С.А. Богомолов

Введение в неевклидову геометрию Римана

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.А. Богомолов
С11 Введение в неевклидову геометрию Римана / С.А. Богомолов – М.: Книга по Требованию, 2024. – 226 с.

ISBN 978-5-458-26004-6

Настоящая книга посвящена неевклидовой геометрии, носящей имя немецкого математика Римана (точнее говоря, здесь главным образом будет идти речь об эллиптической форме ее).

ISBN 978-5-458-26004-6

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

гур) имеют ясно выраженный формальный характер; но автор не видел, как можно обойтись без этого. В частности, учение о смысле позволяет выяснить до конца такую важную особенность эллиптической геометрии, как односторонность ее плоскости.

С. Богомолов.

Ленинград, 18 августа 1933 г.

ВВЕДЕНИЕ.

В 1868 г. появилась в печати написанная еще в 1854 г. знаменитая диссертация Римана „О гипотезах, лежащих в основании геометрии“ *). В этой работе автор, ограничиваясь краткими намеками, явился основателем аналитического направления в деле обоснования геометрии (которому мы здесь следовать не будем); надо также отметить, что Риман одним из первых заговорил о пространствах, n-кратно протяженных **). Для нас здесь главная заслуга Римана заключается в том, что он установил возможность другой неевклидовой геометрии, которая дотоле отрицалась в силу допущения о бесконечности прямой, признаваемой ее неотъемлемым свойством. Именно, Риман различил в этом вопросе понятия о безграничности и бесконечности пространства, которые обычно смешивались. Безграничность есть качественное свойство пространства и состоит в том, что для каждой данной части пространства можно строить смежные пространства; и это свойство действительно неотъемлемо от пространства нашего представления. Бесконечность же есть свойство количественное; к нему нас приводит другой ход мысли, исходящий из понятия об измерении. Оба свойства не связаны друг

*) Сборник „Об основаниях геометрии“. Казань, 1893.

**) Указания по этому вопросу и перечень литературы читатель может найти в книге: В. Ф. Каган, Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907, стр. 413 и след.

с другом неразрывным образом, как это можно видеть на примере одного пространства 2-х измерений, а именно — на поверхности шара: последняя — безгранична в указанном выше смысле, но тем не менее имеет конечные размеры. Поэтому безграничность прямой может быть совместима с ее конечной длиной (в случае замкнутой линии).

Подобные соображения Римана имели решающее значение для признания „третьей возможности" в вопросе о параллельных прямых и вообще для развития неевклидовой геометрии.

Упомянутая выше „третья возможность" рассматривает допущение, что всякие две прямые одной и той же плоскости всегда пересекаются. В таком случае прямая уже не может быть открытой линией, как в геометриях Евклида и Лобачевского; действительно, отсутствие параллелей позволяет установить одно-однозначное соответствие между точками прямой и прямыми пучка, а этот последний является замкнутым рядом. Геометрия, которая исходит из таких предпосылок, носит имя Римана; по числу точек пересечения у двух прямых она делится на две различные системы. Подойти к этому выводу можно с помощью такого рассуждения.

Возьмем прямую AB и в некоторой проходящей через нее плоскости восставим к ней перпендикуляры в точках A и B. Согласно основному положению геометрии Римана, эти перпендикуляры пересекутся в точке C. В виду симметрии фигуры относительно линии AB, мы должны допустить у построенных перпендикуляров еще другую общую точку C', симметричную с C относительно прямой AB. Теперь мыслимы две возможности: или точки C и C' различны, или они совпадают. В первом случае мы должны отказаться от аксиомы, что две точки всегда определяют только одну прямую; во втором же случае это утверждение останется в силе, но зато явится новая особенность по сравнению с геометриями Евклида и Лобачевского. Дело в том, что при замкнутости прямой две точки делят ее на два отрезка; а так как две различные прямые всегда пересекаются только в одной точке, то один из отрезков всегда имеет общую точку с данной прямой, а другой всегда свободен от таких точек. Такое положение дела не дает возможности различить случаи, когда две данные точки лежат по одну сторону от данной прямой и когда — по разные, так что при рассматриваемом допущении прямая не делит плоскости на две раздельные части.

По почину Клейна, условимся называть эллиптической ту систему геометрии Римана, которая характеризуется наличием единственной точки пересечения у двух прямых, а ту систему, в которой имеют место две общих точки, назовем сферической.

Отношение самого Римана к раздвоению созданной им геометрии — не совсем ясно. На это раздвоение впервые указал Клейн в своих мемуарах от 1871 и 1873 г.*). Дальнейшее развитие вопроса находим в работах Киллинга. Начиная с 1879 г., названный ученый представил ряд доказательств того, что геометрия Римана распадается на две и только на две различные формы**).

В 1877 г. появился мемуар Ньюкомба***), в котором впервые самостоятельно обосновывается эллиптическая геометрия и при том — элементарным путем. В основу кладутся три постулата очень богатого и не вполне опре-

*) „Ueber die sogenannte Nicht-Eukl. Geometrie" Math. Ann. Bd. 4 (примечание на стр. 604—605), Bd. 6 (стр. 125).

**) См. например: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie" Paderborn. Bd. I, S. 54—57. В нашем „Опыте" подробно разобраны как доказательства Киллинга, так и другие (Уайтхэд, Кулидж).

***) Newcomb, Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension (Journal fur die reine und angew. Math., Bd 83, S. 293—299).

деленного содержания, и все-таки этих постулатов автору оказывается недостаточно. Некоторый вклад в эллиптическую геометрию сделал Киллинг в выше упоминавшейся книге.

Довольно полное и систематическое изложение эллиптической геометрии, но при чрезвычайном своеобразии метода, мы находим в известной книге Уайтхэда*). В качестве одной из специальных „алгебр", излагается созданное Грассманом исчисление протяжения, которое впоследствии прилагается к изучению эллиптической геометрии.

Не имея возможности входить здесь в подробный обзор литературы вопроса, мы укажем в заключение те немногие работы, в которых более или менее полно и систематически затронуты важнейшие вопросы эллиптической геометрии:

1) Бонола, Теория параллельности и неевклидовы геометрии (известный сборник под редакцией Энриквеса).

Эллиптическая геометрия излагается на стр. 349—373. Постановка исследования страдает некоторой неопределенностью, но необходимо отметить подробный вывод тригонометрических зависимостей; стереометрии не имеется. Здесь же следует упомянуть о другой книге того же автора: Бонола. Неевклидова геометрия, СПБ, 1910; в приложении II излагается теория „параллелей и поверхности Клиффорда", которым нам придется своевременно уделить соответствующее внимание.

2) Coolidge, The Elements of Non-Euclidean Geometry, Oxford, 1909.

Автор ставит себе задачу одновременно построить все три геометрии и подходит к ее решению со всех трех указанных выше точек зрения; однако по существу пер-

*) Whitehead, A Treatise on Universal Algebra, vol. I (Cambridge, 1898).

венствует проективный метод. Такая постановка дела вызывает известную громоздкость изложения; но необходимо отметить богатый материал, включающий высшие отделы приложения анализа к геометрии.

3) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. (Sammlung Schubert 49, Leipzig, 1912).

Здесь в сущности наибольшее внимание уделено сферической системе и лишь на стр. 170—177 излагаются различные подступы к эллиптической геометрии.

Подробный разбор как этих, так и других работ привел нас к выводу, что задача систематического и элементарно-синтетического обоснования геометрии Римана еще не потеряла своего интереса.

Такое именно обоснование и является задачей настоящей книги, причем здесь мы будем иметь в виду исключительно эллиптическую систему геометрии Римана.

Такое предпочтение в пользу эллиптической геометрии объясняется тем, что сферическая нам более знакома: ее планиметрию давно уже изучали под видом геометрии на поверхности шара *); благодаря этому обстоятельству, даже обычная пространственная интуиция может оказать значительную помощь при изучении сферической геометрии. Совсем не то видим мы по отношению к эллиптической системе: она менее разработана, между тем содержит такие особенности (как например: односторонность плоскости, существование четырех треугольников с тремя данными вершинами, возможность пересечения двух окружностей в четырех точках), которые требуют именно подробной разработки, тем более что обычная

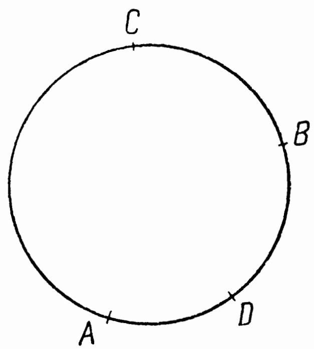
*) Роль „прямых“ здесь исполняют окружности больших кругов, которые суть замкнутые линии; две такие окружности, лежащие на одной и той же шаровой поверхности, всегда пересекаются и при том в двух диаметрально противоположных точках.

интуиция в этих вопросах способна скорее затруднить исследователя, чем оказать ему помощь. Впрочем надо прибавить, что, по верному замечанию Либмана, обе системы геометрии Римана тождественны в ограниченной области и только при переходе к полному пространству дают различные картины.

Сказанное в достаточной мере поясняет, что при построении эллиптической геометрии особенно важно придерживаться так называемого аксиоматического изложения, т. е. отчетливо перечислить основные понятия, принимаемые без определения (общелогические понятия в счет не идут), и основные предложения или аксиомы, принимаемые без доказательства, а все остальное развить строго логически, соблюдая известные правила относительно определений и доказательств. Однако осуществить такое построение эллиптической геометрии шаг за шагом, во всех подробностях было бы возможно лишь в работе, значительно превосходящей по своим размерам настоящую книгу. Поэтому здесь нам придется сосредоточить внимание читателя главным образом на характерных особенностях рассматриваемой геометрии, мало уделяя времени тем предложениям, которые общи ей с геометрией Евклида; да и в вопросах первого рода подчас придется ограничиться выяснением типических приемов доказательства, а затем прибегать к ссылкам на аналогию.

При построении геометрии хорошим вспомогательным средством служат чертежи, особенно — там, где приходится экономить место. Мы не даем чертежа в простейших случаях, предоставляя сделать таковой самому читателю, но, вообще говоря, рассуждения сопровождаем чертежами. Последние имеют большей частью схематический характер; некоторые особенности геометрии Римана, както: замкнутость прямой, пересечение двух перпендикуляров к одной прямой и т. п. — таковы, что не поддаются точному воспроизведению на чертеже. Однако и такие чертежи приносят пользу: греша в одном отношении, в других они могут правильно воспроизводить соотношения рассматриваемых фигур; неточности же их при аксиоматическом изложении никакими опасностями не грозят. Читателю, вероятно, случалось с успехом доказывать свойства круга на весьма неправильном, нарисованном от руки овале.

Изложенное в первой части Введения позволяет уже заключить, что переход от евклидовой геометрии к эллиптической сложнее, чем к гиперболической (геометрии Лобачевского). Там требовалось только изменить аксиому параллелей, оставляя в неприкосновенности все остальные; здесь же потребуются более глубокие изменения в системе аксиом. Прямая теперь является линией замкнутой, а потому вопросы расположения ее точек нельзя обработать при помощи понятия „между“, как это делает Гильберт, или при помощи понятия „предшествовать“, как это рекомендует Вайляти. Эти понятия весьма пригодны для открытой прямой геометрий Евклида и Лобачевского, но теряют смысл в применении к замкнутой прямой Римана. Следующее наглядное рассуждение пояснит нам это.



Черт. 1.

Возьмем на окружности, которая может служить типическим примером замкнутой линии, три точки: A, B, C (черт. 1); так как точки A и B делят данную окружность на две дуги (на два „отрезка“), то с одинаковым правом можно сказать, что точка C лежит и не лежит между A и B; все зависит от того, какая именно дуга имеется в виду. Таким образом понятие „между“ теряет здесь определенный смысл; подобное же можно утверждать и о понятии „предшествовать“. Но вот если присоединим сюда еще 4-ую точку D, то относительно взаимного расположения пар C, D и A, B можно высказать определенное утверждение; именно, точки C и D могут принадлежать одной и той же дуге AB или различным дугам AB. В последнем случае говорят, что „пара A, B разделяет пару C, D“ и обозначают это обстоятельство символом:

$$AB \,|\, CD.$$

Разделение пар имеет место и на евклидовой прямой, но там оно сводится к более простым понятиям, тогда как для замкнутой линии оно имеет основное значение.

Заслуга разработки вопроса о расположении точек на замкнутой прямой принадлежит тому же итальянскому геометру Вайляти *). Следуя в общем его указаниям, мы примем „разделение пар“ в качестве основного понятия и характеризуем его с помощью соответственных аксиом. При этом подходящим образом выбранные аксиомы позволяют определить прямую, исходя из названного понятия, так что нет надобности брать „прямую“ в качестве основного понятия (существенное значение имеет здесь аксиома VII). Это обстоятельство влечет за собой значительное отличие нашей системы аксиом от той, которая известна по работе Гильберта. Далее, хотя учение о равенстве, в основных чертах своих, сходно с евклидовым, однако аксиомы равенства в эллиптической геометрии имеют своеобразный характер; причиной тому

*) Две небольших статьи Vailati напечатаны в томе V журнала „Rivista di Matematica“; к ним примыкает статья Padoa, напечатанная в томе VI того же журнала. Идеи Вайляти подробно разобраны нами в книге: „Вопросы обоснования геометрии“ (Москва, 1913), стр. 194 и след.; полученные там выводы будут использованы здесь.