

Л.Д. Фадеев

**Лекции по квантовой механике для
студентов-математиков**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Л11

Л11 **Л.Д. Фадеев**
Лекции по квантовой механике для студентов-математиков / Л.Д. Фадеев – М.: Книга по Требованию, 2024. – 200 с.

ISBN 978-5-458-26447-1

ISBN 978-5-458-26447-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

§ 1. Алгебра наблюдаемых классической механики

Рассмотрим простейшую задачу классической механики — задачу о движении материальной точки (частицы) с массой m в силовом поле $V(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор частицы. Сила, действующая на частицу,

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}.$$

Основными физическими характеристиками частицы являются ее координаты x_1, x_2, x_3 и проекции вектора скорости $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$. Все остальные характеристики есть функции от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$, например, импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, момент импульса $\mathbf{I} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = m\mathbf{x} \times \mathbf{v}$, энергия частицы $E = m\mathbf{v}^2/2 + V(\mathbf{x})$.

Уравнения движения материальной точки в форме Ньютона имеют вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}. \quad (1)$$

В дальнейшем удобно вместо скорости $\mathbf{v}$ в качестве основной переменной использовать импульс $\mathbf{p}$. В новых переменных уравнения движения записываются таким образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (2)$$

Замечая, что $\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$, $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$, где $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$ — функция Гамильтона для частицы в потенциальном поле, мы приходим к уравнениям в форме Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3)$$

Из курса теоретической механики известно, что широкий класс механических систем и, в частности, консервативные

системы описываются уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь q_i и p_i — обобщенные координаты и импульсы, $H = H(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ — функция Гамильтона, число n называется числом степеней свободы системы. Напомним, что для консервативной системы функция Гамильтона H совпадает с выражением для полной энергии системы в переменных q_i и p_i . Выпишем функцию Гамильтона для системы N материальных точек, попарно взаимодействующих между собой

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j}^N V_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{x}_i). \quad (5)$$

Здесь в качестве обобщенных координат q взяты декартовы координаты частиц, число степеней свободы такой системы $n = 3N$, $V_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ есть потенциал взаимодействия i -й и j -й частиц. Зависимость V_{ij} только от разности $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ обеспечивает выполнение третьего закона Ньютона. (Действительно, сила, действующая на i -ю частицу со стороны j -й частицы, $\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{x}_j} = -\mathbf{F}_{ji}$.) Потенциалы $V_i(\mathbf{x}_i)$ описывают

взаимодействие i -й частицы с внешним полем. Первое слагаемое в формуле (5) — кинетическая энергия системы частиц.

Для произвольной механической системы все физические характеристики есть функции от обобщенных координат и импульсов. Мы введем в рассмотрение множество $\mathfrak{A}$ всех вещественных, бесконечно дифференцируемых функций* $f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$, которые будем называть наблюдаемыми. Множество наблюдаемых $\mathfrak{A}$, очевидно, является линейным пространством и образует вещественную алгебру с обычными для функций операциями сложения и умножения. Вещественное $2n$ -мерное пространство с элементами $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ называется фазовым пространством и обозначается через $\mathcal{M}$. Таким образом, алгебра наблюдаемых классической механики есть алгебра вещественных гладких функций, задаваемых на фазовом пространстве $\mathcal{M}$.

Мы введем ниже в алгебре наблюдаемых еще одну операцию, которая связана с эволюцией механической системы. Для простоты все дальнейшее изложение ведется на примере системы с одной степенью свободы. Уравнения Гамильтона в этом случае имеют вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad H = H(q, p). \quad (6)$$

* Мы не обсуждаем вопрос о введении топологии в алгебре наблюдаемых. К счастью, большинство физических вопросов от этой топологии не зависят.

Задача Коши для системы (6) и начальных условий

$$q|_{t=0} = q_0, \quad p|_{t=0} = p_0 \quad (7)$$

имеет единственное решение

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad p = p(q_0, p_0, t). \quad (8)$$

Для сокращения записи точку фазового пространства (q, p) иногда будем обозначать через μ , а уравнения Гамильтона записывать в виде

$$\dot{\mu} = v(\mu), \quad (9)$$

где $v(\mu)$ — векторное поле этих уравнений, сопоставляющее каждой точке μ фазового пространства вектор v с компонентами $\frac{\partial H}{\partial p}$, $-\frac{\partial H}{\partial q}$.

Уравнения Гамильтона порождают однопараметрическую коммутативную группу преобразований фазового пространства в себя*

$$G_t: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

где $G_t\mu$ есть решение уравнений Гамильтона с начальным условием $G_t\mu|_{t=0} = \mu$. Справедливы равенства:

$$G_{t+s} = G_t G_s = G_s G_t, \quad G_t^{-1} = G_{-t}. \quad (10)$$

В свою очередь преобразования G_t порождают семейство преобразований алгебры наблюдаемых в себя

$$U_t: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A},$$

где

$$U_t f(\mu) = f_t(\mu) = f(G_t \mu). \quad (11)$$

В координатной записи функция $f_t(q, p)$ определяется следующим образом:

$$f_t(q_0, p_0) = f(q(q_0, p_0, t), p(q_0, p_0, t)). \quad (12)$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f_t(q, p)$. Для этого продифференцируем тождество $f_{s+t}(\mu) = f_t(G_s \mu)$ по переменной s и положим $s = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{s+t}(\mu)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial f_t(\mu)}{\partial t}, \\ \frac{\partial f_t(G_s \mu)}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \nabla f_t(\mu) \cdot v(\mu) = \frac{\partial f_t}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f_t}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}$$

* Мы предполагаем, что уравнения Гамильтона с начальными условиями (7) имеют единственное решение на всей вещественной оси. Легко построить примеры, в которых глобальное решение и соответственно группа преобразований G_t не существуют. Эти случаи не представляют интереса, и мы их не рассматриваем.

Таким образом, функция $f_t(q, p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f_t}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f_t}{\partial p} \quad (13)$$

и начальному условию

$$f_t(q, p)|_{t=0} = f(q, p). \quad (14)$$

Уравнение (13) с начальным условием (14) имеет единственное решение, которое может быть получено по формуле (12), т. е. для построения решений уравнения (13) достаточно знать решения уравнений Гамильтона.

Уравнение (13) может быть переписано в виде

$$\frac{df_t}{dt} = \{H, f_t\}, \quad (15)$$

где $\{H, f_t\}$ — скобка Пуассона функций H и f_t . Для произвольных наблюдаемых f и g скобка Пуассона определяется формулой

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p},$$

а в случае системы с n степенями свободы

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Перечислим основные свойства скобок Пуассона:

- 1) $\{f, g + \lambda h\} = \{f, g\} + \lambda \{f, h\}$ (линейность);
- 2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (кососимметричность);
- 3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (тождество Якоби);
- 4) $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$.

Свойства 1), 2) и 4) прямо следуют из определения скобок Пуассона. Свойство 4) показывает, что операция «скобка Пуассона» есть дифференцирование алгебры наблюдаемых. Действительно, скобка Пуассона может быть переписана в форме

$$\{f, g\} = X_f g,$$

где $X_f = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$ — линейный дифференциальный оператор первого порядка, и свойство 4) принимает вид

$$X_f gh = (X_f g)h + gX_f h.$$

Свойство 3) может быть проверено дифференцированием, однако его можно доказать следующим рассуждением. Каждое слагаемое двойной скобки Пуассона содержит множителем вторую производную от одной из функций по одной из переменных, т. е. левая часть 3) есть линейная однородная функция от вто-

рых производных. С другой стороны, вторые производные от h могут входить только в сумму $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = (X_f X_g - X_g X_f)h$, а коммутатор линейных дифференциальных операторов первого порядка является дифференциальным оператором первого порядка, поэтому вторые производные от h в левую часть 3) не войдут. В силу симметрии левая часть 3) вообще не содержит вторых производных, т. е. равна нулю.

Скобка Пуассона $\{f, g\}$ вводит в алгебру наблюдаемых структуру вещественной алгебры Ли*. Итак, множество наблюдаемых обладает следующей алгебраической структурой. Множество $\mathfrak{A}$ является:

- 1) вещественным линейным пространством;
- 2) коммутативной алгеброй с операцией fg ;
- 3) алгеброй Ли с операцией $\{f, g\}$.

Две последние операции связаны соотношением

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

В алгебре наблюдаемых $\mathfrak{A}$ есть выделенный элемент — функция Гамильтона H , роль которой — описание изменения наблюдаемых со временем

$$\frac{df_t}{dt} = \{H, f_t\}.$$

Покажем, что отображение $U_t: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ сохраняет все операции в $\mathfrak{A}$:

$$h = f + g \rightarrow h_t = f_t + g_t,$$

$$h = fg \rightarrow h_t = f_t g_t,$$

$$h = \{f, g\} \rightarrow h_t = \{f_t, g_t\},$$

т. е. является автоморфизмом алгебры наблюдаемых. Проверим для примера последнее утверждение. Для этого достаточно убедиться в том, что уравнение и начальное условие для h_t есть следствие уравнений и начальных условий для функций f_t и g_t

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial t} &= \left\{ \frac{\partial f_t}{\partial t}, g_t \right\} + \left\{ f_t, \frac{\partial g_t}{\partial t} \right\} = \\ &= \{\{H, f_t\}, g_t\} + \{f_t, \{H, g_t\}\} = \{H, \{f_t, g_t\}\} = \{H, h_t\}. \end{aligned}$$

Здесь были использованы свойства 2) и 4) скобок Пуассона. Далее,

$$h_t|_{t=0} = \{f_t, g_t\}|_{t=0} = \{f, g\}.$$

Теперь наше утверждение следует из единственности решения уравнения (13) с начальным условием (14).

* Напомним, что линейное пространство с бинарной операцией, удовлетворяющей условиям 1)–3), называется алгеброй Ли.

§ 2. Состояния

Понятие состояния системы можно связать непосредственно с условиями эксперимента. Всякий физический эксперимент сводится к измерению численного значения наблюдаемой для системы, поставленной в определенные условия, которые можно назвать условиями эксперимента. Считается, что эти условия могут воспроизводиться многократно, однако мы не предполагаем заранее, что при повторном проведении эксперимента измерение даст то же самое значение наблюдаемой. На вопрос, с чем связана неопределенность в результатах эксперимента, возможны два ответа.

1) Число условий, которые фиксируются при проведении экспериментов недостаточно для того, чтобы однозначно определить результаты измерения наблюдаемых. Если неоднозначность возникает только по этой причине, то по крайней мере в принципе эти условия можно дополнить новыми, т. е. поставить эксперимент более «чисто» и тогда результаты всех измерений будут определены однозначно.

2) Свойства системы таковы, что при повторных экспериментах наблюдаемые могут принимать различные значения, независимо от числа и выбора условий эксперимента.

Разумеется, если имеет место 2), то недостаточность условий может лишь усугублять неоднозначность результатов экспериментов. Подробно 1) и 2) мы обсудим после того, как научимся описывать состояния в классической и квантовой механике.

Мы будем считать, что условия эксперимента определяют состояние системы, если при многократном повторении опыта при этих условиях возникают вероятностные распределения для всех наблюдаемых. В этом случае мы будем говорить об измерении наблюдаемой f для системы, находящейся в состоянии ω .

Более точно: состояние ω на алгебре наблюдаемых $\mathfrak{A}$ сопоставляет каждой наблюдаемой f вероятностное распределение ее возможных значений, т. е. меру на вещественной оси $\mathbf{R}$.

Пусть f — наблюдаемая, E — борелевское множество на вещественной оси $\mathbf{R}$. Тогда определение состояния ω может быть записано

$$f, E \xrightarrow{\omega} \omega_f(E).$$

Напомним свойства вероятностей меры

$$0 \leq \omega_f(E) \leq 1, \quad \omega_f(\emptyset) = 0, \quad \omega_f(\mathbf{R}) = 1, \quad (1)$$

если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $\omega_f(E_1 \cup E_2) = \omega_f(E_1) + \omega_f(E_2)$.

Среди наблюдаемых могут встретиться функционально зависмые, поэтому необходимо наложить условие на вероятностные распределения таких наблюдаемых. Если наблюдаемая φ есть функция от наблюдаемой f , $\varphi = \varphi(f)$, то это утверждение

подразумевает, что измерение численного значения наблюдаемой f , которое приводит к значению f_0 , одновременно является измерением наблюдаемой φ и дает для нее численное значение $\varphi_0 = \varphi(f_0)$. Поэтому $\omega_f(E)$ и $\omega_{\varphi(f)}(E)$ связаны соотношением

$$\omega_{\varphi(f)}(E) = \omega_f(\varphi^{-1}(E)), \quad (2)$$

где $\varphi^{-1}(E)$ — прообраз множества E при отображении φ .

Выпуклая комбинация вероятностных мер

$$\omega_f(E) = \alpha \omega_{1f}(E) + (1 - \alpha) \omega_{2f}(E), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3)$$

удовлетворяет свойствам (1) для любой наблюдаемой f и соответствует состоянию, которое мы будем обозначать

$$\omega = \alpha \omega_1 + (1 - \alpha) \omega_2. \quad (4)$$

Таким образом, состояния образуют выпуклое множество. Иногда выпуклую комбинацию (4) состояний ω_1 и ω_2 называют смесью этих состояний. Если для некоторого состояния ω из (4) следует, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, будем говорить, что состояние ω не раскладывается в выпуклую комбинацию других состояний. Такие состояния называются чистыми, все остальные — смешанными.

В качестве множества E удобно выбирать интервал вещественной оси $(-\infty, \lambda]$. По определению $\omega_f(\lambda) = \omega_f((-\infty, \lambda])$ и является функцией распределения наблюдаемой f в состоянии ω . Численно $\omega_f(\lambda)$ равна вероятности получить значение, не превосходящее λ при измерении наблюдаемой f в состоянии ω . Из (1) следует, что функция распределения $\omega_f(\lambda)$ — неубывающая функция λ , $\omega_f(-\infty) = 0$, $\omega_f(+\infty) = 1$.

Математическое ожидание (среднее значение) наблюдаемой f в состоянии ω определяется формулой*

$$\langle f | \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\omega_f(\lambda).$$

Заметим, что знание математических ожиданий для всех наблюдаемых эквивалентно знанию вероятностных распределений. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию от наблюдаемой $\theta(\lambda - f)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что

$$\omega_f(\lambda) = \langle \theta(\lambda - f) | \omega \rangle. \quad (5)$$

* Обозначение $\langle f | \omega \rangle$ для среднего значения наблюдаемой не следует путать с часто используемым в квантовой механике обозначением Дирака для скалярного произведения векторов $\langle \varphi | \psi \rangle$.

Потребуем выполнения следующих, естественных с физической точки зрения условий для средних значений наблюдаемых:

- 1) $\langle C | \omega \rangle = C$,
- 2) $\langle f + \lambda g | \omega \rangle = \langle f | \omega \rangle + \lambda \langle g | \omega \rangle$,
- 3) $\langle f^2 | \omega \rangle \geq 0$.

Если такие требования введены, то реализация алгебры наблюдаемых уже сама определяет способ описания состояний. Действительно, среднее значение есть линейный положительный функционал, определенный на алгебре наблюдаемых $\mathfrak{A}$. Общая форма такого функционала:

$$\langle f | \omega \rangle = \int_{\mathcal{M}} f(p, q) d\mu_{\omega}(p, q), \quad (7)$$

где $d\mu_{\omega}(p, q)$ — дифференциал меры на фазовом пространстве, а интеграл берется по всему фазовому пространству. Из условия 1) следует, что

$$\int_{\mathcal{M}} d\mu_{\omega}(p, q) = \mu_{\omega}(\mathcal{M}) = 1. \quad (8)$$

Мы видим, что состояние в классической механике описывается заданием вероятностного распределения на фазовом пространстве. Формулу (7) можно переписать в виде

$$\langle f | \omega \rangle = \int_{\mathcal{M}} f(p, q) \rho_{\omega}(p, q) dp dq, \quad (9)$$

т. е. мы приходим к обычному в статистической физике описанию состояния системы при помощи функции распределения $\rho_{\omega}(p, q)$, которая в общем случае является обобщенной положительной функцией. Условие нормировки функции распределения имеет вид

$$\int_{\mathcal{M}} \rho(p, q) dp dq = 1. \quad (10)$$

В частности, легко видеть, что чистому состоянию соответствует функция распределения

$$\rho(q, p) = \delta(q - q_0) \delta(p - p_0), \quad (11)$$

где $\delta(x)$ — δ -функция Дирака. Соответствующая мера на фазовом пространстве сосредоточена в точке q_0, p_0 , и чистое состояние определяется заданием этой точки фазового пространства. По этой причине фазовое пространство $\mathcal{M}$ иногда называют пространством состояний. Среднее значение наблюдаемой f в чистом состоянии ω

$$\langle f | \omega \rangle = f(q_0, p_0). \quad (12)$$

Эта формула непосредственно следует из определения δ -функции

$$f(q_0, p_0) = \int_M f(q, p) \delta(q - q_0) \delta(p - p_0) dq dp. \quad (13)$$

Обычно в курсах механики ограничиваются изучением чистых состояний, а смешанные состояния с функцией распределения отличной от (11) рассматриваются в статистической физике. Введение с самого начала в теорию смешанных состояний оправдывается следующими обстоятельствами. Формулировка классической механики на языке состояний и наблюдаемых наиболее близка к формулировке квантовой механики и позволяет единообразно описывать состояния механики и статистической физики. Такая формулировка позволит нам в дальнейшем детально проследить за предельным переходом от квантовой механики к классической. Мы увидим, что в квантовой механике тоже существуют чистые и смешанные состояния, причем при предельном переходе чистое квантовое состояние может превращаться в смешанное классическое, поэтому предельный переход проще всего описывается при единообразном рассмотрении чистых и смешанных состояний.

Выясним теперь физический смысл смешанных и чистых состояний классической механики и найдем причину, по которой результаты опытов необязательно определяются однозначно условиями эксперимента.

Рассмотрим смесь состояний ω_1 и ω_2

$$\omega = \alpha \omega_1 + (1 - \alpha) \omega_2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для средних значений, очевидно, справедлива формула

$$\langle f | \omega \rangle = \alpha \langle f | \omega_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle f | \omega_2 \rangle. \quad (14)$$

Формулы (14) и (3) допускают следующее толкование. Утверждение о том, что система находится в состоянии ω , эквивалентно утверждению, что система с вероятностью α находится в состоянии ω_1 и с вероятностью $(1 - \alpha)$ в состоянии ω_2 . Заметим, что такое толкование возможно, но не является необходимым.

Простейшее смешанное состояние является выпуклой комбинацией двух чистых

$$\rho(q, p) = \alpha \delta(q - q_1) \delta(p - p_1) + (1 - \alpha) \delta(q - q_2) \delta(p - p_2).$$

Возможны смеси n чистых состояний

$$\rho(q, p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(q - q_i) \delta(p - p_i), \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Здесь α_i может быть истолковано как вероятность реализации чистого состояния, задаваемого точкой фазового пространства q_i, p_i . Наконец, в общем случае для функции распределения

$$\rho(q, p) = \int_{\mathcal{M}} \rho(q_0, p_0) \delta(q - q_0) \delta(p - p_0) dq_0 dp_0.$$

Такая запись приводит к обычному в статистической физике толкованию функции распределения: $\int_{\Omega} \rho(q, p) dq dp$ есть вероятность обнаружить систему в чистом состоянии, изображаемом точкой из области Ω фазового пространства. Еще раз подчеркнем, что в таком толковании нет необходимости, так как чистые и смешанные состояния могут быть описаны в рамках единого формализма.

Одной из важнейших характеристик вероятностного распределения является дисперсия

$$\Delta_{\omega}^2 f = \langle (f - \langle f | \omega \rangle)^2 | \omega \rangle = \langle f^2 | \omega \rangle - \langle f | \omega \rangle^2. \quad (15)$$

Покажем, что смешивание состояний приводит к увеличению дисперсии. Более точная формулировка этого утверждения содержится в неравенствах

$$\Delta_{\omega}^2 f \geq \alpha \Delta_{\omega_1}^2 f + (1 - \alpha) \Delta_{\omega_2}^2 f, \quad (16)$$

$$\Delta_{\omega} f \Delta_{\omega} g \geq \alpha \Delta_{\omega_1} f \Delta_{\omega_1} g + (1 - \alpha) \Delta_{\omega_2} f \Delta_{\omega_2} g, \quad (17)$$

причем знаки равенства имеют место только при условии, что средние значения наблюдаемых в состояниях ω_1 и ω_2 совпадают

$$\langle f | \omega_1 \rangle = \langle f | \omega_2 \rangle, \quad \langle g | \omega_1 \rangle = \langle g | \omega_2 \rangle.$$

В ослабленной форме (16) и (17) можно записать в виде

$$\Delta_{\omega}^2 f \geq \min(\Delta_{\omega_1}^2 f, \Delta_{\omega_2}^2 f), \quad (18)$$

$$\Delta_{\omega} f \Delta_{\omega} g \geq \min(\Delta_{\omega_1} f \Delta_{\omega_1} g, \Delta_{\omega_2} f \Delta_{\omega_2} g). \quad (19)$$

При доказательстве используется элементарное неравенство $\varphi(x) = \alpha + (1 - \alpha)x^2 - (\alpha + (1 - \alpha)x)^2 \geq 0$, $-\infty < x < \infty$, (20)

причем $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 1$. (21)

Используя (14) и (20), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega}^2 f &= \langle f^2 | \omega \rangle - \langle f | \omega \rangle^2 = \\ &= \alpha \langle f^2 | \omega_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle f^2 | \omega_2 \rangle - [\alpha \langle f | \omega_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle f | \omega_2 \rangle]^2 \geq \\ &\geq \alpha \langle f^2 | \omega_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle f^2 | \omega_2 \rangle - \alpha \langle f | \omega_1 \rangle^2 - (1 - \alpha) \langle f | \omega_2 \rangle^2 = \\ &= \alpha \Delta_{\omega_1}^2 f + (1 - \alpha) \Delta_{\omega_2}^2 f. \end{aligned}$$