

В. И. Смирнов

Курс высшей математики

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
В11

В11 **В. И. Смирнов**
Курс высшей математики: Том 2 / В. И. Смирнов – М.: Книга по Требованию, 2023. – 656 с.

ISBN 978-5-519-70998-9

Издание 21.

ISBN 978-5-519-70998-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

сопутно сходящиеся интегралы (264). 87. Равномерно сходящиеся интегралы (267). 88. Примеры (270). 89. Несобственные кратные интегралы (274). 90. Примеры (278).

§ 9. Мера и теория интегрирования 283

91. Предварительные понятия (283). 92. Основные теоремы (286). 93. Счетные множества. Действия над точечными множествами (288). 94. Мера Жордана (291). 95. Квадрируемые множества (293). 96. Независимость от выбора осей (296). 97. Случай любого числа измерений (298). 98. Интегрируемые функции (299). 99. Вычисление двойного интеграла (301). 100. n -кратные интегралы (304). 101. Примеры (305). 102. Внешняя мера Лебега (307). 103. Измеримые множества (309). 104. Измеримые функции (314). 105. Дополнительные сведения (318). 106. Интеграл Лебега (320). 107. Свойства интеграла Лебега (323). 108. Интегралы от неограниченных функций (327). 109. Предельный переход под знаком интеграла (331). 110. Теорема Фубини (334). 111. Интегралы по множеству бесконечной меры (337).

ГЛАВА IV

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ 10. Основы векторной алгебры 339

112. Сложение и вычитание векторов (339). 113. Умножение вектора на скаляр. Компланарность векторов (341). 114. Разложение вектора по трем некопланарным векторам (342). 115. Скалярное произведение (343). 116. Векторное произведение (345). 117. Соотношения между скалярным и векторным произведениями (347). 118. Скорости точек вращающегося твердого тела; момент вектора (349).

§ 11. Теория поля 351

119. Дифференцирование вектора (351). 120. Скалярное поле и его градиент (353). 121. Векторное поле; расходимость и вихрь (357). 122. Потенциальное и соленоидальное поля (360). 123. Направленный элемент поверхности (362). 124. Некоторые формулы векторного анализа (364). 125. Движение твердого тела и малая деформация (366). 126. Уравнение непрерывности (368). 127. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости (370). 128. Уравнения распространения звука (371). 129. Уравнение теплопроводности (373). 130. Уравнения Максвелла (375). 131. Выражение оператора Лапласа в ортогональных координатах (377). 132. Операция дифференцирования для случая переменного поля (383).

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 12. Кривые на плоскости и в пространстве 388

133. Плоская кривая, ее кривизна и эволюта (388). 134. Эвольвента (394). 135. Естественное уравнение кривой (395). 136. Основные элементы кривой в пространстве (396). 137. Формулы Френе (400). 138. Соприкасающаяся плоскость (401). 139. Винтовые линии (402). 140. Поле единичных векторов (404).

- § 13. Элементы теории поверхностей 405**
 141. Параметрические уравнения поверхности (405). 142. Первая дифференциальная форма Гаусса (408). 143. Вторая дифференциальная форма Гаусса (409). 144. О кривизне линий, начерченных на поверхности (411). 145. Индикатриса Дюпена и формула Эйлера (414). 146. Определение главных радиусов кривизны и главных направлений (417). 147. Линии кривизны (418). 148. Теорема Дюпена (421). 149. Примеры (422). 150. Гауссова кривизна (424). 151. Вариация элемента площади и средняя кривизна (425). 152. Огибающая семейства поверхностей и кривых (428). 153. Развертывающиеся поверхности (431).

ГЛАВА VI

РЯДЫ ФУРЬЕ

- § 14. Гармонический анализ 435**
 154. Ортогональность тригонометрических функций (435). 155. Теорема Дирихле (440). 156. Примеры (442). 157. Разложение в промежутке $(0, \pi)$ (444). 158. Периодические функции периода 2π (449). 159. Средняя квадратичная погрешность (451). 160. Общие ортогональные системы функций (456). 161. Класс L_2 (461). 162. Сходимость в среднем (462). 163. Ортонормированные системы в L_2 (465).
- § 15. Дополнительные сведения из теории рядов Фурье 460**
 164. Разложение в ряд Фурье (469). 165. Вторая теорема о среднем (474). 166. Интеграл Дирихле (477). 167. Теорема Дирихле (481). 168. Приближение к непрерывной функции полиномами (483). 169. Формула замкнутости (488). 170. Характер сходимости рядов Фурье (490). 171. Улучшение сходимости рядов Фурье (495). 172. Пример (498).
- § 16. Интеграл Фурье и кратные ряды Фурье 501**
 173. Формула Фурье (501). 174. Ряды Фурье в комплексной форме (509). 175. Кратные ряды Фурье (510).

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

- § 17. Волновое уравнение 513**
 176. Уравнение колебаний струны (513). 177. Решение Даламбера (517). 178. Частные случаи (520). 179. Ограниченная струна (524). 180. Способ Фурье (529). 181. Гармоники и стоячие волны (531). 182. Вынужденные колебания (534). 183. Средоточенная сила (537). 184. Формула Пуассона (541). 185. Цилиндрические волны (545). 186. Случай n -мерного пространства (547). 187. Неоднородное волновое уравнение (549). 188. Точечный источник (553). 189. Поперечные колебания мембран (554). 190. Прямоугольная мембрана (555). 191. Круглая мембрана (559). 192. Теорема единственности (566). 193. Применение интеграла Фурье (569).
- § 18. Телеграфное уравнение 571**
 194. Основные уравнения (571). 195. Установившиеся процессы (572). 196. Устанавливающиеся процессы (574). 197. При-

меры (577). 198. Обобщенное уравнение колебаний струны (580). 199. Неограниченная цепь в общем случае (584). 200. Способ Фурье для ограниченной цепи (586). 201. Обобщенное волновое уравнение (590).

§ 19. Уравнение Лапласа 592

202. Гармонические функции (592). 203. Формула Грина (594). 204. Основные свойства гармонических функций (599). 205. Решение задачи Дирихле для круга (603). 206. Интеграл Пуассона (606). 207. Задача Дирихле для сферы (610). 208. Функция Грина (614). 209. Случай полупространства (616). 210. Потенциал объемных масс (617). 211. Уравнение Пуассона (621). 212. Формула Кирхгофа (625).

§ 20. Уравнение теплопроводности 628

213. Основные уравнения (628). 214. Неограниченный стержень (629). 215. Стержень, ограниченный с одного конца (634). 216. Стержень, ограниченный с обоих концов (639). 217. Дополнительные замечания (641). 218. Случай сферы (642). 219. Теорема единственности (645).

Алфавитный указатель 649

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Общий план настоящего издания второго тома тот же, что и в предыдущем издании. Существенные изменения внесены в первые две главы, посвященные дифференциальным уравнениям. Уже в п. 2 первой формулируется теорема существования и единственности решения при начальном условии, и остальное изложение проводится в непосредственной связи с этой теоремой. Значительно расширено содержание § 5 второй главы.

В § 9 третьей главы после изложения теории меры Жордана и исследования интеграла Римана излагаются теория меры Лебега, свойства измеримых функций и интеграл Лебега. В связи с этим § 15 шестой главы содержит изложение свойства класса L_2 и теорию ортонормированных систем функций этого класса.

Первые три главы были прочтены С. М. Лозинским, от которого я получил ряд ценных указаний. Выражаю ему мою глубокую благодарность.

В. Смирнов

11 декабря 1964 г.

ГЛАВА I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Общие понятия. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит еще и производные неизвестных функций или их дифференциалы [1, 51]. Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют *дифференциальным уравнением с частными производными*. В настоящей главе мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, и большая часть главы будет посвящена тому случаю, когда задано одно уравнение, содержащее одну неизвестную функцию.

Пусть x — независимая переменная и y — искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения будет

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Наивысший порядок n производных неизвестной функции, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*. В настоящем параграфе мы будем рассматривать одно обыкновенное дифференциальное уравнение *первого порядка*. Общий вид такого уравнения будет

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или, в решенной относительно y' форме,

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Пользуясь другим обозначением производной, можем записать это уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Если некоторая функция

$$y = \varphi(x) \quad (4)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) или (2), т. е. если это уравнение обращается в тождество относительно x при замене y и y' на $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, то функция (4) называется *решением* этого *дифференциального уравнения*. Сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется обычно задачей *интегрирования дифференциального уравнения*.

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (2) не содержит y , получается дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x). \quad (5)$$

Нахождение его решений есть основная задача интегрального исчисления [1, 86], и все множество этих решений дается формулой

$$y = \int f(x) dx + C, \quad (6)$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, в этом простейшем случае имеется семейство решений дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Как мы увидим, и в общем случае дифференциального уравнения первого порядка мы будем иметь семейство решений, содержащее произвольную постоянную:

$$y = \varphi(x, C). \quad (7)$$

Такое семейство решений называется *общим интегралом* уравнения. Общий интеграл может выражаться в неявной форме или в форме, решенной относительно C :

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x, y) = C. \quad (7_1)$$

Придавая произвольной постоянной C различные численные значения, будем получать различные решения уравнения — так называемые *частные решения* уравнения.

Укажем геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения и его решений. Если рассматривать x и y как координаты точек плоскости, то дифференциальное уравнение (2) определяет в каждой точке (x, y) , где определена функция $f(x, y)$, угловой коэффициент касательной y' к некоторой линии. Искомое решение (4) уравнения (2) есть такая кривая (в частном случае — прямая), которая в каждой своей точке имеет угловой коэффициент касательной y' , определяемый равенством (2). Такая кривая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Иначе говоря, понятие решения уравнения (2) совпадает с понятием интегральной кривой (в частном случае — прямой) этого уравнения на плоскости XOY . Общий интеграл (7) дает бесчисленное множество интегральных кривых или, точнее говоря, семейство кривых, зависящее от одной произвольной постоянной.

Положим, что функция $f(x, y)$ однозначна и непрерывна в некоторой области B плоскости XOY . Пусть линия l , соответствующая решению (7), принадлежит этой области, и функция $\varphi(x)$ определена на некотором промежутке I изменения x . Говоря о решении (4), мы, согласно сказанному выше, считаем, что $\varphi(x)$ непрерывна и имеет производную для x , принадлежащих I . Если к промежутку I принадлежит его левый конец, то производная $\varphi'(x)$ есть производная справа, а на правом конце — производная слева. Из уравнения (3) и непрерывности $f(x, y)$ непосредственно следует, что и производная $\varphi'(x)$ решения непрерывна на I .

Во всем предыдущем мы считаем, естественно, что все функции однозначны. Из однозначности $\varphi(x)$ следует, что прямые, параллельные оси OY , могут пересекать интегральную кривую не более чем в одной точке. Если мы перепишем уравнение (2), или (3), в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (3_1)$$

т. е. будем считать не y функцией от x , а x функцией от y , то прямые, параллельные оси OX , могут пересекать интегральные кривые не более чем в одной точке. Пусть интегральная кривая l уравнения (2) такова, что не только прямые, параллельные оси OY , но и прямые, параллельные оси OX , пересекают ее не более чем в одной точке, т. е. в уравнении $y = \varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ имеет однозначную обратную функцию $x = \psi(y)$. При этом l является и интегральной кривой дифференциального уравнения (3₁). В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с уравнением вида (2).

2. Определение решения по начальному условию. Теорема существования и единственности. Простейшее уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений, поскольку в формулу (6) входит произвольная постоянная. Но нетрудно показать, что мы получим вполне определенное решение уравнения (5), если поставим так называемое *начальное условие*, а именно потребуем, чтобы искомая функция y принимала заданное значение y_0 при заданном значении $x = x_0$. Это начальное условие запишем в виде

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (8)$$

Действительно, пусть $f(x)$ — непрерывная на некотором промежутке I функция и точка $x = x_0$ принадлежит I . Заменяя в формуле (6) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом x и нижним пределом x_0 , вместо (6) получим

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + C.$$

Первое слагаемое обращается в нуль при $x = x_0$, и чтобы удовлетворить условию (8), надо положить $C = y_0$. Таким образом, уравнение (5) при начальном условии (8) имеет единственное решение

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0.$$

Отметим, что это решение имеет место во всем промежутке I .

Аналогично, если мы имеем общий интеграл (7) какого-либо уравнения (2), то для удовлетворения начальному условию (8) надо определить произвольную постоянную C из равенства

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \quad (9)$$

Обратимся теперь к геометрической интерпретации. Положим, что функция $f(x, y)$ определена в некоторой области B плоскости XOY и в этой области однозначна и непрерывна. В каждой точке (x, y) , принадлежащей B , из уравнения (2) определяется, как мы уже упоминали, угловой коэффициент y' касательной к искомой интегральной кривой. Через точку (x, y) проведем небольшой отрезок прямой, образующий с осью OX такой угол α , что $\operatorname{tg} \alpha = y'$, и придадим этому отрезку какое-либо направление (переход к противоположному направлению не изменит $\operatorname{tg} \alpha$). Мы видим, что уравнение (2) равносильно определению в области B поля направлений, т. е. в каждой точке области B уравнение (2) определяет некоторое направление. Интегральные кривые уравнения (2) суть кривые l , лежащие в области B и обладающие следующим свойством: в каждой точке (x, y) касательная к l имеет направление, определяемое указанным выше полем направлений. Начальное условие (8)

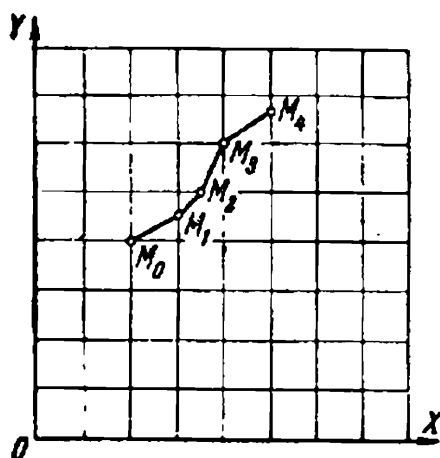


Рис. 1.

сводится к требованию, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку (x_0, y_0) , находящуюся в B . Приведем теперь геометрические соображения, из которых наглядно, но не строго логически, следует, что через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Разобьем плоскость XOY прямыми (рис. 1), параллельными осям, на малые квадраты так, чтобы точка M_0 лежала в вершине одного из этих квадратов (это — несущественно). Из точки M_0 проводим в направлении возрастания x отрезок прямой M_0M_1 с угловым коэффициентом $y'_0 = f(x_0, y_0)$ до ближайшего пересечения с одной из прямых сетки квадратов. Пусть (x_1, y_1) — координаты точки M_1 . Из M_1 проводим в направлении возрастания x отрезок прямой M_1M_2

с угловым коэффициентом $y'_1 = f(x_1, y_1)$ до ближайшего пересечения с одной из прямых сетки квадратов и т. д. Это построение можно выполнить и в направлении убывания x . Построенная таким образом ломаная линия и представляет приближенно для x , близких к x_0 , искомую интегральную кривую уравнения (2), проходящую через точку M_0 . Это построение делает весьма вероятным тот факт, что через всякую точку M_0 из B проходит одна и только одна интегральная кривая. Это утверждение справедливо и будет дальше доказано, если $f(x, y)$ обладает кроме непрерывности еще некоторым свойством.

Положим для определенности, что B — открытая область, т. е. область, к которой мы не причисляем ее границы (B может быть и всей плоскостью). Имеет место следующая теорема.

Теорема А. *Если $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y в B , то через каждую точку, принадлежащую B , проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (2).*

Теорема эта, которую мы пока примем без доказательства, называется обычно теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения (2) при заданном начальном условии.

В дальнейшем, для краткости, сформулированную теорему мы будем называть теоремой А. В конце следующей главы мы приведем доказательство этой теоремы и ряд дополнений к ней. Укажем, как надо понимать утверждение единственности решения при заданном начальном условии. Пусть $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ суть два решения уравнения (2), удовлетворяющие условию (8), причем первое определено на некотором промежутке I_1 , а второе на промежутке I_2 изменения x , а точка x_0 принадлежит этим промежуткам. При этом на общей части промежутков I_1 и I_2 должно иметь место тождество $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$. Предполагается, конечно, что интегральные кривые $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ не выходят из области B , где $f(x, y)$ определена и удовлетворяет указанным в теореме условиям.

В следующих разделах мы укажем некоторые частные типы дифференциальных уравнений, интегрирование которых приводится к вычислению неопределенных интегралов или, как говорят, их интегрирование приводится к квадратурам. Отметим, что вычисление интеграла связано с вычислением площади, откуда и происходит термин «квадратура». При рассмотрении упомянутых частных типов мы приведем ряд примеров, на которых мы проиллюстрируем указанные выше соображения, связанные с теоремой А.

3. Уравнения с отделяющимися переменными. Наряду с простейшим уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$y' = f(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

и для общего интеграла получим формулу

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Положим теперь, что правая часть уравнения (3) есть произведение функции только от x на функцию только от y :

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y). \quad (10)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx. \quad (10_1)$$

Пусть $y(x)$ — некоторое решение уравнения (10) или, что то же, уравнения (10₁). Последнее равенство есть равенство двух дифференциалов, из которых левый выражается через посредство y (вид дифференциала первого порядка не зависит от выбора переменной [1, 50]). Из равенства дифференциалов следует, что их неопределенные интегралы отличаются лишь произвольным постоянным слагаемым, т. е.

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C.$$

Выполняя квадратуры и решая относительно y , получим общий интеграл уравнения (10). Переход от (10) к (10₁) называется обычно отделением (разделением) переменных.

В связи с вышесказанным приведем некоторые общие соображения. Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, решенное относительно производной, можно записать в виде

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (11)$$

Уравнение, записанное в таком виде, не связывает нас выбором неизвестной функции. За таковую мы можем принять как y , так и x . Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть произведения функции только от x на функцию только от y , т. е.

$$M_1(x) M_2(y) dx + N_1(x) N_2(y) dy = 0.$$

Такое уравнение называется уравнением с отделяющимися переменными [1, 93]. Деля обе части на $N_1(x) M_2(y)$, «отделим переменные»:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0$$