

Д. Розенберг

Физика и техника мощного ультразвука

Том 2. Мощные ультразвуковые поля

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Д11

Д11 **Д. Розенберг**
Физика и техника мощного ультразвука: Том 2. Мощные ультразвуковые поля / Д. Розенберг – М.: Книга по Требованию, 2024. – 269 с.

ISBN 978-5-458-41381-7

Вторая книга «Мощные ультразвуковые поля» посвящена эффектам, возникающим в ультразвуковых полях высокой интенсивности и являющимся основой ультразвуковой технологии. Подробно рассмотрены нелинейное поглощение мощных ультразвуков, радиационное давление, акустические течения и ультразвуковая кавитация. Книга базируется на оригинальных исследованиях, выполненных советскими учеными, а также на достижениях зарубежных авторов.

ISBN 978-5-458-41381-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЧАСТЬ I

**ПОГЛОЩЕНИЕ ВОЛН
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ**

К. А. Наугольных

Часть I

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение	7
Глава 1. Плоские волны конечной амплитуды	7
§ 1. Поглощение звуковой волны малой интенсивности	7
§ 2. Качественная картина распространения волн конечной амплитуды	9
§ 3. Основные уравнения	10
§ 4. Образование слабых разрывов в звуковой волне	14
§ 5. Изменение спектрального состава волны конечной амплитуды при ее распространении	19
§ 6. Поглощение волны конечной амплитуды	24
Глава 2. Сферические и цилиндрические волны конечной амплитуды	27
§ 1. Образование слабых разрывов в сферических и цилиндрических волнах	27
§ 2. Изменение спектрального состава сферических и цилиндрических волн	31
§ 3. Поглощение сферических и цилиндрических волн конечной амплитуды	33
Глава 3. Зависимость коэффициента усиления фокусирующей системы от интенсивности звука	36
§ 1. Введение	36
§ 2. Сферический концентратор	37
§ 3. Цилиндрический концентратор	40
Глава 4. Поглощение волн конечной амплитуды в релаксирующих средах и в твердых телах	41
§ 1. Поглощение звука в релаксирующих средах	41
§ 2. О поглощении звука конечной амплитуды в твердых телах	45
Литература	46

ВВЕДЕНИЕ

В акустике обычно имеют дело со звуковыми волнами малой амплитуды в том смысле, что возмущения равновесного состояния среды, вызванные этими волнами, оказываются малыми. Распространение таких волн описывается приближенными уравнениями, полученными линеаризацией уравнений гидродинамики и уравнения состояния. Это приближение — так называемое *приближение линейной акустики* — оказывается недостаточным в случае звуковых волн большой интенсивности, все чаще встречающихся в современной технике.

Большие интенсивности звука используются в мощных ультразвуковых установках, генерируются при работе реактивных и ракетных двигателей. В последнее время гиперзвуки большой амплитуды в твердых телах получают в результате рассеяния мощных световых пучков от лазеров на колебаниях решетки.

Распространение интенсивных звуковых волн сопровождается целым рядом эффектов, характеризующихся зависимостью от амплитуды волны. Для описания этих эффектов необходимо учитывать нелинейные члены уравнений гидродинамики. Наличие так называемых нелинейных эффектов существенным образом меняет картину распространения интенсивной звуковой волны и, в частности, характер ее поглощения. Рассмотрению этого вопроса о поглощении интенсивных волн и посвящена данная часть.

К числу нелинейных эффектов относятся также давление звукового поля, называемое еще радиационным давлением, звуковой ветер, рассеяние звука звуком и т. д. Некоторые вопросы рассматриваются в последующих частях этой книги.

Глава 1

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

§ 1. Поглощение звуковой волны малой интенсивности

Энергия звуковой волны при ее распространении вследствие необратимых процессов, обусловленных вязкостью и теплопроводностью среды, переходит в энергию скрытого теплового движения, в результате чего происходит постепенное поглощение волны.

Процесс поглощения звука в жидкостях и газах описывается уравнениями гидродинамики с учетом вязкости и теплопроводности. Если искать решение линеаризованных уравнений гидродинамики для одномерного случая в виде плоской гармонической волны типа $e^{i(kx - \omega t)}$, то волновое число k оказывается комплексным; вещественная его часть опреде-

ляет длину волны, а мнимая — коэффициент поглощения: $k = k_1 + i\alpha$

$$e^{kx - \omega t} = e^{-\alpha x} e^{i(k_1 x - \omega t)}. \quad (1)$$

При этом α выражается формулой (см., например, [1]):

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \eta' + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right], \quad (2)$$

откуда видно, что коэффициент поглощения пропорционален квадрату частоты волны ω и линейной комбинации коэффициента сдвиговой вязкости η , объемной η' и коэффициента теплопроводности κ . Остальные обозначения обычны: ρ — плотность среды; c — скорость звука; c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно.

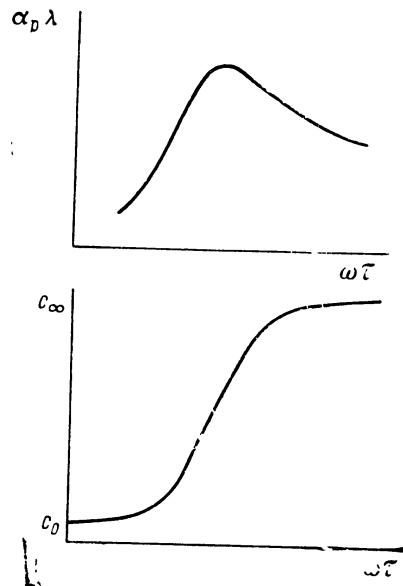


Рис. 1. Зависимости коэффициента поглощения на длине волны $\alpha_p \lambda$ и скорости распространения c звуковой волны от частоты в области релаксации

Сравнение с опытом показывает, что в одноатомных газах и жидкостях, внутренние степени свободы которых не возбуждаются при данной температуре, экспериментальные значения коэффициента поглощения хорошо согласуются с теоретическими, полученными по формуле (2). Однако в ряде таких многоатомных газов, как окись углерода, водород, а также в некоторых жидкостях (вода, бензол) частотный ход коэффициента поглощения отличен от квадратичной зависимости, предсказываемой формулой (2). Эти аномалии поглощения объясняются релаксационными эффектами; при сжатии или расширении среды, вызванном звуковой волной (как и при всяком другом быстром изменении состояния), в среде может нарушиться термодинамическое равновесие, в результате чего развиваются необратимые процессы

восстановления равновесия, сопровождаемые диссипацией энергии и приводящие к аномальному затуханию звука [1, 2].

Обусловленный релаксационными процессами коэффициент поглощения α_p выражается формулой [3]:

$$\alpha_p = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2c_0^3} \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (3)$$

а вещественная часть волнового числа в этом случае равна

$$k_1 = \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{2c_0^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right). \quad (4)$$

Здесь τ — время релаксации; c_∞ и c_0 — скорости звука на высоких частотах ($\omega \tau \gg 1$) и на низких частотах ($\omega \tau \ll 1$) соответственно.

Из соотношений (3) и (4) видно, что релаксационные процессы приводят к дисперсии скорости звука, т. е. к зависимости фазовой скорости $c = \omega/k_1$ от частоты и к своеобразной частотной зависимости коэффициента поглощения, рассчитанного на одну длину волны (рис. 1).

Отметим, что при поглощении синусоидальной волны форма ее, согласно (1), не меняется, волна остается гармонической, и уменьшается лишь ее амплитуда.

В отличие от этого форма звукового сигнала произвольной формы в процессе поглощения меняется и становится постепенно более сглаженной, чем вначале. Происходит это потому, что различные спектральные компоненты сигнала затухают по-разному ввиду частотной зависимости коэффициента поглощения, возрастающего пропорционально квадрату частоты. Так, волна, имеющая первоначально форму прямоугольного импульса, на больших расстояниях получает профиль, описываемый гауссовой кривой. «Ширина» его — порядка величины \sqrt{ax} , т. е. растет пропорционально корню из пройденного волной расстояния, «амплитуда» же волны (ее максимальное значение) падает обратно пропорционально \sqrt{x} (подробнее см. [1]). Здесь через a обозначен коэффициент при ω^2 в выражении (2)

$$a = \frac{b}{2\rho c^3}; \quad b = \frac{4}{3} \eta + \eta' + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right). \quad (5)$$

§ 2. Качественная картина распространения волн конечной амплитуды

Приведенные в предыдущем параграфе соотношения описывают поглощение звука достаточно малой интенсивности, когда можно линеаризовать уравнение гидродинамики и уравнение состояния.

При увеличении интенсивности звука это приближение становится непригодным, обнаруживаются эффекты, описываемые нелинейными членами гидродинамических уравнений и уравнения состояния, существенным образом изменяющие картину распространения звуковой волны и, в частности, процесс ее поглощения [1, 2, 4—8].

Мы рассмотрим эти эффекты на примере периодических волн, имеющих первоначально синусоидальную форму. Этот случай, по-видимому, наиболее интересен для ультразвуковой практики. Рассмотрим сначала плоскую бегущую волну в среде с вязкостью и теплопроводностью, излучаемую колеблющейся плоскостью в полубесконечное пространство.

Пусть волна имеет синусоидальную форму вблизи излучателя. Если интенсивность волны достаточно велика, то по мере распространения ее форма изменяется вследствие разницы в скоростях перемещения различных участков профиля. (Под профилем волны понимается распределение различных величин — давления, скорости, плотности — вдоль направления распространения.)

Точки профиля, соответствующие большему сжатию, движутся быстрее, чем точки, соответствующие меньшей плотности. В результате крутизна волновых фронтов увеличивается, что может привести к возникновению разрыва на каждом периоде волны и образованию волны пилообразной формы.

С другой стороны, влияние вязкости и теплопроводности приводит к сглаживанию профиля волны, уменьшению градиентов скорости и температуры. Поэтому при распространении гармонической (вблизи излучателя) волны увеличение крутизны фронтов будет происходить до тех пор, пока влияние нелинейных и диссипативных процессов не скомпенсируется, или, как обычно говорят, пока не произойдет стабилизация формы волны.

Эта стабилизация относительна, она не означает, что при дальнейшем распространении форма волны не меняется, ибо с затуханием амплитуды волны нелинейные эффекты ослабевают и профиль волны постепенно сглаживается, вновь становясь синусоидальным. Поэтому о волне, в которой влияние нелинейных и диссипативных процессов скомпенсировано, говорят как о волне относительно стабильной формы, понимая под этим более

медленное изменение профиля такой волны, нежели профиля любой волны той же амплитуды и частоты.

Профиль волны относительно стабильной формы определяется соотношением нелинейных и диссипативных эффектов. Если интенсивность волны достаточно велика, то доминируют нелинейные эффекты и форма волны сильно изменяется. В этом случае первоначально синусоидальная

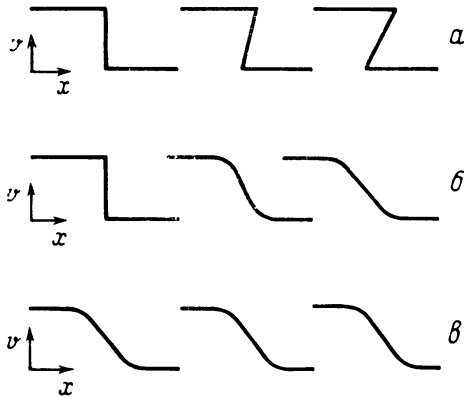


Рис. 2. Изменение профиля одиночного скачка уплотнения

a — в результате действия нелинейных эффектов; *b* — в результате диссипативных эффектов; *c* — при совместном влиянии этих эффектов

волна становится периодической слабой ударной волной и ее профиль приобретает пилообразную форму.

В случае малых интенсивностей наблюдается обратное явление — влияние диссипативных процессов преобладает, волна успевает затухнуть раньше, чем в ней накапливаются нелинейные эффекты, и ее распространение описывается достаточно точно формулой (1).

Различный характер влияния нелинейных и диссипативных эффектов на изменение формы волны иллюстрируется рис. 2, заимствованным из обстоятельной статьи Лайтхилла [5]. На этом рисунке изображено изменение профиля одиночного скачка уплотнения при учете нелинейных и диссипативных эффектов, а также при совместном учете этих

эффектов, когда имеет место стабилизация волны.

Процесс искажения формы волны можно также рассматривать и как изменение ее спектрального состава: при распространении первоначально монохроматической волны высокочастотные гармоники нарастают, достигают максимума в области, где изменения формы волны наиболее сильны, а затем затухают. Происходящая при этом непрерывная перекачка энергии из основной гармоники в сильно поглощающиеся высокочастотные компоненты приводит к более интенсивному затуханию волны.

Можно также сказать, что рост поглощения волны обусловлен увеличением крутизны волновых фронтов благодаря более сильной диссипации энергии при нарастании градиентов скорости и температуры. В результате поглощение волны оказывается зависящим от расстояния до излучателя, оно мало вблизи излучения, максимально в области, где волна имеет пилообразную форму и затем вновь уменьшается.

При этом, вообще говоря, следует различать диссипацию всей энергии волны и поглощение ее основной гармоники, или, иными словами, амплитудный коэффициент поглощения основной гармоники от коэффициента поглощения волны по интенсивности [10, 11].

Изложенная качественная картина распространения волны конечной амплитуды подтверждается математическим анализом и данными эксперимента.

§ 3. Основные уравнения

Распространение волн конечной амплитуды описывается системой гидродинамических уравнений

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right) = - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}' + \left(\frac{\eta}{3} + \eta' \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

уравнением переноса тепла

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s \right) = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \eta' (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \kappa \operatorname{div} \nabla T \quad (8)$$

и уравнением состояния

$$p = p(\rho, s). \quad (9)$$

Здесь \mathbf{v} — гидродинамическая скорость среды; p — давление; T — температура; s — энтропия единицы массы. Уравнения (6) — (9) нелинейны и их интегрирование представляет значительные трудности.

Однако если ограничиться рассмотрением звука не слишком большой интенсивности, когда характеризующие движение числа Маха малы, $M = v_0/c_0 \ll 1$ (v_0 — амплитуда колебательной скорости волны), то оказывается возможным ввести ряд приближений, существенно облегчающих решение задачи. При этом не следует считать, что эти упрощения исключают рассмотрение таких случаев, когда нелинейные эффекты оказываются весьма значительными. Дело в том, что нелинейные поправки к решениям линейной акустики, наряду с членами порядка $M = v_0/c_0$, содержат также и члены, описывающие накапливающиеся эффекты, пропорциональные, например в случае бегущей вдоль оси r плоской волны, величине Mkr .

Поэтому нелинейные эффекты заметно проявляются не только в очевидном случае столь больших амплитуд волны, когда число $M \gtrsim 1$, но и в гораздо более часто встречающемся и потому более важном для акустики случае, когда $M \ll 1$, но накапливающиеся эффекты велики (например для бегущей плоской волны, когда $Mkr \approx 1$). Именно такие ситуации, когда число M по-прежнему есть малый параметр задачи, но следует принимать во внимание накапливающиеся нелинейные эффекты, и составляют основной предмет настоящей части. В этих случаях возможно существенное упрощение системы исходных гидродинамических уравнений и уравнения состояния, основанное на малости числа M и величины поглощения на единицу длины α/k , позволяющее развить весьма эффективную приближенную нелинейную теорию распространения звука конечной амплитуды.

В частности, уравнение состояния можно записать в виде

$$p - p_0 = c_0^2 (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho_0)^2 + \frac{\partial p}{\partial s} (s - s_0) + \dots \quad (10)$$

Ограничиваясь рассмотрением одномерного случая, уравнение (6) можно преобразовать, если, используя (8), объединить член с вязкостью в этом уравнении с последним членом уравнения состояния (10), учитывающего неадиабатичность процесса [12, 13], после чего уравнение (6) принимает вид

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p_s + b \Delta \mathbf{v}, \quad (11)$$

где

$$b = \frac{4}{3} \eta + \eta' + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right);$$

$$p_s - p_0 = c_0^2 (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s (\rho - \rho_0)^2. \quad (12)$$

Последнее соотношение часто записывают в другой форме [9]:

$$p_s - p_0 = A \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \frac{B}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2, \quad (13)$$

где $A = \rho_0 c_0^2$; $B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s$,

и принимают отношение

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0} \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_{\rho, s} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_T + \frac{2\chi c_0 T}{c_p} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_p, \quad (14)$$

где χ —сжимаемость в качестве характеристики степени нелинейности уравнения состояния среды (12) [9]. Вместо B/A обычно вводится величина

$$\gamma = \frac{B}{A} + 1 = \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s \frac{\rho_0}{c_0^2} + 1, \quad (15)$$

равная отношению теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v$ в случае газов и показателю степени n в эмпирическом уравнении состояния для конденсированных веществ [2]:

$$p = A (\rho/\rho_0)^n - B. \quad (16)$$

Значения γ для некоторых веществ приведены в таблице, составленной по результатам работ [9, 14]. В работе [9] значения γ вычислялись по формуле (14) на основе экспериментально определенных зависимостей скорости звука от плотности и температуры, а в работе [14] измерялись непосредственно по величине второй гармоники в волне конечной амплитуды.

Вещество	Т, °С	γ		Вещество	Т, °С	γ				
		по [9]	по [14]			по [9]	по [14]			
Н ₂ О	0	5,2	7,1	С ₆ Н ₆	25	7,5				
	20	6,1			40	9,5				
	40	6,4			Глицерин	20		9,8		
	60	6,7				Трансформаторное масло		20		
	80	7,0						Ацетон	20	7,5
	100	7,1				20			11,0	
С ₂ Н ₅ ОН	0	11,5	11,8	Бензин А-70	20		12,2			
	20	11,3						Хлороформ	20	12,5
	40	11,8								
	60	11,9								
CS ₂	10	7,4		Одноатомный газ		1,67				
	40	7,1						Двухатомный газ	1,40	
CCl ₄	10	9,1	11,4							
	20	9,7								
	40	10,3								

Далее, система (7), (11), (12) может быть сведена в рассматриваемом приближении к одному уравнению в предположении, что поглощение мало, $\alpha/k \approx M$ [15—17]. Поясним ход этого преобразования на примере плоских волн.

Вводя функцию $w = \int dp_s/\rho$ и потенциал скорости φ , перепишем уравнение непрерывности (7) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0. \quad (17)$$

Из уравнения Эйлера (11) имеем

$$w = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{b}{\rho_0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \quad (18)$$

а из уравнения (12) получим

$$c^2 = c_0 + (\gamma - 1)w. \quad (19)$$

Подставляя теперь (18) и (19) в (17), найдем с точностью до квадратичных по малому параметру M величин

$$c_0^2\varphi'' - \ddot{\varphi} + \frac{b}{\rho_0}\dot{\varphi}'' + c_0(\gamma + 1)\varphi'\varphi'' = 0. \quad (20)$$

Переходя в этом уравнении от переменных r, t к переменным $y = t - (r/c_0)$, r и возвращаясь от потенциала к скорости $v = \partial\varphi/\partial r$, приближенно получим

$$\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (21)$$

где $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$.

Это уравнение примечательно в двух отношениях: во-первых, несмотря на приближенный характер, оно в интересующих нас здесь случаях достаточно точно описывает и нелинейные и диссипативные процессы; во-вторых, это уравнение того же типа, что и уравнение Бюргера, допускающего преобразование к линейному уравнению типа уравнения диффузии (18).

Вводя безразмерные переменные $u = v/v_0$, $\sigma = r/L$, где, как будет видно далее, в качестве L удобно выбрать величину

$$L = \frac{1}{k\varepsilon M} = \frac{c_0^2}{\varepsilon\omega\tau_0}, \quad (22)$$

можно переписать основное уравнение нелинейной теории распространения звука в более удобном для дальнейшего виде

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} - u\frac{\partial u}{\partial(\omega y)} = \Gamma^{-1}\frac{\partial^2 u}{\partial(\omega y)^2}, \quad (23)$$

где

$$\Gamma = 2\varepsilon \text{Re} = \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{v_0\lambda}{b/\rho_0} = 2\varepsilon\frac{p'_0}{b\omega};$$

p'_0 — амплитуда давления волны.

Безразмерный параметр Γ , пропорциональный отношению нелинейного члена в уравнении (23) к члену, учитывающему влияние вязкости и теплопроводности, наряду с M , есть важнейшая характеристика процесса распространения интенсивного звука, характеризуя относительную роль нелинейных и диссипативных эффектов. Этот параметр, впервые введенный в работе [10] в качестве критерия влияния нелинейных эффектов, пропорционален обычному гидродинамическому числу Рейнольдса (Re) и отличается от него лишь множителем 2ε , учитывающим нелинейность уравнения состояния; в литературе его часто называют «числом Рейнольдса» [5], или «акустическим числом Рейнольдса» [16].

Заметим, что Γ эквивалентен параметру $(\alpha_0 L)^{-1}$, используемому в работе [19], связан с коэффициентом k работы [20] соотношением $k = (\Gamma/4)[1 - \exp(-2\alpha x)]$ и близок к параметру $(-2A)$ работы [15] (см. [17]).

Уравнение (23) — это удобный исходный пункт исследования распространения волны конечной амплитуды, позволяющий получить ряд простых приближенных решений. Эти решения могут быть разбиты на две группы в соответствии с двумя подходами к задаче о распространении волны конечной амплитуды.

Первая группа решений, рассматриваемых в § 4, описывает профиль волны конечной амплитуды и его изменение по мере распространения волны. Вторая группа решений может рассматриваться как результат разложения в ряд Фурье решений первой группы. Эти решения, изложенные в § 5, описывают распространение волны конечной амплитуды со спектральной точки зрения, характеризуя изменение амплитуд различных гармоник при распространении волны.

В пределах каждой из этих групп существует несколько решений, различающихся областью применимости. Одни из них пригодны лишь при больших значениях параметра Γ , другие — при малых; некоторые решения справедливы лишь вблизи излучателя, иные — только в области стабилизации волны.

§ 4. Образование слабых разрывов в звуковой волне

Рассмотрим распространение плоской звуковой волны достаточно большой интенсивности, когда значения параметра Γ велики: $\Gamma \gg 1$ ¹. Будем считать, что первоначально волна имеет синусоидальную форму

$$v = v_0 \sin \omega t \text{ при } r = 0. \quad (24)$$

При больших значениях параметра Γ можно пренебречь правой частью уравнения (23), что позволяет легко проинтегрировать остающуюся часть уравнения, если рассматривать y как функцию v и σ .

Полученное таким образом решение, найденное Солуяном и Хохловым [16], можно записать в виде

$$\omega y = -\sigma \frac{v}{v_0} + f\left(\frac{v}{v_0}\right), \quad (25)$$

где $f(v/v_0)$ — произвольная функция.

Определяя эту функцию из граничного условия (24), получим решение, описывающее плоскую бегущую волну первоначально синусоидальной формы²:

$$\omega y = \arcsin \frac{v}{v_0} - \sigma \frac{v}{v_0}. \quad (26)$$

Это выражение удобно проанализировать графически. Откладывая отношение v/v_0 по оси абсцисс, а ωy — по оси ординат, легко представить формулу (26) в виде суммы двух функций: $\arcsin \frac{v}{v_0}$ и линейной функции

$-\sigma \frac{v}{v_0}$, тангенс угла наклона которой растет с расстоянием σ , пройденным волной (рис. 3). Поворачивая рис. 3 против часовой стрелки на 90° , получим интересующую нас зависимость $v = v(\omega y)$ на различных расстояниях от источника. Полученные таким образом формы профиля волны изображены на рис. 4. Видно, что вблизи источника ($\sigma \ll 1$) искажения синусоидальной формы невелики (рис. 4,а). По мере распространения волны они

¹ Подчеркнем еще раз, что введенное выше условие о малости чисел M предполагается всегда выполненным: $M \ll 1$. Заметим, что условия $M \ll 1$ и $\Gamma \gg 1$ не являются взаимоисключающими и легко выполняются в реальных ситуациях. Например, если амплитуда давления волны, распространяющейся в воде, $p'_0 = 25$ атм ($c_0 = 1,5 \cdot 10^5$ см/сек, $\varepsilon = 4$, $\alpha/v^2 = 22 \cdot 10^{-17}$ сек²см⁻¹), частота $\nu = 10^6$ гц, то $\Gamma \approx 10^2$, $M \approx 10^{-3}$.

² Выражение (26) можно рассматривать как член нулевого порядка в разложении решения уравнения (1) по обратным степеням числа Γ . Последующий член первого порядка в этом разложении найден Блэкстоком [17].