

С. Г. Гиндикин

Алгебра логики в задачах

**Москва
«Книга по Требованию»**

С11 **С. Г. Гиндикин**
Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 288 с.

ISBN 978-5-458-29587-1

Научно-популярная литература по математической логике очень обширна и рассчитана на самые различные категории читателей. Школьники или взрослые, читающие популярную литературу в свободное от работы время, могут найти в ней большое число забавных логических задач. Читатель, желающий пополнить свой математический багаж, в надежде, что это поможет в его практической деятельности, найдет в ней подробные описания практических (часто — псевдопрактических) приложений логики. Большое число популярных книг по логике порождено надеждой, что благодаря алгебре логики все школьники наконец-таки начнут разбираться в необходимых и достаточных условиях и прочих логических вопросах школьного курса математики. Пристрастие преподавателей математического анализа к вопросам о последовательностях, не имеющих предела, неравномерно непрерывных функциях и т. д. породило руководства, содержащие основанные на кванторах рецепты автоматического (без размышлений!) построения определений отрицательных понятий. Мы определенно не сможем перечислить все то, что читатель может почерпнуть в существующих книгах по математической логике. Мы все же решились увеличить на одну и без того большое число книг по логике, так как в большинстве известных нам элементарных книг в очень небольшой степени учтены интересы читателя, заинтересованного в содержательных — с точки зрения математики — теоремах и задачах. Этим читателям — в первую очередь студентам младших курсов университетов и пединститутов и ученикам старших классов математических школ — и адресована настоящая книга. Нам представляется полезным знакомство студентов-математиков с идеями конечной математики, в частности, алгебры логики, поскольку они качественно отличаются от идей традиционного университетского курса математики.

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

В книге рассмотрены, главным образом, три круга вопросов: проблемы полноты и функционально замкнутых классов, проблемы синтеза и оценки сложности схем, теория вероятностей на конечных булевых алгебрах. Всюду мы стремимся ввести читателя в круг идей, не стремясь получить наиболее законченные результаты. Нам хотелось бы, чтобы те, кто не собирается заниматься соответствующими вопросами, получили достаточную информацию, а те, у кого появится специальный интерес, были подготовлены к чтению специальной литературы.

Термин «алгебра логики» понимается в книге широко. Собственно алгебре логики, в которой изучаются логические операции над высказываниями (более общо, булевы операции на регулярных булевых алгебрах, см. § 2), посвящены §§ 1—7. В остальных параграфах рассматриваются смежные вопросы. Мы не отказываемся от рассмотрения традиционных вопросов, многократно излагавшихся. Читатель найдет здесь, в частности, обсуждение связей алгебры логики с элементарными вопросами теории доказательств и с построением определений отрицательных понятий. При этом мы рассчитываем, что у читателя здесь возникнут ассоциации с хорошо известными ему вещами и что излагаемые здесь формальные приемы окажутся ему полезными. Однако мы не надеемся, что эти приемы могут подменить умение проводить в тех же случаях содержательные рассуждения. Некоторое число технических упражнений, в основном в §§ 1, 2, 9, включено для того, чтобы в книге можно было найти необходимый материал для упражнений по соответствующим разделам курса математической логики пединститутов. Основная часть книги формально не использует сведений, выходящих за рамки школьного курса математики. Эпизодически, главным образом в изолированных задачах и примерах, используются некоторые факты из математического анализа. Эти места (хотя и не без некоторого ущерба) можно опустить.

Несколько слов о построении книги. Значительная часть математических книг может рассматриваться как «специальный курс на дому», и часто их прообразами являются реально читавшиеся специальные курсы. Хорошо известно, что одним из лучших способов усвоения некоторых разделов математики является решение циклов задач, на которые разбиваются теоремы. В таком плане строится работа многих университетских семинаров. Однако, к сожалению, довольно редко появляются книги, имитирующие работу

такого рода семинаров. Первоисточником этой книги являются семинары, проводившиеся автором в МГПИ им. В. И. Ленина; кроме того, отдельные ее части были использованы в цикле лекций и семинарских занятий в вечерней математической школе при МГУ для учащихся 7—8 классов. Руководитель семинаров указанного типа выполняет различные функции. Он дает определения, формулирует задачи, сопровождая это необходимыми пояснениями (эту роль играет основной текст книги). Если участники семинара не смогли самостоятельно найти решение, то он в несколько этапов дает указания, причем иногда в качестве таких указаний выступают ответы (этому посвящен раздел «Ответы и указания», следующий за основным текстом каждого параграфа). Наконец, ему приходится самому решать задачу, если указания не помогли — здесь опять-таки иногда роль решения играет просто ответ (этому соответствует раздел «Ответы и решения»).

Разумеется, даже если читателю пришлось заглянуть в раздел решений, не получив готового решения, то труд, потраченный на размышления над задачей, не окажется напрасным. И в том случае, когда читатель нашел решение задачи самостоятельно, ему следует просмотреть указания и решение, так как в них может содержаться дополнительная информация. (В то же время мы, конечно, не хотим никому навязывать именно тот вариант решения, который приводится в книге.) Допуская, что некоторые предпочтут сразу читать решения задач, об интересах этой категории читателей мы заботились лишь в минимальной степени.

В книге нет подробной библиографии, а лишь даются ссылки на литературу, в которой можно найти дополнительный материал, непосредственно примыкающий к содержанию книги. Не являются систематическими и указания приоритетного характера.

Пользуюсь случаем поблагодарить П. С. Новикова, у которого я учился математической логике, советами которого постоянно пользовался в процессе преподавания и с которым я обсуждал замысел книги. Я благодарен И. М. Яглому за постоянный интерес к моей работе над книгой, способствовавший ее выходу в свет, редакторам книги Ю. А. Гастеву и В. В. Донченко за критику и советы.

ПУТЕВОДИТЕЛЬ И УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Книга состоит из двенадцати параграфов. Внутри каждого параграфа ведется своя нумерация определений и задач, причем стоящее перед точкой число является номером параграфа (например, задача 3.12, определение 8.3).

§ 1 представляет из себя неформальное введение к остальной части книги. В нем вводятся операции над высказываниями, обсуждаются постановки основных задач алгебры логики на языке операций с высказываниями, устанавливаются связи с элементарной техникой доказательств.

Мы опираемся на интуитивные представления о том, что такое «высказывание», «ситуация». В конкретных случаях бывает ясно, какие ситуации могут встретиться при решении вопроса об истинности или ложности одного или нескольких (конечного числа) высказываний. В то же время для бесконечных совокупностей высказываний множество возможных ситуаций допускает естественное описание лишь в специальных случаях.

Формально на § 1 в дальнейшем нет ссылок принципиального характера. Поэтому читатель, по каким-то причинам не заинтересованный в информации собственно по алгебре высказываний, может ограничиться просмотром этого параграфа. Однако мы советуем с осторожностью решить для себя этот вопрос, так как, по нашему мнению, при изучении алгебры логики очень важно свободное владение интерпретацией основных ее фактов на языке алгебры высказываний. С другой стороны, некоторые могут быть заинтересованы в более неторопливом введении, содержащем большее число примеров и аналогий с хорошо известными фактами. Для этого в зависимости от вкусов читателя можно воспользоваться какой-либо из многочисленных книг по математической логике. Часть из них перечислена в списке литературы, относящейся к § 1.

Итак, формально чтение книги можно начинать с § 2. В нем вводится основной объект нашего исследования: функции алгебры логики (определение 2.1); при этом не обязательно понимать, что два значения, которые принимают переменные, можно интерпретировать как «истинностные» значения высказываний. Целый ряд фактов из § 1 в § 2 пересказывается, а часто и передоказывается на новом языке. В п. 2 § 2 вводится основная операция над функциями алгебры логики — суперпозиция, или образование сложной функции. Ее аналог, вероятно, хорошо знаком большинству читателей для функций действительной переменной. Однако усвоение приводимого нами индуктивного определения суперпозиции с расчлененными шагами может вызвать известные трудности. Поскольку это определение потребуется лишь для проведения строгих доказательств, начиная с § 3 (задача 3.7), до некоторых пор можно ограничиться пониманием суперпозиции как операции, состоящей в многократных подстановках одних функций в аргументы других функций и отождествлении каких-то аргументов. Тем не менее в какой-то момент важно усвоить определение 2.3, а главное — продумать схему основанных на нем индуктивных доказательств. В дальнейшем тексте книги читатель много раз столкнется с аналогичными доказательствами в других ситуациях (см., например, §§ 8, 9). В п. 2 содержатся также основные равносильности алгебры логики и ряд задач на преобразование формул. Вообще, в § 2 довольно много технических задач, причем при решении некоторых из них приходится проводить громоздкие выкладки. Читателю предстоит самому решить вопрос, в каких задачах и с какой степенью подробности ему следует проводить эти выкладки, но для дальнейшего важно, чтобы он умел их свободно проводить. Пп. 3 и 4 § 2 посвящены булевым алгебрам. Результаты этих пунктов позволяют интерпретировать результаты о функциях алгебры логики не только применительно к алгебре высказываний, но и, например, к алгебре множеств.

В п. 4 § 2 вводится важный класс булевых алгебр — регулярные булевы алгебры, для которых можно естественным образом определить операции, связанные со всеми функциями алгебры логики, — булевы операции. Эти вопросы заметно труднее основной части книги и могут быть пропущены при первоначальном чтении. Однако читателю, знакомому с основами теории множеств, советуем продумать общее определение теоретико-множественной операции (см.

стр. 43) и связь этих операций с функциями алгебры логики. Ссылки на пп. 3, 4 § 2 в дальнейшем тексте книги носят вспомогательный характер. Пп. 5—7 § 2 посвящены нормальным формам — специального вида представлениям функций алгебры логики через основные операции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Для случая высказываний они частично рассматривались в конце § 1. В этих пунктах много технических упражнений.

Небольшой по объему, но очень важный § 3 посвящен закону двойственности в алгебре логики. Тем, кто не читал п. 4 § 2, нужно пропустить несколько первых абзацев и начать с абзаца, предшествующего определению 3.1. Задачи 3.10 и 3.11 имеют вспомогательный характер: они понадобятся в § 6 при доказательстве теоремы Поста.

§ 4 посвящен представлению функций алгебры логики арифметическими полиномами по модулю 2 (полиномами Жегалкина). Основной материал содержится в задачах 4.1—4.7. Задачи 4.10—4.12 служат подготовкой к § 6.

В § 5, посвященном монотонным функциям алгебры логики, можно первоначально ограничиться задачами 5.1—5.11; задачи 5.12 и 5.13 понадобятся в § 7, задачи 5.14—5.16 — в § 6.

Центральной теореме алгебры логики — теореме Поста — и связанным с ней вопросам посвящен § 6. В теореме Поста содержатся условия на систему функций, необходимые и достаточные для того, чтобы суперпозициями входящих в нее функций были представимы все функции алгебры логики. Основной материал содержится в задачах 6.1—6.21; в задачах 6.22—6.27 содержится дополнительный материал. Основным является понятие функционально замкнутого класса (определение 6.2) — класса функций, замкнутого относительно суперпозиции.

В теореме Поста фигурирует пять функционально замкнутых классов, называемых предполными (они в некотором смысле максимальны). Следующий параграф (§ 7) посвящен изучению множества всех функционально замкнутых классов. Принципиальное описание структуры этого множества (постовская схема), а также описание задач, которые могут быть решены при помощи функционально замкнутых классов, содержится в п. 1. В п. 2 рассматривается более простая задача о функционально замкнутых классах, содержащих константы. Эти классы связаны с задачами, в которых наряду с суперпозицией участвует операция подстановки констант (расширенная суперпозиция). Это расширение

снимает основные трудности, имеющиеся в общей задаче, а сравнительно легко получаемый общий ответ позволяет достаточно хорошо освоиться с ситуацией, имеющейся в рассматриваемых вопросах. В заключение этого пункта приводится пример задачи, решаемой при помощи функционально замкнутых классов (относительно расширенной суперпозиции), — задача о самодвойственной полноте. Эта же задача в условиях обычной суперпозиции рассматривается в п. 3. Этот пункт в дальнейшем не используется, а потому его можно при желании пропустить, ограничившись нужным для дальнейшего определением 7.8. В п. 4 строится фрагмент постовской схемы (ее третий этаж), позволяющий решать проблемы базисов в предполных классах. Наконец, в п. 5 приводится без доказательства постовская схема и несколько задач на ее применение. В дальнейшем тексте ссылки на § 7 имеются лишь в п. 5 § 8 и п. 10 § 10.

§§ 8 и 9 посвящены теории схем. В § 8 рассматриваются схемы из функциональных элементов — устройств, реализующих функции алгебры логики. В п. 1 рассмотрения ведутся в предположении о мгновенном срабатывании этих элементов. Подробно исследуются соединения элементов, соответствующие суперпозициям функции алгебры логики, в связи с чем вводится понятие обратной связи. В предположениях п. 1 теорема Поста дает ответ на вопрос о том, каков должен быть запас основных функциональных элементов для того, чтобы любую функцию алгебры логики можно было реализовать схемой из этих элементов.

В п. 2 мы отказываемся от предположения о мгновенном срабатывании функциональных элементов. В связи с этим сужается класс схем, реализующих функции алгебры логики. Одновременно приходится применять элементы нового типа — элементы задержки, необходимые для выравнивания времени прихода сигналов на входы функциональных элементов. Всюду в дальнейшем делается предположение о том, что время срабатывания одно и то же для всех основных элементов. Это довольно обременительное ограничение сильно упрощает наши рассмотрения. При учете времени срабатывания элементов теорема Поста уже не дает ответа на вопрос об условиях полноты системы функциональных элементов. Решение этой проблемы при указанных выше предположениях дается в задачах 8.7—8.11. Отметим, что в ответе фигурируют множества, уже не являющиеся функционально замкнутыми классами относительно обычной суперпозиции. В задачах 8.12—8.14 приводятся некоторые

другие примеры задач на полноту, не сводящихся к функционально замкнутым классам Поста. Эти задачи не используются в дальнейшем и могут быть опущены. В пп. 3 и 4 исследуются схемы, не реализующие функций алгебры логики. Описание их работы приводит к важному понятию конечного автомата. При этом возникают некоторые проблемы полноты, решение которых сводится к проблеме полноты, решенной в п. 2. В п. 5 рассмотрен способ фон Неймана реализации функций алгебры логики при помощи функциональных элементов. Для этого класса схем проблема полноты решается при помощи результатов пп. 2 и 3 § 7.

Другой класс схем — релейно-контактные схемы — рассматривается в § 9. Общим принципам работы таких схем посвящен п. 1. Здесь следует обратить внимание на вторую часть задачи 9.1, из которой следует, что при реализации функции алгебры логики необходимы реле как с отрицательными, так и с положительными контактами. В остальных пунктах рассматриваются только схемы, в которых нет соединений обмоток реле с контактами, — контактные схемы. Общей теории таких схем посвящен п. 2; п. 3 посвящен проблеме минимизации схем, т. е. построению реализаций функций, содержащих как можно меньше контактов. Приводятся примеры минимальных схем. Очень важно продумать возможные пути доказательства минимальности. Центральное место занимает доказательство оценок Шеннона для числа контактов, необходимых для реализации функций от n переменных при больших n . В п. 4 строятся реализации линейных функций алгебры логики (см. § 4), а при их помощи — схемы для суммирования чисел в двоичной системе счисления. В п. 5 рассмотрена реализация арифметических операций схемами из функциональных элементов. Основная часть § 9 использует лишь § 2; в п. 3 при доказательстве теоремы Шеннона используются элементарные факты из анализа.

В § 10 строится теория вероятностей на конечных булевых алгебрах. Соответственно нужно знать определения булевой алгебры и регулярной булевой алгебры (определения 2.5 и 2.7); впрочем, последнее определение можно заменить определением 2.5, дополненным аксиомами, приведенными в примечании на стр. 195. Основные факты теории вероятностей приводятся в пп. 1—6. В п. 7 вводятся полиномы С. Н. Бернштейна и при их помощи доказывается теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций на отрезке полиномами. В п. 8 вводятся спе-

циальные классы полиномов Бернштейна, связанные с функциями алгебры логики. Они применяются в этом пункте к решению некоторых задач из теории автоматов; в следующем пункте при их помощи исследуется вопрос о надежности контактных схем. Последний пункт посвящен синтезу надежных схем из функциональных элементов с ненадежной реализацией (проблеме полноты таких элементов). Пп. 1—7 § 10 используют лишь § 2; в пп. 8 и 9 нужны, кроме того, определения самодвойственных и монотонных функций из §§ 3 и 5 и определения из §§ 8 и 9; п. 10 опирается на § 7. Результаты о приближениях функций полиномами Бернштейна используют простые факты из анализа.

В § 11 рассматривается обобщение двузначной алгебры логики на конечнозначный случай; он опирается на §§ 1—6.

В § 12 дается краткий обзор логики предикатов. Он использует §§ 1 и 2. В упражнениях фигурирует несколько задач, решавшихся при доказательстве теоремы Поста (их можно опустить) и некоторые примеры из анализа. Этот параграф занимает особое место. Все предыдущие рассмотрения так или иначе связаны с понятием логической операции, и соответственно высказывания рассматриваются при фиксированной ситуации; в § 12 исследуется зависимость высказывания от ситуации.

Укажем несколько вариантов работы над книгой. Элементарный цикл может состоять из §§ 1 и 2 с указанными выше сокращениями в пп. 3 и 4, пп. 1, 2 и обзорной части п. 3 § 9 и § 12. Его желательно усилить за счет основных частей §§ 3—5, формулировки теоремы Поста с примерами ее применения из § 6 и обзорной части § 8. Таким образом можно строить основную часть курса математической логики в пединститутах (к этому нужно обязательно добавить в каком-то виде основы теории алгоритмов, например, машины Тьюринга). Дальше можно изучить §§ 6 и 9. Дополнительные циклы могут состоять из §§ 7 и 8 (функционально замкнутые классы, схемы из функциональных элементов и проблемы полноты); из § 10 (вероятностная логика). Эти циклы пересекаются по пп. 8 и 10 § 10 (полнота систем ненадежных функциональных элементов). § 10 можно использовать при изучении теории вероятностей в контакте с математической логикой, но при этом желательно увеличить число примеров и неформальных пояснений.

В приложение вынесен справочный материал, которым удобно пользоваться при решении задач.

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ

Большая часть этой книги будет посвящена наиболее элементарному разделу математической логики, который носит название *алгебра логики*. Другое часто употребляемое название — *алгебра высказываний* — связано с очень важной интерпретацией этой теории, с которой мы начнем наши рассуждения. В алгебре высказываний рассматриваются некоторые вопросы, связанные с образованием сложных высказываний. Если у нас имеется несколько высказываний, то при помощи логических связок и отрицаний из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания принято называть *простыми*, а вновь образованные высказывания — *сложными*. Эти названия не носят абсолютного характера, так что высказывание, которое в одной ситуации мы считаем «простым», в другой может рассматриваться как «сложное», и наоборот. Подробнее об этом мы поговорим ниже. Заметим, что на языке грамматики логические связки — это различные способы образования сложных предложений из простых. Рассмотрим примеры.

Пусть имеются высказывания: «На улице светит солнце», «В классе идут занятия». Из этих простых высказываний можно различными способами построить сложные высказывания:

- 1) На улице светит солнце, и в классе идут занятия.
- 2) На улице не светит солнце.
- 3) На улице светит солнце, однако в классе идут занятия.
- 4) В классе идут занятия, а на улице светит солнце.
- 5) На улице светит солнце, или в классе идут занятия.
- 6) Или на улице светит солнце, или в классе идут занятия.
- 7) Если на улице светит солнце, то в классе идут занятия.

8) Если в классе идут занятия, то на улице светит солнце.

9) На улице не светит солнце, или в классе идут занятия.

10) На улице светит солнце тогда и только тогда, когда в классе идут занятия.

Читатель без труда продолжит список сложных высказываний, и мы не сомневаемся, что ему удастся получить высказывания, еще более абсурдные, чем 8) или 10). Самый простой способ добиться этого — взять в качестве простых высказываний как можно более далекие друг от друга по смыслу предложения, например: «Семнадцатая страница в книге начинается с буквы „в”», «Наш город стоит на берегу Волги». В связи с этим отметим первую особенность алгебры высказываний. В ней допускаются любые грамматически правильные способы образования сложных высказываний и совершенно игнорируется с м ы с л о в а я характеристика получившегося предложения. Любое из приведенных десяти сложных предложений допустимо с точки зрения алгебры высказываний.

В алгебре высказываний интересуются лишь истинностью или ложностью (истинностным значением) высказываний. Более точно: в ней исследуется вопрос об истинности сложного высказывания в зависимости от истинности входящих в него простых высказываний и с этой точки зрения и исследуются различные логические связки.

Пока что мы не делали различия между «предложениями» и «высказываниями». Однако с точки зрения сформулированной задачи такое различие удобно провести. Не про каждое предложение можно сказать, истинно оно или ложно. Примерами являются предложения, выражающие приказание («Подойди ко мне!»), сожаление («Если бы я раньше знал. . .»), вопрос («Был ли ты дома?»), поздравления («С новым годом!») и т. д. Не останавливаясь на описании этого класса предложений, договоримся, что *под высказываниями мы будем понимать предложения, для которых имеет смысл говорить об их истинности или ложности.*

Фиксация высказывания («На улице светит солнце») еще не приводит, вообще говоря, к фиксации его истинностного значения. Нужно еще фиксировать ситуацию (в данном примере — точное время и место действия). Поэтому точнее надо говорить, что высказывание *A* истинно (или ложно) в т а к о й - т о с и т у а ц и и. Ситуация может