, Никайдо [1]); своему соавтору, а также редакциям изданий *Kodai Mathematical Seminar Reports*, *Metroeconomica*, *Review of Economic Studies*, *Econometrica*, *Annals of Mathematics Studies* и *Mathematische Annalen*, в которых эти статьи были впервые опубликованы, автор благодарен за любезное сотрудничество. Он особенно признателен Дж. С. Чипману и К. Инаде за разрешение включить

в гл. VII их некоторые тогда еще не опубликованные результаты (Чипман [1], Инада [2]). Автор весьма обязан издателям его предыдущих двух книг (на японском языке) «Математические методы в современной экономике», Токио, 1960 г., и «Линейная математика для экономистов», Токио, 1961 г., которые послужили одним из источников материала для настоящей книги.

Хочется также поблагодарить коллег и друзей, проявивших интерес к этой книге. Особо нужно отметить Х. Ацуми, Д. Гейла, К. Инаду, Д. У. Кацнера, Х. Кумагаи, М. Моришиму, Т. Негиси и Т. Ясуи за ценные замечания. Автор выражает также свою признательность К. Дж. Эрроу, Л. У. Маккензи, П. Э. Самуэльсону, Л. С. Шепли, Х. Уцаве и др. за полезное обсуждение некоторых проблем, затронутых в книге. Автор крайне признателен Р. Беллману, предложившему написать эту книгу и поощрявшему автора на протяжении всей работы над рукописью, а также С. Иянаге, своему учителю.

Хукукане Никайдо

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x \in A$	x принадлежит A,
$x \notin A$	x не принадлежит A,
$A \subset B$	A включено в B (теоретико-множественное включение),
$A \not\subset B$	A не включено в B,
$A \subsetneqq B$	$A \subset B$, но $A \neq B$ (собственное теоретико-множественное включение),
$\{x \mid P\}$	множество всех элементов x, обладающих свойством P,
$\varnothing$	пустое множество,
$\{a\}$	множество, состоящее из единственного элемента a,
$A \cup B \cup C \ldots$	теоретико-множественное объединение множеств A, B, C, ...,
$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$	теоретико-множественное объединение множеств A_λ по индексу $\lambda \in \Lambda$,
$A \cap B \cap C \ldots$	теоретико-множественное пересечение множеств A, B, C, ...,
$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$	теоретико-множественное пересечение множеств A_λ по индексу $\lambda \in \Lambda$,
$A \setminus B$	теоретико-множественная разность, т. е. множество $\{x \mid x \in A, x \notin B\}$,
A^c	теоретико-множественное дополнение множества A,
$A \times B \times C \ldots$	декартово произведение множеств A, B, C, ...,
$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$	декартово произведение множеств A_λ по индексу $\lambda \in \Lambda$,
$\overline{A}$	замыкание множества A,
A^0	внутренность множества A,

A^b	граница множества A, т. е. множество $\bar{A} \cap \overline{A^c}$,
$C(A)$	выпуклая оболочка множества A,
$f\colon X \to Y$	(однозначное) отображение из X в Y,
$f\colon X \to 2^Y$	многозначное отображение из X в Y,
gf	композиция (произведение) двух отображений f и g, где g следует за f,
f^{-1}	отображение, обратное отображению f,
$f \times g \times h \times \ldots$	декартово произведение отображений $f, g, h, \ldots$,
$f(A)$	образ множества A при отображении f,
$f^{-1}(B)$	прообраз множества B при отображении f,
R^n	n-мерное (вещественное) евклидово пространство,
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	скалярное произведение векторов $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$,
$\lVert x \rVert = \langle x, x\rangle^{1/2}$	евклидова норма вектора x,
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	вектор-строка,
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$	вектор-столбец,
$P_n = \{p \mid p=(p_i), \sum p_i = 1, p_i \geqslant 0\ (i = 1, \ldots, n)\}$	стандартный симплекс
$S_n(a, \delta) = \{x \mid \lVert x-a \rVert = \delta\}$	$(n-1)$-сфера радиуса δ с центром в a,
$C_n(a,\delta) = \{x \mid \lVert x-a \rVert \leqslant \delta\}$	n-шар радиуса δ с центром в a,
S_n	краткое обозначение единичной $(n-1)$-сферы $S_n(0, 1)$,
C_n	краткое обозначение единичного n-шара $C_n(0, 1)$,
$\operatorname{dis}(a, b)$	расстояние между двумя точками a и b,
$\operatorname{dis}(a, A) = \inf\limits_{x \in A} \operatorname{dis}(a, x)$	расстояние между точкой a и множеством A,
$U(a,\varepsilon) = \{x \mid \lVert x-a \rVert < \varepsilon\}$ или $\{x \mid \operatorname{dis}(x, a) < \varepsilon\}$,	ε-окрестность точки a,
$\{x^\nu\}$	последовательность точек x^ν,
$\{\lambda_\nu\}$	последовательность чисел λ_ν,

$\lim\limits_{\nu\to+\infty} x^\nu$	предел последовательности $\{x^\nu\}$,
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	предел функции (или отображения) $f(x)$ при x, стремящемся к a,
$x\to a+0 \quad (x\to a-0)$	сходимость x к a справа (слева),
$\limsup\limits_{\nu\to+\infty} \lambda_\nu$	верхний предел последовательности $\{\lambda_\nu\}$ вещественных чисел,
$\liminf\limits_{\nu\to+\infty} \lambda_\nu$	нижний предел последовательности $\{\lambda_\nu\}$ вещественных чисел,
$\limsup\limits_{x\to a} f(x)$	верхний предел вещественной функции $f(x)$ при x, стремящемся к a,
$\liminf\limits_{x\to a} f(x)$	нижний предел вещественной функции $f(x)$ при x, стремящемся к a,
$\sup$	точная верхняя грань,
$\inf$	точная нижняя грань,
A'	транспозиция матрицы A,
$\mid A \mid$, $\det A$	определитель квадратной матрицы A,
$\Vert A \Vert = (\sum\limits_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2)^{1/2}$	евклидова норма $(n\times n)$-матрицы A,
$r(A)$	ранг матрицы A,
$x \geqq y$	полуупорядочение в R^n, означающее $x_i \geqslant y_i$ $(i=1,\ldots,n)$ для $x=(x_i)$ и $y=(y_i)$,
$x \geq y$	означает, что $x \geqq y$, $x \neq y$,
$x > y$	означает, что $x_i > y_i$ $(i=1,\ldots,n)$ для $x=(x_i)$ и $y=(y_i)$,
$x \succsim y$	x не менее предпочтителен, чем y (отношение предпочтения),
$x \succ y$	x предпочтительнее y (отношение строгого предпочтения),
$\sim$	отношение эквивалентности, в частности, отношение безразличия (т. е. $\succsim$ и $\precsim$ одновременно); гомотопия отображений,
$[a, b]$	замкнутый интервал с концами a, b на вещественной оси или отрезок с концами a, b в R^n,
$[a, b)$	означает $[a, b] \setminus \{b\}$,

$(a,\ b]$	означает $[a,\ b] \setminus \{a\}$,
$(a,\ b)$	означает $[a,\ b] \setminus (\{a\} \cup \{b\})$,
$\mathrm{Re}\,(\alpha)$	вещественная часть комплексного числа α,
$\mathrm{Im}\,(\alpha)$	мнимая часть комплексного числа α,
$\Delta_i p = (0, \ldots, 0, \Delta p_i, 0, \ldots, 0)$	частное приращение i-й компоненты вектора p.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В экономической теории на первоначальном этапе ее развития редко использовались математические формулировки. Тем не менее многие классические доктрины экономики в словесной, завуалированной форме по существу содержали определенные математические утверждения; это иногда оставалось скрытым и от самих приверженцев таких доктрин. По мере развития экономической науки внутренне присущие ей математические черты постепенно проявлялись все сильнее. На более поздней стадии ее истории некоторые экономисты стали предлагать даже полную математизацию экономической теории. По-видимому, самым выдающимся представителем зарождавшегося математического направления в экономической теории был французский экономист Леон Вальрас. Именно он в конце XIX столетия заложил основы теории общего экономического равновесия (Вальрас [1]). Эта теория основана на том, что между соответствующими величинами в экономике существует не односторонняя причинно-следственная связь, а многосторонняя взаимозависимость, которую математически можно представить некоторой системой соотношений между этими величинами. *Исследования Вальраса остаются блестящим примером математического подхода к экономическим явлениям.* Большой его заслугой является ныне общепризнанная идея о возможности функционального описания экономических явлений системами уравнений, неравенств или и тех и других вместе.

Исследования Вальраса, будучи сами по себе весьма продуктивными, тем не менее указали лишь направление для дальнейших работ. С точки зрения современной математики результатом исследований самого Вальраса является установление некоторых систем соотношений, описывающих экономическую действительность. Он не дал ни удовлетворительного доказательства существования решений этих систем, ни математического обоснования других своих утверждений. Причину этого следует искать не только в элементарности его математического аппарата, но и в недостаточном общем развитии в прошлом веке некоторых областей математики, особенно топологии. Лишь в 50-х годах нашего столетия стало возможно обосновать существование решений, а также исследовать другие важные свойства систем Вальраса. Это только один из многочисленных примеров достижений экономической теории за последние десятилетия, обусловленных общим прогрессом математических наук. Отличительная черта этих новых достижений состоит в применении эффективных теоретических методов исследования, что резко контрастирует с духом механических вычислений, свойственных работам экономистов-математиков предшествовавших времен. Можно считать, что эти достижения ознаменовали рождение современной математической школы в экономической теории.

§ 2. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Исследователи, рассматривающие экономику как систему взаимосвязанных величин, подобно физикам, изучающим механические или электромагнитные системы, изучают как статические, так и динамические свойства этой системы: экономистов интересуют структурные характеристики экономики, с одной стороны, и ее эволюционные особенности, такие, как колебания и рост,— с другой.

Экономист строит математическую модель экономической системы в более или менее агрегированной форме, выбор которой зависит от основной цели его исследования. Желая получить грубую картину экономики в самых общих ее чертах, он обращается к предельно агрегированной модели, связывающей простыми соотношениями такие агрегированные, укрупненные величины, как национальный доход, общий уровень цен и т. п. Если же он хочет оперировать более тонкими структурными характеристиками экономической системы, то и соответствующая модель выбирается более детальной, дезагрегированной. На таком детальном уровне анализа, примером которого может служить подход Вальраса, экономика сводится к гигантской системе соотношений между громадным числом величин. Эти величины соответствуют «атомарным» составляющим системы: отдельным потребителям и производителям, отдельным работникам и предпринимателям. Экономическая теория, излагаемая в терминах агрегированных величин, носит название *макротеории*, а подход, связанный с явным исследованием поведения индивидуальных компонентов системы в дезагрегированном виде, принято относить к *микротеории*. Все это многообразие экономических моделей может служить сферой применения современных математических методов.

В математическом подходе к экономическим явлениям наблюдается определенный методологический дуализм. У одного направления группируются исследователи, называемые *математиками-экономистами*, которые занимаются математическим (не обязательно численным) анализом детерминированных, нестохастических