
Gaskugeln

Robert Emden

Title: Gaskugeln

Author: Robert Emden

This is an exact replica of a book published in 1907. The book reprint was manually improved by a team of professionals, as opposed to automatic/OCR processes used by some companies. However, the book may still have imperfections such as missing pages, poor pictures, errant marks, etc. that were a part of the original text. We appreciate your understanding of the imperfections which can not be improved, and hope you will enjoy reading this book.



Book Renaissance

www.ren-books.com

gleichung der Gase gehorcht. Sollte ich aber mitunter der Lust zu spekulieren doch nicht haben widerstehen können, so ersuche ich nachträglich um Entschuldigung; wer selbst auf ähnlichen Gebieten gearbeitet hat, wird sie gewiß nicht versagen.

Ich habe noch die angenehme Pflicht zu danken meinen Schülern, die einen großen Teil der nachfolgenden mechanischen Quadraturen ausführten; meinem Kollegen Herrn Dr. W. Kutta, dessen Näherungsverfahren hierbei angewendet wurde, für viele praktische Ratschläge und seine, unter Seite 92—95 mitgeteilten Ausführungen, worin die Genauigkeit der Methode bei Anwendung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung klargelegt wird; und nicht zuletzt Herrn Prof. Dr. K. Schwarzschild in Göttingen, der mich bei Durchsicht der Korrekturen wesentlich unterstützte, für manchen guten Rat.

München, März 1907.

R. Emden.

Inhalt.

Erster Teil. Theorie.

Erster Abschnitt. Grundgleichungen.

	Seite
Erstes Kapitel. Die vollkommenen Gase	1
Zweites Kapitel. Die polytropen Kurven	10
Drittes Kapitel. Die hydrodynamischen Gleichungen	29

Zweiter Abschnitt. Differentialbeziehungen.

Viertes Kapitel. Die Differentialgleichung der polytropen Gaskugel . .	35
Fünftes Kapitel. Auswertung der Differentialgleichung	61
Sechstes Kapitel. Beispiele	95

Dritter Abschnitt. Integralbeziehungen.

Siebentes Kapitel. Die kosmogenetischen Flächen	105
Achstes Kapitel. Die Energetik des Kontraktionsprozesses	119

Vierter Abschnitt. Unendlich große Gaskugeln.

Neuntes Kapitel. Die isotherme Gaskugel	131
Zehntes Kapitel. Polytrope Gaskugeln mit unendlichem Radius . . .	149

Fünfter Abschnitt. Gemischte Systeme.

Elftes Kapitel. Gaskugeln in starrer Hülle	158
A. Isotherme Kugel	158
B. Polytrope Kugeln	172
Zwölftes Kapitel. Isotherm-polytropes System	183
Dreizehntes Kapitel. Gaskugeln mit starrem Kerne	195

Zweiter Teil. Anwendungen.

Vierzehntes Kapitel. Kosmische Staubmassen	237
Fünfzehntes Kapitel. Nebelflecke und Doppelsterne	280
Sechzehntes Kapitel. Strahlenbrechung in Gaskugeln	297
Siebzehntes Kapitel. Die Erde und ihre Atmosphäre	332
Achtzehntes Kapitel. Die Sonne	382
A. Die ruhende Sonne	382
B. Die rotierende Sonne	429
C. Die pulsierende Sonne	448

Anhang.

Neunzehntes Kapitel. Historisches und Kritisches	454
--	-----

Erster Teil.

Theorie.

Erster Abschnitt.

Grundgleichungen.

Erstes Kapitel.

Die vollkommenen Gase.

§ 1. Es sei $d\varepsilon$ die kleine, in Erg gemessene Energiemenge, welche der Masse ein Gramm eines homogenen Körpers bei einer kleinen Zustandsänderung zuzuführen ist. Durchläuft der Körper einen Kreisprozeß, so ist stets $\Sigma d\varepsilon = 0$. Geht der Körper aus dem Zustand 1 in einen Zustand 2 über, von dem er auf irgend einem Wege den Zustand 1 wieder erreichen kann, so ist $\int_1^2 d\varepsilon$ unabhängig vom Wege und nur durch dessen Endpunkte bestimmt. Ist eine Gleichung von der Form $d\varepsilon = \sum_n X_n dx_n$, so ist stets

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_m},$$

$d\varepsilon$ ist ein richtiges Differential und die Gleichung integrierbar. Wird der Zustand 1 als Normalzustand festgehalten, so kann in der Gleichung $\int_1^2 d\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ der Summand ε_1 als Integrationskonstante behandelt werden. Die auf diese Weise festgelegte Funktion ε der den Körperzustand fixierenden unabhängigen Variablen nennen wir nach W. Thomson die Energie eines Körpers. (Energieprinzip).

In die auf diese Weise definierte Energie ε gehe nicht ein diejenige potentielle Energie, die daher rührt, daß sich der betreffende Körper an irgend einer Stelle eines Kraftfeldes befindet. Eine Gasmasse, eingeschlossen in eine starre, für Wärme undurchdringliche

Hülle, enthalte eine und dieselbe Energiemenge, ob sie sich an der Erdoberfläche, der Sonnenoberfläche oder einem Orte ohne Schwerebeschleunigung befindet. Ebenso mache die potentielle Energie, die davon herrührt, daß sich die Massen eines Körpersystemes nach dem Gravitationsgesetze anziehen, keinen Teil der Energie ϵ dieses Systems aus, sondern werde stets separat behandelt.

§ 2. Es sei dQ die kleine, in Kalorien (1 Kalorie = $4,19 \cdot 10^7$ Erg) gemessene Wärmemenge, die der Masse ein Gramm eines homogenen Körpers von der absoluten Temperatur T während einer kleinen Zustandsänderung durch Leitung zuzuführen ist. Durchläuft der Körper einen umkehrbaren Kreisprozeß, so ist $\sum \frac{dQ}{T} = 0$. Wird der Körper auf einem beliebigen, aber umkehrbaren Wege aus dem Zustand 1 in den Zustand 2 versetzt, von dem aus er auf einem andern umkehrbaren Wege wieder in den Zustand 1 zurückkehren kann, so ist

$\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ unabhängig vom Wege und nur durch dessen Endpunkte bestimmt. Ist eine Gleichung von der Form

$$\frac{dQ}{T} = \sum X_n dx_n$$

gegeben, so ist stets

$$\frac{\partial X_m}{\partial x_n} = \frac{\partial X_n}{\partial x_m};$$

$\frac{dQ}{T}$ ist ein richtiges Differential einer Funktion, die wir η nennen, und die Gleichung stets integrierbar. Wird der Zustand 1 als Normalzustand festgehalten, so kann in der Gleichung

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \eta_2 - \eta_1$$

der Summand η_1 als Integrationskonstante behandelt werden. Die auf diese Weise definierte Funktion η der den Körperzustand fixierenden unabhängigen Variablen, wobei es gleichgültig ist, auf welchem Wege der Körper in diesen Zustand gelangt ist, nennen wir nach Clausius die Entropie des Körpers.

Gelangt der Körper auf einem nicht umkehrbaren Wege A in den Zustand 2, und auf einem umkehrbaren Wege B in den Zustand 1 zurück, so ist stets

$$\sum_{A+B} \frac{dQ}{T} < 0.$$

Auf einem nicht umkehrbaren Wege ist deshalb $\frac{dQ}{T}$ nicht mehr gleich $d\eta$, dem Differential einer Funktion η ;

$$\sum \frac{dQ}{T}$$

ist abhängig vom Wege und stets

$$\sum_A \frac{dQ}{T} < \int_B \frac{dQ}{T},$$

somit auch $< \eta_2 - \eta_1$. (Entropieprinzip.)

Durchläuft ein Körper oder ein Körpersystem eine Reihe von Zuständen, aus denen es auf keinem umkehrbaren Wege mehr in den Ausgangspunkt zurückkehren kann, so kann das Entropieprinzip keine sinngemäße Anwendung finden.

§ 3. Liegt ein Körper oder ein Körpersystem in einem bestimmten Zustande vor, so kann man von deren Gehalt an Energie und Entropie, nicht aber von einem Gehalt an Wärme reden. Energiegehalt und Entropiegehalt sind bis auf eine Integrationskonstante bestimmt; das Wort Wärmegehalt hat sich aus der Stofftheorie der Wärme erhalten, doch einen Begriff Wärmegehalt kennt die dynamische Theorie der Wärme nicht. Von dem Gehalt eines Körpers an Wärme kann ebenso wenig gesprochen werden, wie von dem Gehalt eines Musikinstrumentes an Ton. Wie aus einer Violine beliebige Mengen Ton (Schallenergie) herausgenommen werden können, wenn durch den Bogen entsprechende Mengen mechanischer Energie aufgewandt werden, so können aus einer konstanten Menge Gas oder Dampf, ohne daß dieselben sich schließlich verändert haben, beliebige Mengen von Wärme heraus genommen werden, wenn etwa durch Carnotsche Kreisprozesse entsprechende Arbeit aufgewandt wird. (Auch können bei entgegengesetzter Richtung dieser Prozesse beliebige Mengen von Wärme einfließen, ohne daß irgend eine Veränderung dieser Körper resultiert.)

Der Ausdruck Wärmegehalt, der leider namentlich bei Behandlung meteorologischer Probleme noch häufig angewandt wird (selbst von Helmholtz), kann leicht unklare Auffassung verursachen und sollte deshalb vollständig verschwinden, was um so leichter geschehen kann, als es sich in fast allen diesen Fällen um den Entropiegehalt handelt.

§ 4. Von allen Energiemengen, die einem Körper zugeführt werden können, haben wir der durch Leitung zuführbaren Wärmemenge eine Ausnahmestellung eingeräumt, um mit ihrer Hilfe die

Entropie definieren und messen zu können. Nun ist in den folgenden Untersuchungen die Wärmeleitung ausgeschlossen; die einzigen Energiarten, die wir zu berücksichtigen haben, sind diejenigen, die einem Körper durch Strahlung und Leistung mechanischer Arbeit mitgeteilt werden können. Von demjenigen Teile der Strahlung, der von der Masseneinheit absorbiert oder emittiert wird, nehmen wir an, daß er sich in nichts von einer Wärmemenge Q unterscheidet, die in äquivalentem Betrage durch Leitung zugeführt werden kann. Die zugeführte Arbeit bestehe einzig darin, daß ein Druck p Dynen pro cent³ das Volumen v cent³ der Masseneinheit ändert, wobei Druck und Gegendruck bis auf genügend kleine Beträge sich gleich sein sollen. Beträgt die Volumänderung dv cent³ gramm⁻¹, so ist die zugeführte Arbeit

$$(1) \quad dW = -pdv \text{ Erg. gramm}^{-1}.$$

Stets werden wir Energiemengen, die dem zu betrachtenden Körper *zugeführt* werden, *positiv* rechnen. Die Zunahme $d\varepsilon$ der Energie ist gegeben durch die Gleichung

$$(2) \quad d\varepsilon = EdQ + dW = EdQ - pdv,$$

wobei E den Zahlenwert des mechanischen Äquivalentes der Kalorie, 4,19.10⁷, bedeutet.

Den reziproken Wert $\frac{1}{E}$ werden wir mit A bezeichnen.

§ 5. Bezeichnet M die Masse eines homogenen Körpers, V dessen Volumen, T dessen Temperatur, p den Druck, unter dem er steht, so sind, bei den Festsetzungen des vorigen Paragraphen, diese vier Größen nicht unabhängig voneinander, sondern durch eine Gleichung von der Form

$$(3) \quad F(M, V, p, T) = \text{const.}$$

verbunden, welche man die *Zustandsgleichung* nennt.

Zweckmäßig legt man den Untersuchungen die Masseneinheit, $M = 1$ gramm zugrunde, wodurch $V = v$, dem Volumen der Masseneinheit, wird und die Zustandsgleichung die Form annimmt:

$$(3a) \quad f(v, p, T) = \text{const.},$$

oder man untersucht das Verhalten der Volumeinheit, indem man $V = 1$ cent³ setzt, wodurch $M = \rho$, der Masse der Volumeinheit, wird und die Zustandsgleichung die Form annimmt:

$$(3b) \quad \varphi(\rho, p, T) = \text{const.}$$

Dabei ist stets $v\rho = 1$. Die Veränderungen, welche die Variablen p ,

T und ϱ , resp. v , erleiden können, sind demnach nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Relationen verbunden

$$(4a) \quad \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0$$

desgleichen

$$(4b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial T} dT + \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\varrho = 0.$$

Von der Zustandsgleichung zu unterscheiden ist die *Gleichung der Zustandsänderung*, auch Gleichung des Weges genannt. Mannigfache Irrtümer sind dadurch entstanden, daß beide Gleichungen nicht streng auseinander gehalten worden sind. Die Gleichung der Zustandsänderung gibt das Gesetz an, das bei eintretender Veränderung die *aufeinanderfolgenden* Zustände miteinander verbindet. Die beiden Gleichungen vereinigt gestatten, aus der Veränderung einer einzigen unabhängigen Variablen die Veränderungen der beiden andern eindeutig zu bestimmen. Die Gleichung der Zustandsänderung kann ihren Zweck dadurch erfüllen, daß sie einer der unabhängigen Variablen einen konstanten Wert beilegt, wodurch die Wege konstanten Druckes, konstanter Temperatur und konstanter Dichte, resp. konstanten Volumens definiert sind; oder sie kann als Gleichung zwischen zweien der unabhängigen Variablen gegeben sein. Da durch zwei der unabhängigen Variablen der Zustand, also auch Energie ε und Entropie η fixiert sind, so können die Gleichungen der Zustandsänderungen auch in der Form $\varepsilon = \text{konst.}$, oder $\eta = \text{konst.}$ gegeben sein, wodurch die Wege konstanten Energiegehaltes, resp. konstanten Entropiegehaltes (Isentropen) festgelegt sind.

Ist ein Weg der Art beschaffen, daß in jedem Wegelement $dQ = 0$ ist, so nennen wir denselben eine Adiabate. Da aber keine Funktion Q der unabhängigen Variablen existiert (siehe § 3), dQ nicht das Differential einer Funktion der unabhängigen Variablen ist, so ist durch $dQ = 0$ im allgemeinen kein Weg vorgeschrieben, eine Wegegleichung von der Form $Q = \text{konst.}$ ist sinnlos. Ist der Weg umkehrbar, so fällt wegen der Beziehung $\frac{dQ}{T} = d\eta$ die Adiabate mit der Isentrope zusammen. Bei nicht Umkehrbarkeit besteht ein vom Wege abhängiger Unterschied. Dehnt sich z. B. ein vollkommenes Gas aus ohne Leistung äußerer Arbeit, so fällt die Adiabate mit der Isotherme zusammen.

Zwecks graphischer Darstellung werden wir v und p als Abszissen- und Ordinatenachsen benutzen. Jedem Punkte der pv -Ebene ist durch die Zustandsgleichung eine bestimmte Temperatur zugeordnet;

die Gleichung der Zustandsänderung bestimmt eine Linie, welche die aufeinanderfolgenden Zustände verbindet.

§ 6. Über die Natur der Körper, auf die sich die nachfolgenden Betrachtungen beziehen, machen wir zwei einschränkende Annahmen.

Annahme A. Der Energiegehalt ε sei durch die Temperatur T eindeutig bestimmt. In der pv -Ebene fallen somit die Wege konstanter Energie mit den Isothermen zusammen; der Energiegehalt ist bei derselben Temperatur unabhängig vom Druck, resp.

Volumen. Gehen wir (Fig. 1) auf beliebigen Wegen $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \dots$ von einer Isotherme T_1 zu einer Isotherme T_2 über, so ist die Energiezufuhr auf allen diesen Wegen dieselbe.

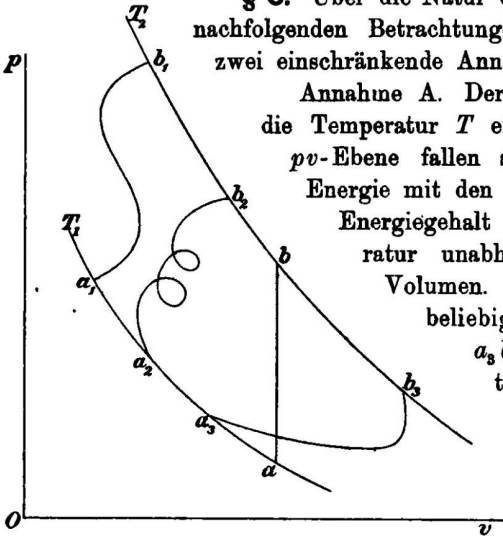


Fig. 1.

Dadurch läßt sich der Energiegehalt leicht

als Funktion der Temperatur ausdrücken. Wir nehmen als Übergang von T_1 nach T_2 einen Weg ab konstanten Volumens, $dv = 0$. Auf jedem Wegelement ist die zugeführte Arbeit = 0 und Gleichung (2) gibt

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = E \int_{T_1}^{T_2} dQ.$$

Bezeichnen wir die Wärmekapazität bei konstantem Volumen mit c_v , gemessen in Kalorien, so ist $dQ = c_v dT$ und somit

$$(5) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = E \int_{T_1}^{T_2} c_v dT.$$

$$(6) \quad d\varepsilon = E c_v dT$$

Da nach Annahme A der Wert von $\int_{T_1}^{T_2} c_v dT$ unabhängig davon

ist, an welcher Stelle der pv -Ebene wir den Weg ab ziehen, so folgt, daß für diese Körperklasse die Wärmekapazität c_v unabhängig von Druck und Volumen sein muß; dieselbe kann nur Funktion der Temperatur sein.

Die Gleichung (2) können wir nun schreiben

$$(7) \quad Ec_p dT = EdQ - pdv,$$

$$(8) \quad dQ = c_p dT + A pdv,$$

d. h. wir haben Wärme zuzuführen zur Erhöhung der Energie $d\varepsilon = c_p dT$ und Leistung äußerer Arbeit pdv .

Um die Relation zwischen T , p und v zu spezialisieren haben wir der Zustandsgleichung eine bestimmte Form zu geben.

Annahme B. Der Körper befolge die Zustandsgleichung

$$(9) \quad \frac{pv}{273 + t^0} = \frac{p}{(273 + t^0)_0} = \text{konst.} = H \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

$$273 + t^0 = T.$$

Die sogenannten permanenten Gase befolgen diese Zustandsgleichung mit ziemlicher Genauigkeit. Einen Körper, der die Annahme A und B für alle Intervalle von p und v und für das Intervall für t von -273 bis ∞ , erfüllt, nennen wir ein vollkommenes Gas. Da die Wärmekapazität c_p der permanenten Gase nur wenig mit der Temperatur sich ändert, machen wir mit Clausius für die vollkommenen Gase die Nebenannahme, daß c_p von der Temperatur nicht abhängt. Dann können wir die Gleichung (6) auch schreiben

$$(10) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = Ec_p(T_2 - T_1).$$

Alle folgenden Untersuchungen beziehen sich auf vollkommene Gase. Wir nehmen bei Ausrechnung bestimmter Fälle an, daß sich die permanenten Gase wie vollkommene Gase verhalten und können für dieselben die Gleichungen (4a) und (4b) in der Form schreiben:

$$(11a) \quad vdp - HdT + pdv = 0$$

$$(11b) \quad dp - \rho HdT - THd\rho = 0.$$

§ 7. Wir wenden stets das Cent. Gramm. Sek.-System als Maßsystem an. Energie, Wärmemenge und Entropie sind demnach von der Dimension des Erg = gramm. cent² sek⁻². Die Größen ε , Q , η , sind Energiemengen pro Masseneinheit, also von der Dimension cent² sek⁻². Als Einheit dient das Erg oder eine größere Einheit (für Q und η) = 4,19.10⁷ Erg, die Kalorie. Der Druck mißt sich in Dynen cent⁻² = gramm cent⁻¹ sek⁻². Als größere Einheit benutzen wir die Megadyne = 10⁶ Dynen. Die Temperatur t messen wir in Celsiusgraden mit Hilfe des Wasserstoffthermometers der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Dann zeigt es sich, daß, wenn wir bei Auswertung der Zustandsgleichung (9) die Maßeinheiten für Masse, Länge, Zeit beliebig ändern, wohl die Konstante H ihren Wert ändert, die Zahl 273 im Nenner

aber unverändert stehen bleibt. Der Wert 273 ist somit nicht durch die Wahl der Maßeinheiten von Masse, Länge und Zeit bedingt; dasselbe gilt von der dazu addierten Größe t . Der Wert der Temperatur T ist somit unabhängig von den Maßeinheiten; wir betrachten dieselbe deshalb als undimensionierte Größe. Die Konstante H der Zustandsgleichung wird von der Dimension $\text{cent}^2 \text{sek}^{-2}$; sie repräsentiert das Quadrat einer Geschwindigkeit, die in einfacher Beziehung zur Schallgeschwindigkeit steht. Die Wärmekapazitäten, ebenso die Größen ε , η , Q , $p dv$ und H sind sämtlich von der Dimension $\text{cent}^2 \text{sek}^{-2}$.

Den Zahlenwert der Konstanten H finden wir, indem wir T, p, v zusammengehörige Werte geben. Setzen wir $p = 10^6$ Dynen cent^{-2} , $T = 273$ so erhalten wir (ausgehend von einer Luftdichte $\rho = 0,0012929$, bei einer Temperatur $t = 0^0$ und einem Druck einer Atmosphäre = $1,0132 \cdot 10^6$ Dynen cent^{-2}).

	ρ gramm cent^{-3}	v cent^2 gramm $^{-1}$	H cent^2 sek $^{-2}$
Luft	0,001276	783,7	2,8705.10 ⁶
Wasserstoff (H ²)	0,00008831	11325,0	4,1481.10 ⁷
Dissoziierter Wasserstoff (H ¹)	0,00004416	22650,0	8,2962.10 ⁷
Kohlensäure (CO ²)	0,001951	512,5	1,8764.10 ⁶
Dreiatomiges Gas vom Molekulargewicht 18; (H ² O)	0,0007948	1258,3	4,6090.10 ⁶

Um die Gleichung (8) integrieren zu können muß noch die Gleichung der Zustandsänderung gegeben sein. Es wird sich zeigen, daß es eine Klasse von Wegen gibt, die scheinbar ganz verschieden aussehen, sich aber formell gleich behandeln lassen. Ehe wir dazu übergehen, deren Gleichung aufzustellen, haben wir noch eine wichtige Beziehung abzuleiten. Wir gehen in Fig. 1 auf einer Horizontalen, von einem Wege konstanten Druckes, von T_1 nach T_2 über.

Wenden wir die Gleichung (8) auf die Elemente dieses Weges an, so haben wir $dQ = c_p dT$, wenn c_p die Wärmekapazität bei konstantem Drucke bedeutet. Das Arbeitsglied $Ap dv$ können wir umformen. Da die Veränderungen dp , dv und dT nach der Zustandsgleichung stets in der Beziehung (11a) stehen müssen, in diesem Falle aber $dp = 0$ ist, so erhalten wir $Ap dv = AH dT$ und eingesetzt die überaus wichtige Beziehung

$$(12) \quad c_p - c_v = AH \text{ cent}^2 \text{ sek}^{-2}.$$

§ 8. Bei der Behandlung von Vorgängen, die sich bei konstanter Temperatur abspielen, ist es vorteilhaft, an Stelle der Gaskonstanten H