

Н.А. Умов

**Уравнения движения энергии
в телах**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Н11

Н11 **Н.А. Умов**
Уравнения движения энергии в телах / Н.А. Умов – М.: Книга по Требованию,
2021. – 58 с.

ISBN 978-5-458-57519-5

ISBN 978-5-458-57519-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

сохраненія настолько мы имѣемъ право уподоблять движеніе энергіи движенію подвижнаго и сжимаемаго вещества.

Количество энергіи въ элементѣ объема среды, отнесенное къ единицѣ объема, можетъ быть названо плотностью энергіи въ данной точкѣ среды.

Мы можемъ слѣдить за измѣненіями происходящими въ количествѣ энергіи и ея скоростяхъ въ одной и той же точкѣ пространства или же въ одномъ и томъ же движущемся количествѣ (массѣ) энергіи.

Означимъ буквой Θ плотность энергіи въ произвольной точкѣ среды т. е. частное изъ количества энергіи, заключеннаго внутри безконечно малаго элемента объема на этотъ элементъ. Назовемъ черезъ l_x , l_y , l_z слагающія по прямоугольнымъ осямъ координатъ x , y и z , скорости, съ которою энергія движется въ разсматриваемой точкѣ среды.

Вообразимъ себѣ элементъ объема $dx dy dz$. При введенныхъ нами обозначеніяхъ количества энергіи входящія и выходящія черезъ различныя стороны элемента будутъ: черезъ сторону

$$dydz: \Theta l_x dydz \text{ и ей параллельную } - \left(\Theta l_x + \frac{d\Theta l_x}{dx} dx \right) dydz$$

$$dx dz: \Theta l_y dx dz \text{ и } - \left(\Theta l_y + \frac{d\Theta l_y}{dy} dy \right) dx dz \quad (1)$$

$$dy dx: \Theta l_z dy dx \text{ и } - \left(\Theta l_z + \frac{d\Theta l_z}{dz} dz \right) dy dx$$

Сумма этихъ величинъ, представляющихъ токи энергіи, даетъ намъ, отнесенное къ единицѣ времени, измѣненіе количества энергіи $\partial \Theta dx dy dz$ въ элементѣ объема съ временемъ t . Слѣдовательно, дѣлая сокращенія:

$$- \frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\Theta l_x}{dx} + \frac{d\Theta l_y}{dy} + \frac{d\Theta l_z}{dz} \quad (1)$$

Здѣсь $\frac{d\Theta}{dt}$ есть частная производная отъ Θ по времени. Выра-

женіе (I), аналогичное съ выраженіемъ закона сохраненія вещества въ гидродинамикѣ, есть выраженіе элементарнаго закона сохраненія энергіи въ тѣлахъ.

Означая черезъ $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ полную производную отъ Θ по времени, мы находимъ слѣдующее выраженіе для измѣненія плотности энергіи съ временемъ въ одной и той же движущейся массѣ энергіи:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\Theta}{dx}l_x + \frac{d\Theta}{dy}l_y + \frac{d\Theta}{dz}l_z \quad (2)$$

Соединяя выраженіе (2) съ (I) находимъ:

$$-\frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{dl_x}{dx} + \frac{dl_y}{dy} + \frac{dl_z}{dz} \quad (\text{I bis})$$

Аналогія между дифференціальными законами движенія энергіи и движенія вещества вообще не простирается далѣе сходства уравненій (I) и (I bis) съ соответственными уравненіями гидродинамики.

Выраженіе (I) открываетъ связь между количествомъ энергіи, отнесеннымъ къ единицѣ времени, втекающемъ въ среду черезъ ея границы и измѣненіемъ количества энергіи въ средѣ. Мы находимъ:

$$\iiint \frac{d\Theta}{dt} dx dy dz + \iint \Theta l_n d\sigma = 0 \quad (3)$$

гдѣ тройной интегралъ распространяется на весь объемъ среды, $d\sigma$ представляетъ элементъ ея границы и l_n есть скорость движенія энергіи по внѣшней нормали n къ элементу границы т. е.

$$l_n = l_x \cos nx + l_y \cos ny + l_z \cos nz \quad (4)$$

§ 3. Связь законовъ движенія энергіи съ законами частичныхъ движеній средъ. Дифференціальные законы дви-

жений частицъ различныхъ средъ даютъ, какъ извѣстно, возможность установить математическое выраженіе, представляющее законъ сохраненія энергіи для всей среды. Если черезъ δJ означимъ приращеніе живой силы въ элементѣ объема среды, черезъ δW — приращеніе работы частичныхъ силъ элемента, и черезъ δL — приращеніе работы давленій на элементъ $d\sigma$ поверхности тѣла, причемъ всѣ эти приращенія отнесены къ единицѣ времени, мы всегда имѣемъ возможность по основнымъ дифференціальнымъ законамъ движеній частицъ среды, составить слѣдующее выраженіе, причемъ предполагается, что внѣшнія силы не дѣйствуютъ на частицы среды:

$$\iiint (\delta J + \delta W) d\omega + \iint \delta L d\sigma = 0 \quad (5)$$

Въ этомъ выраженіи $d\omega$ представляетъ элементъ объема среды, тройной интегралъ распространяется на всю среду, а двойной — на ея поверхность. Выраженіе (5) представляетъ не что иное, какъ законъ сохраненія энергіи для всей среды.

Для данной среды подобное выраженіе можетъ быть составлено еще другимъ образомъ, исходя изъ уравненія (I). Умножая обѣ части этого уравненія на элементъ объема $d\omega$ и интегрируя на всю среду мы находимъ:

$$\iiint \frac{d\Theta}{dt} d\omega + \iiint \left[\frac{d(\Theta l_x)}{dx} + \frac{d(\Theta l_y)}{dy} + \frac{d(\Theta l_z)}{dz} \right] d\omega = 0 \quad (6)$$

или преобразовывая второй тройной интегралъ:

$$\iiint \frac{d\Theta}{dt} d\omega + \iint \Theta l_n d\sigma = 0 \quad (7)$$

Тройной интегралъ входящій въ это выраженіе, представляющее законъ сохраненія энергіи для всей среды, долженъ быть тождественъ съ тройнымъ интеграломъ, входящимъ въ выраженіе (5). Но двойной интегралъ входящій въ выраженіе (7) преобразуется во второй тройной интегралъ выраженія (6), слѣдовательно и

двойной интегралъ, входящій въ выраженіе (5) долженъ преобразоваться въ тройной интегралъ, тождественный со вторымъ тройнымъ интеграломъ входящимъ въ выраженіе (6). Математическое выраженіе этого тождества и приведетъ къ выраженіямъ связывающимъ законы движенія и распредѣленія энергіи съ частичными движеніями средъ.

II. Уравненія движенія энергіи въ различныхъ тѣлахъ.

§ 4. Уравненія движенія энергіи въ твердыхъ тѣлахъ постоянной упругости. Означимъ черезъ u, v, w перемѣщенія, по осямъ прямоугольныхъ координатъ, центра тяжести элемента объема, черезъ p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — нормальныя и черезъ p_{xy}, p_{yz}, p_{xz} — тангенціальныя силы упругости, дѣйствующія на стороны безконечно малаго параллелепипеда (при чемъ натяженія принимаются положительными, а давленія отрицательными), и черезъ ρ — плотность въ какой нибудь точкѣ среды. Полагая далѣе

$$\delta u = \frac{du}{dt} = u', \quad \delta v = \frac{dv}{dt} = v', \quad \delta w = \frac{dw}{dt} = w' \quad (8)$$

мы найдемъ слѣдующее выраженіе закона сохраненія энергіи для всего упругаго тѣла:

$$\begin{aligned} & \int \int \int \frac{\rho}{2} \delta(u'^2 + v'^2 + w'^2) d\omega + \int \int \int \left[p_{xx} \frac{d\delta u}{dx} + p_{yy} \frac{d\delta v}{dy} + \right. \\ & + p_{zz} \frac{d\delta w}{dz} + p_{yz} \left(\frac{d\delta v}{dz} + \frac{d\delta w}{dy} \right) + p_{xz} \left(\frac{d\delta w}{dx} + \frac{d\delta u}{dz} \right) + p_{xy} \left(\frac{d\delta u}{dy} + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{d\delta v}{dx} \right) \right] d\omega \\ & - \int \int \{ \delta u (p_{xx} \cos nx + p_{xy} \cos ny + p_{xz} \cos nz) + \delta v (p_{xy} \cos nx + \\ & + p_{yy} \cos ny + p_{yz} \cos nz) + \delta w (p_{xz} \cos nx + p_{yz} \cos ny + \\ & + p_{xx} \cos nz) \} d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Первые два тройные интегралы представляют приращение энергии, отнесенное къ единицѣ времени, во всей упругой средѣ. Двойной интегралъ распространяется на всю поверхность среды и представляетъ работу внѣшнихъ давленій. Мы опускаемъ дѣйствіе внѣшнихъ силъ на элементы упругой среды. Обращая вниманіе на значеніе величинъ du , dv и dw по формулѣ (8), мы замѣчаемъ, что двойной интегралъ выраженія (9) преобразуется въ слѣдующій тройной интегралъ:

$$\iiint d\omega \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{d}{dx}(p_{xx}u' + p_{xz}v' + p_{zx}w') \\ &+ \frac{d}{dy}(p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w') \\ &+ \frac{d}{dz}(p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w') \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Такъ какъ первые два тройные интегралы выраженія (9) тождественны съ первымъ тройнымъ интеграломъ выраженія (6), то двойной интегралъ, входящій въ выраженіе (9) взятый съ тѣмъ знакомъ, съ которымъ онъ входитъ въ это выраженіе, или тождественный съ нимъ тройной интегралъ (10) взятый съ отрицательнымъ знакомъ, долженъ быть тождествененъ со вторымъ тройнымъ интеграломъ, входящимъ въ выраженіе (6); слѣдовательно подынтегральная функція тройнаго интеграла (10), взятая съ отрицательнымъ знакомъ должна быть тождественна подынтегральной функціи втораго тройнаго интеграла выраженія (6), или что все равно второй части уравненія (I). Это заключеніе легко повѣряется при помощи основныхъ уравненій упругости, дающихъ возможность преобразовать сумму подынтегральныхъ функцій первыхъ двухъ тройныхъ интеграловъ, входящихъ въ выраженіе

(9), тождественную съ $\frac{d\Theta}{dt}$, въ отрицательную подынтегральную функцію выраженія (10). Изъ тождества этой послѣдней со второй частью уравненія (I) вытекаютъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned}
 - \partial l_x &= p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w' \\
 - \partial l_y &= p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w' \\
 - \partial l_z &= p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'
 \end{aligned} \tag{11}$$

Откуда заключаемъ: количество энергии, протекающее черезъ безконечно малый плоскій элементъ въ безконечно малое время, равно отрицательной работѣ силъ упругости, дѣйствующихъ на этотъ элементъ.

Найденныя выраженія (11) представляютъ связь законовъ движенія энергии съ законами частичныхъ движеній твердаго тѣла постоянной упругости. Въ правыхъ частяхъ этихъ выраженій не прибавлены функціи зависящія только отъ координатъ (y, z), (z, x), (x, y) ибо лѣвыя части должны обращаться въ нуль когда $u' = v' = w' = 0$.

§ 5. Для выясненія найденныхъ нами заключеній приложимъ формулы (10) къ опредѣленію скорости распространенія въ упругой средѣ плоскихъ волнъ съ продольными и поперечными колебаніями.

Разсмотримъ колебанія продольныя. Пусть несущія ихъ плоскія волны перпендикулярны къ оси x . Слѣдовательно

$$v = 0, \quad w = 0 \tag{12}$$

Положимъ кромѣ того

$$u = A \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\Omega} \right) \tag{13}$$

гдѣ Ω есть искомая скорость распространенія продольныхъ колебаній. Пользуясь выраженіями силъ упругости данными Ламе мы имѣемъ въ нашемъ случаѣ:

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx} & p_{yz} &= 0 \\
 p_{yy} &= \lambda \frac{du}{dx} & p_{xy} &= 0 \\
 p_{zz} &= \lambda \frac{du}{dx} & p_{xz} &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Кромѣ того мы имѣемъ;

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + p_{xx} \frac{d}{dx} \frac{du}{dt} \tag{15}$$

Интегрируя это выраженіе по времени, имѣемъ:

$$\vartheta = \frac{\rho}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2} \right) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \tag{16}$$

Вставляя сюда величину u , находимъ:

$$\vartheta = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2} \left(\rho + \frac{2\mu + \lambda}{\Omega^2} \right) \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\Omega} \right) \tag{17}$$

Съ другой стороны подставляя (13) и (14) въ (11) находимъ:

$$\begin{aligned}
 -\vartheta l_x &= -(\lambda + 2\mu) \frac{4\pi^2 A^2}{\Omega T^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\Omega} \right) \\
 -\vartheta l_y &= 0 \\
 -\vartheta l_z &= 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Послѣднія два соотношенія даютъ $l_y = 0$, $l_z = 0$. Слѣдовательно $l_x = \Omega$ и первое изъ соотношеній (18) по сокращеніи общихъ факторовъ даетъ соотношеніе:

$$\Omega \left(\rho + \frac{2\mu + \lambda}{\Omega^2} \right) = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\Omega} \quad (19)$$

откуда получается известный результат:

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (20)$$

Въ случаѣ распространенія плоской волны съ колебаніями поперечными мы нашли бы точно также известный выраженіе для скорости распространенія поперечныхъ колебаній.

Выраженія (11) даютъ возможность найти общія соотношенія между формою волнъ несущихъ продольныя или поперечныя колебанія и движеніями частицъ упругаго тѣла.

Извѣстно, что скорость распространенія тѣхъ или другихъ волнъ постоянна, и что волны исходящія изъ одной и той же поверхности сотрясенія имѣютъ общія нормали. Означая черезъ c скорость распространенія волны, мы имѣемъ слѣдовательно:

$$l_x = \frac{c \frac{dB}{dx}}{\Delta_1 B}; \quad l_y = \frac{c \frac{dB}{dy}}{\Delta_1 B}; \quad l_z = \frac{c \frac{dB}{dz}}{\Delta_1 B} \quad (21)$$

гдѣ

$$B = \text{const.} \quad (22)$$

есть уравненіе какой нибудь волновой поверхности, а $\Delta_1 B$ — ея дифференціальный параметръ перваго порядка. Мною было показано («законы колебаній въ неограниченной средѣ постоянной упругости» Математическій Сборникъ, томъ V), что выбирая за параметръ B волны отрѣзокъ луча между нѣкоторымъ начальнымъ положеніемъ волны и слѣдующимъ мы имѣемъ:

$$\Delta_1 B = 1 \quad (23)$$

Принимая послѣднее выраженіе и подставляя (21) въ (11) находимъ:

$$\begin{aligned}
 - \quad \partial c \frac{dB}{dx} &= p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w' \\
 - \quad \partial c \frac{dB}{dy} &= p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w' \\
 - \quad \partial c \frac{dB}{dz} &= p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'
 \end{aligned} \tag{24}$$

Эти выраженія показываютъ, что

$$\begin{aligned}
 & - \frac{p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w'}{\partial c} \\
 & - \frac{p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w'}{\partial c} \\
 & - \frac{p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'}{\partial c}
 \end{aligned} \tag{25}$$

суть выраженія косинусовъ угловъ нормали въ какой нибудь точкѣ волны съ осями координатъ. Такъ какъ по закону общихъ нормалей, всѣ элементы нормалей, проведенные въ соответствующихъ точкахъ одной и той же волны въ различныхъ ея положеніяхъ, лежатъ на одной прямой, носящей названіе луча, то выраженія (25) остаются неизмѣнными на протяженіи одного и того же луча.

Выраженія (25) показываютъ также, что воображая себѣ въ какой нибудь точкѣ луча линію, равную по величинѣ произведенію изъ энергіи на скорость ея распространенія, величины:

$$\begin{aligned}
 & - (p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w') \\
 & - (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w') \\
 & - (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')
 \end{aligned} \tag{26}$$

представляютъ ея проложенія на оси координатъ.

Возвышая выраженія (24) въ квадраты и складывая находимъ:

$$\partial^2 c^2 = (p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w')^2 + (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w')^2 + (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')^2 \quad (27)$$

Умножая выраженія (24) соответственно на l_x , l_y , l_z , складывая и обращая вниманіе на соотношенія (21) находимъ слѣдующее выраженіе:

$$\partial c^2 + (p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w')l_x + (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w')l_y + (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')l_z = 0 \quad (28)$$

Величина ∂c^2 можетъ быть названа двойною живою силою движенія энергіи.

§ 6. *Законъ энергіи для волновыхъ поверхностей произвольнаго вида.* Вставляя въ уравненіе (I) выраженія (21) и принимая въ соображеніе (23), найдемъ:

$$\frac{1}{c} \frac{d\partial}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\partial \frac{dB}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\partial \frac{dB}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\partial \frac{dB}{dz} \right) = 0 \quad (29)$$

Это соотношеніе даетъ связь между энергіей и формою волновой поверхности, которая приводится по отношенію къ энергіи къ дифференціальному уравненію съ частными производными перваго порядка. Мы находимъ, раскрывая выраженіе (29):

$$\frac{1}{c} \frac{d\partial}{dt} + \partial \Delta_2 B + \frac{d\partial}{dx} \frac{dB}{dx} + \frac{d\partial}{dy} \frac{dB}{dy} + \frac{d\partial}{dz} \frac{dB}{dz} = 0 \quad (30)$$

Здѣсь Δ_2 означаетъ дифференціальный параметръ втораго порядка.

Введемъ ортогональныя координаты, причемъ параметры двухъ системъ поверхностей ортогональныхъ между собою и къ волновой поверхности B , означимъ черезъ ρ_1 , ρ_2 . Принимая во