

С. Гурьев

**Основания дифференциального исчисления с
приложением одного к аналитике**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

С11 **С. Гурьев**
Основания дифференциального исчисления с приложением одного к аналитике / С. Гурьев – М.: Книга по Требованию, 2015. – 512 с.

ISBN 978-5-458-56932-3

ISBN 978-5-458-56932-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Р О С П И С Ь

предметамъ, содержащимся въ сихъ основаніяхъ Дифференціального Изчисленія.

К Н И Г А П Е Р В А Я,

содержащая полную теорію сего изчисленія.

	страни.
ГЛАВА I. Предварительныя понятія, до Дифференціального Изчисленія относящіяся	I.
—— II. Алгебраическія начала теоріи предѣловъ	16
—— III. О сысканіи дифференціаловъ алгебраическихъ функцій одного переменнаго количества	29
—— IV. О сысканіи дифференціаловъ трансцендентныхъ функцій	45
Прибавленіе къ III и IV Главамъ. О сысканіи дифференціаловъ функцій неявныхъ	67
—— V. О дифференціалахъ вышшихъ порядковъ	77
—— VI. О сысканіи дифференціаловъ функцій многихъ переменныхъ количествъ	119
—— VII. Объ условныхъ уравненійхъ полныхъ дифференціаловъ	143
Прибавленіе къ VI и VII Главамъ. О сысканіи дифференціаловъ уравненій между многими переменными количествами	167

К Н И Г А В Т О Р А Я,

*содержащая приложение Дифференціального Изчисленія
къ Аналитикѣ.*

	страни.
ГЛАВА I. Объ общей формулѣ разложенія функцій одного переменнаго количества въ ряды, съ приложеніемъ оной къ главнымъ родамъ и видамъ сихъ функцій	171
Прибавленіе I. О приложеніи общей формулы разложенія къ функціямъ неявнымъ	229
—— II. О приложеніи той же формулы къ приближенному разрѣшенію опредѣленныхъ уравненій	259
—— III. О приложеніи той же формулы къ опредѣленію въ алгебраическихъ уравненіяхъ корней равныхъ	268

ГЛАВА II. О приложеніи общей формулы разложенія функцій одного переменнаго количества въ ряды къ опредѣленію наибольшихъ и наименьшихъ величинъ сихъ функцій	- - -	273
Прибавленіе I. Объ опредѣленіи наибольшихъ или наименьшихъ величинъ функцій неявныхъ		307
II. О приложеніи ученія о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ къ опредѣленію въ алгебраическихъ уравненіяхъ признаковъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ корней	- - -	319
III. О величинахъ функцій одного переменнаго количества, которыя въ нѣкоторыхъ особенныхъ случаяхъ представляются въ видѣ неопредѣленно	- - -	337
IV. О преобразованіи трансцендентныхъ функцій	- - -	365
V. О приложеніи предвѣдущаго преобразованія трансцендентныхъ функцій къ сысканію множителей какъ алгебраическихъ, такъ и самыхъ оныхъ трансцендентныхъ функцій	- - -	390
Прибавленіе. О приложеніи найденныхъ множителей къ сысканію суммъ безконечныхъ рядовъ		423
VI. О разложеніи соизмѣримыхъ дробныхъ функцій на дроби простыя	- - -	446
VII. Объ общей формулѣ разложенія функцій многихъ переменныхъ количествъ въ ряды, съ приложеніемъ оной къ опредѣленію наибольшихъ и наименьшихъ величинъ сихъ функцій	- - -	469

О С Н О В А Н І Й ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИЗЧИСЛЕНІЯ

КНИГА ПЕРВАЯ,

Содержащая полную теорію сего изчисленія.

Г Л А В А Ія.

Предварительныя понятія,
до Дифференціального изчисленія относящіяся.

(1.) Между количествами, взаимно сопряженными какимъ нѣсть отношеніемъ, однѣ могутъ прибавляться или уменьшаться, когда другія всегда непремѣнно пребываютъ: первыя называются *пере-
мѣнными*, а другія *постоянными*.

(2) Всякое алгебраическое выраженіе, изъ одного или многихъ переменныхъ количествъ и постоянныхъ составленное, обыкновенно называется *функціею* сего одного или сихъ многихъ переменныхъ количествъ.

Но вѣрнѣйшій признакъ функціи состоитъ въ томъ, что величина ея въ то же время измѣняется, когда каждое изъ переменныхъ количествъ прибавляется или убавляется.

И такъ выраженія x^0 , 1^x и $\frac{a^2 - ax}{a - x}$, не смотря на видъ функцій, въ которыхъ онѣ представляются, суть не иное что, какъ количества постоянныя, а не функціи переменнаго количества x .

Откуда явствуетъ, что всякая функція одного или многихъ переменныхъ количествъ есть равнымъ образомъ количествомъ *пере-
мѣнное*.

(3.) Главнѣйшее различіе между функціями состоить въ образѣ сопряженія переменныхъ количествъ съ постоянными. И такъ:

1) Когда сіе сопряженіе таково, что производящая отъ того функція прямою линією точно опредѣлится можетъ; то функція сія называется *алгебраическою*. Таковы суть всѣ функціи, кои составлены посредствомъ алгебраическихъ способовъ изчисленія, каковы суть: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени, извлеченіе корней и на конецъ разрѣшеніе уравненій.

2.) Напротивъ того, когда оное сопряженіе таково, что производящая отъ того функція прямою линією точно опредѣлится не можетъ, хотя въ прочемъ имѣетъ и опредѣленную величину; то функція сія именуется *трансцендентною*. Таковы суть всѣ функціи, въ составленіе коихъ входятъ количества съ неопредѣленными указателями и дуги круга, или все то же, логарифмы и линіи тригонометрическія. (*).

(4.) Величина на которую переменное количество можетъ прибавиться или убавиться, называется *разностію* или *приращеніемъ* сего переменнаго количества, и означается обыкновенно греческою буквою Δ , предъ пѣмъ количествомъ поставляемою. Сія разность или приращеніе переменнаго количества сопровождается или знакомъ $+$ или знакомъ $-$, смотря по тому, какъ сіе количество перемѣняется: возрастающая или убывающая.

Такъ, когда переменное количество x перемѣняется возрастающая, то разность или приращеніе его означается чрезъ $+\Delta x$ или просто чрезъ Δx ; но когда количество x перемѣняется убывающая, то разность или приращеніе его означается чрезъ $-\Delta x$.

(*) Въ сихъ опредѣленіяхъ алгебраическихъ и трансцендентныхъ функцій вмѣсто чиселъ мы приняли прямую линію по той причинѣ, что въ числахъ ни извлеченіе корней, ни разрѣшеніе уравненій въ безчисленномъ множествѣ случаевъ точно совершиться не можетъ. И всякъ, кому извѣстна Трансцендентная Геометрія, видитъ, что сіи опредѣленія совершенно сходятся съ самымъ употребленіемъ сихъ словъ. На примѣръ, когда ища длину второй кубической параболы, находимъ, что она изображается нѣкоторою алгебраическою функціею, то говоримъ, что сія кривая линія есть *прямою измѣрима*; напротивъ того, ког-

Здѣсь въ самомъ дѣлѣ — Δx не есть приращеніе количества x , но его уменьшеніе; однако, поелику знакъ — служилъ поправленіемъ ложнаго положенія, сложенія на вычитаніе, принятіе — Δx за приращеніе никакой погрѣшности не причинилъ, но напрошивъ того доставилъ выгоду всеобщности.

(5.) И какъ всякая функція переменнаго количества x , которую мы вообще означимъ чрезъ y , вмѣстѣ съ симъ количествомъ x измѣняется и есть сама переменное же количество (ч. 2); то сказанное въ предвѣдущемъ членѣ о разности или приращеніи Δx переменнаго количества x , равно приложено быть можетъ къ разности или приращенію Δy какой нисетъ его функціи y .

При чемъ замѣтитъ надлежитъ, что приращеніе Δy функціи y такъ зависитъ отъ приращенія Δx переменнаго количества x , что когда сіе послѣднее приращеніе положится $= 0$, то и первое такъ же будетъ $= 0$. Ибо функція y количества x не иначе измѣняется, какъ когда оное количество измѣняется или приемлетъ приращеніе; слѣдовательно когда количество x остается безъ измѣненія или приращенія, тогда и функція y перестаетъ измѣняться или принимать приращеніе, и слѣдовательно когда положится $\Delta x = 0$, тогда будетъ и $\Delta y = 0$.

(6.) Что бы яснѣе видѣть можно было, какимъ образомъ приращеніе функціи y переменнаго количества x зависитъ отъ приращенія сего количества и по мѣрѣ измѣненія онаго само измѣняется; то мы возьмемъ вмѣсто унѣкоторыхъ простѣйшихъ функціи количества x , каковы суть ax , ax^2 , ax^3 и проч., гдѣ a постоянное количество, и сыщемъ ихъ разности или приращенія.

1 *

да ища длину обыкновенной параболы, находимъ, что она изображается нѣкоторою трансцендентною функціею, то говоримъ, что сія кривая линія есть *прямою неизмѣримая*. Что же принадлежитъ до того, что вообще ни логарифмы, ни тригонометрическія линіи прямою линіею точно не опредѣляются, то потому, что мы на самомъ дѣлѣ ни логарифмики описать, ни дуги круга прямою линіею изобразить точно не можемъ.

Отсюда всякъ видѣть можетъ, что трансцендентныя количества въ разсужденіи алгебраическихъ суть почти тоже самое, что неизмѣримыя въ разсужденіи соизмѣримыхъ.

И такъ пусть во первыхъ будетъ функція $y = ax$; придавъ количеству x приращеніе Δx , такъ чтобы оное сдѣлалось $x + \Delta x$, поставимъ сію величину вмѣсто x , и положимъ, что отъ того y сдѣлается y' ; будетъ $y' = a(x + \Delta x) = ax + a\Delta x$, и потому

$$\Delta y = y' - y = a\Delta x.$$

Откуда, по раздѣленіи на Δx , мы имѣемъ отношеніе приращеній функціи y и самаго переменнаго количества x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Изъ чего явствуется, что отношеніе приращенія функціи $y = ax$ къ приращенію переменнаго количества x есть постоянное и совсѣмъ независимое отъ частной величины оныхъ приращеній.

Пусть теперь будетъ функція $y = ax^2$; придавъ количеству x приращеніе Δx , такъ чтобы оное сдѣлалось $x + \Delta x$, поставимъ сію величину вмѣсто x , и положимъ, что отъ того y сдѣлается y' ; будетъ $y' = a(x + \Delta x)^2 = ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2$, и потому

$$\Delta y = y' - y = 2ax\Delta x + a\Delta x^2.$$

Откуда, по раздѣленіи на Δx , мы имѣемъ отношеніе приращеній функціи y и самаго переменнаго количества x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Здѣсь отношеніе приращеній функціи $y = ax^2$ и переменнаго количества x состоитъ изъ двухъ частей, изъ коихъ одна $2ax$ не зависитъ отъ частной величины приращеній, а другая $a\Delta x$ заключаетъ въ себѣ одно изъ оныхъ Δx ; почему отъ измѣненія сего приращенія Δx , при тѣхъ же величинахъ количества x и функціи y , отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ измѣняясь станеть, при томъ такъ, что отъ уменьшенія

Δx отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, какъ равное $2ax + a\Delta x$, будетъ приближаться къ $2ax$; однако, доколѣ Δx будетъ имѣть какую нисеть величину, отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не сдѣлается равно $2ax$; и какъ съ другой стороны опнявши отъ Δx всякую величину, то есть положивши $\Delta x = 0$, сдѣлается и $\Delta y (= 2ax\Delta x + a\Delta x^2) = 0$, такъ что отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ тогда ничего уже изображать не будетъ; то явствуется, что здѣсь нижимъ образомъ положить не можно приращенія $\Delta x = 0$, а можно

покро оное уменьшатъ, раздѣляя, на примѣръ, пополамъ, половину его паки пополамъ и такъ далѣе безъ конца. Такимъ образомъ измѣняемое отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ($= 2ax + a\Delta x$) никогда до непремѣняемаго количества $2ax$ не достигнетъ, а можетъ покро имѣть съ нимъ разность меньшую, нежели всякая по произволѣю данная величина. Ибо пусть она величина $= D$, и чрезъ раздѣленіе пополамъ да сдѣлается на послѣдокъ $\Delta x < \frac{D}{a}$; тогда будетъ $a\Delta x < D$, и потому такъ же разность $\frac{\Delta y}{\Delta x} - 2ax (= a\Delta x) < D$. Изъ чего явствуетъ, что $2ax$ есть истинный предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть еще будетъ функція $y = ax^3$; придавъ количеству x приращеніе Δx , такъ чтобы оно сдѣлалось $x + \Delta x$, поставимъ сію величину вмѣсто x , и положимъ, что y отъ того сдѣлается y' ; будетъ $y' = a(x + \Delta x)^3 = ax^3 + 3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3$, и потому

$$\Delta y = y' - y = 3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3.$$

Откуда, по раздѣленіи на Δx , мы имѣемъ отношеніе приращеній функціи y и самаго переменнаго количества x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2.$$

Здѣсь, какъ и въ предвѣдущемъ случаѣ, отношеніе приращеній функціи $y = ax^3$ и переменнаго количества x состоитъ изъ двухъ частей, изъ коихъ одна $3ax^2$ не зависитъ отъ частной величины приращеній, а другая $3ax\Delta x + a\Delta x^2 (= (3ax + a\Delta x)\Delta x)$ заключаетъ въ себѣ одно изъ оныхъ Δx ; почему отъ измѣненія сего приращенія Δx , при тѣхъ же величинахъ количества x и функціи y , отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ измѣняется спанетъ, при томъ такъ, что отъ уменьшенія Δx отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, какъ равно $3ax^2 + (3ax + a\Delta x)\Delta x$, будетъ приближаться къ $3ax^2$; однако, доколь Δx будетъ имѣть какую нисетъ величину, отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не сдѣлается равно $3ax^2$; и какъ съ другой стороны отнявши отъ Δx всякую величину, то есть положивши $\Delta x = 0$, сдѣлается и $\Delta y (= 3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3) = 0$, такъ что отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ тогда ничего уже изображать не будетъ; то явствуетъ,

что здѣсь оппюдь положить не можно приращенія $\Delta x = 0$, а можно токмо оное уменьшать, раздѣляя, напимѣрь, пополамъ, половину его паки пополамъ и такъ далѣе безъ конца. Такимъ образомъ измѣняемое опношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x} (= 3ax^2 + (3ax + a\Delta x)\Delta x)$ никогда до непрѣбняемаго количества $3ax^2$ не достигнетъ, а можетъ токмо имѣть съ нимъ разность меньшую, нежели всякая по произволію данная величина. Ибо пусть оная величина $= D$, и чрезъ раздѣленіе пополамъ да сдѣлается на послѣдокъ $\Delta x < \frac{D}{3ax + ak}$, гдѣ количество k взято по произволію больше Δx ; тогда будетъ $(3ax + ak)\Delta x < D$, и тѣмъ паче $(3ax + a\Delta x)\Delta x < D$, и потому такъ же разность $\frac{\Delta y}{\Delta x} - 3ax^2 (= (3ax + a\Delta x)\Delta x) < D$. Изъ чего явспивуетъ, что $3ax^2$ есть истинный предѣлъ опношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(7.) Неостанавливаясь болѣе на сихъ частныхъ случаяхъ, мы замѣтимъ, что изъ нихъ довольно явспивуетъ, что здѣсь два главные предмета намъ представляются: 1) по разности или приращенію перемѣннаго количества x , находить разность или приращеніе всякой функціи y онаго количества x , и 2) по найденіи изъ того опношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сихъ разностей или приращеній, сыскивать предѣлъ онаго, буде сей послѣдній имѣетъ мѣсто во всѣхъ возможныхъ функціяхъ.

Но хопя по видимому первый предметъ непосредственно предшествовать второму долженствуетъ, однако сей послѣдній не зависимо отъ перваго разсматриваемъ быть можетъ, и даже служилъ оному основаніемъ посредствомъ теоремы, извѣстной подъ именемъ *Тейлоровой*, которая доставляетъ общій способъ разлагать функціи въ ряды; чего сей первый предметъ, какъ то явно, необходимо пребуетъ. И такъ начать намъ слѣдуетъ вторымъ изъ означенныхъ предметовъ, и мы здѣсь единственно токмо онымъ и занимаемся будемъ.

(8.) И во первыхъ при семъ встрѣчается намъ затрудненіе, какимъ образомъ мы удостовѣриться можемъ, что вообще опношеніе разностей или приращеній функціи и самаго перемѣннаго количества предѣлъ имѣетъ? Ибо виды функцій до безконечности разнствуютъ между

собою. Но затрудненіе сіе по счастію уничтожаетъ Геометрія, которая представляетъ намъ для сего покло два главные рода линій: прямыя и кривыя, помощію коихъ всѣ возможныя функціи изобразиться могутъ, какъ изъ слѣдующаго явствуетъ.

Поелику функція y количества x есть нѣкоторое алгебраическое выраженіе, составленное изъ онаго количества x и постоянныхъ; то явствуетъ, что между функціею y и количествомъ x имѣется уравненіе, которое вообще мы означимъ такъ: $F(x, y) = 0$, и которое есть таково, что по различнымъ величинамъ, придаваемымъ количеству x , даетъ и для y такъже различныя величины, ибо отъ измѣненія количества x функція y сама измѣняется (ч. 2.).

Положивъ сіе, проведемъ двѣ оси AX и AU , взаимно перпендикулярныя, и взявъ на одной изъ нихъ, какъ AX , отъ точки взаимнаго ихъ пресѣченія A какую нисетъ абсциссу AP , положимъ оную $AP = x$; потомъ отъ конца ея P проведемъ ординату PM , параллельную другой оси AU , таковую, чтобы положивъ оную $PM = y$, вышло $F(x, y) = 0$. Явно, что симъ образомъ въ неопредѣленномъ пространствѣ $XAУ$ опредѣляется точка M таковая, что когда отъ нея проведется ордината PM , параллельная оси AU , то оная съ отсѣченною на оси AX абсциссою AP удовлетворяютъ свойству, изображаемому уравненіемъ $F(x, y) = 0$; и какъ абсцисса AP взята по произволу, то явствуетъ, что чрезъ подобное предвѣдущему строеніе мы можемъ имѣть въ пространствѣ $XAУ$ безчисленное множество точекъ, какова есть M , отъ коихъ когда проведутся ординаты, параллельныя оси AU , то онныя съ отсѣченными на оси AX абсциссами удовлетворяютъ тому же самому свойству, изображаемому уравненіемъ $F(x, y) = 0$. Изъ чего слѣдуетъ, что должна быть нѣкая непрерывная линія BS , прямая или кривая, на которой всѣ таковыя точки находятся, или все поже, которая всѣ возможныя ординаты ограничиваетъ такимъ образомъ, что каждая изъ оныхъ съ соотвѣствующею абсциссою удовлетворяютъ свойству, изображаемому уравненіемъ $F(x, y) = 0$. Ибо если бы положимъ, что между какими нисетъ точками M и N таковая линія прерывается, такъ что между ими остается нѣкоторой промежутокъ, то сколь бы въ прочемъ онъ малъ ни былъ, всегда можно будетъ взять на оси AX нѣкую точку R , изъ которой

проведенная ордината RO будетъ падать между ординатами PM и QN, проведенными опъ пѣхъ почекъ M и N, и слѣдовательно можно будетъ опредѣлить между M и N такую точку O, опъ которой когда проведемъ ордината OR, то съ соотвѣтствующею абсциссою AR удовлетворяетъ свойству, изображаемому уравненіемъ $F(x, y) = 0$; что противно предъ симъ сдѣланному положенію.

Въ прочемъ само по себѣ разумѣется, что уравненіе $F(x, y) = 0$ или функція y количества x по свойству своему даетъ для y всегда дѣйствительныя величины при всѣхъ придаваемыхъ количеству x величинахъ, по крайней мѣрѣ въ пространствѣ, между какими нисетъ двумя предѣлами, на примѣрѣ опъ $x = a$ до $x = b$, содержащемся; и что всегда положить можно.

(9) Теперь, для узнанія, въ какомъ случаѣ функція y количества x или уравненіе между x и y даетъ прямую и въ какомъ кривую линію, возьмемъ самое общее первой степени уравненіе $Ay = Bx + C$, и по раздѣленіи его на A , положимъ $\frac{B}{A} = a$ $\frac{C}{A} = b$; опъ чего оно

Черт. 2. сдѣлается $y = ax + b$. Потомъ проведемъ двѣ оси AX и AY, взаимно перпендикулярныя, на одной изъ нихъ, какъ AY, отсѣчемъ $AC = b$, и проведемъ прямую CZ, параллельную AX; по семъ отсѣкши $CD = 1$ и поставивъ перпендикулярную прямую $DE = a$, проведемъ чрезъ точки C и E неопредѣленную прямую BS, которая и будетъ та самая, каковую взятое нами уравненіе представляетъ. Ибо взявъ абсциссу $AP = x$ и проведемъ ординату $PM = y$, пресѣкающую прямую CZ въ точкѣ Q, находимъ, что будетъ $PQ = AC = b$, $CQ = AP = x$ и для подобія треугольниковъ CQM и CDE, $QM = ax$; чего ради будетъ $PM = y = ax + b$, то есть взятое нами уравненіе.

И обратно, когда дана будетъ прямая линія BS, то есть дано будетъ положеніе ея въ разсужденіи осей AX и AY, то уравненіе, ее изображающее, или функція, ординату ея представляющая, будетъ первой степени. Ибо пусть $AC = b$ и $AF = c$; чрезъ что положеніе прямой BS въ разсужденіи осей AX и AY опредѣлено будетъ; но изъ подобія треугольниковъ CQM и CAF мы имѣемъ $QM = \frac{bx}{c}$, чего ради будетъ $PM = y = \frac{bx}{c} + b$, или полагая $DE = \frac{b}{c} = a$, будетъ $y = ax + b$, то же самое уравненіе.